

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

ENRICO JABARA

**Una nota sui gruppi dotati di un automorfismo
uniforme di ordine potenza di un primo**

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 84 (1990), p. 217-221

[<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1990__84__217_0>](http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1990__84__217_0)

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1990, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

**Una nota sui gruppi
dotati di un automorfismo uniforme
di ordine potenza di un primo.**

ENRICO JABARA (*)

SUMMARY - An automorphism α of a group G is called uniform if for every $g \in G$ exists $h \in G$ such that $g = h^{-1}h^\alpha$. In a work by Robinson it is proved that a finitely generated hyperabelian group admitting a uniform automorphism of prime order p is nilpotent and then finite of order coprime with p . However, non-nilpotent finite groups are known which admit uniform automorphisms of composite order. The main aim of this note is to give a partial generalization of Robinson's theorem proving that a f.g. hyperabelian group which admit a uniform automorphism of order p^n (p a prime) is a finite p' -group.

1. Un automorfismo α di un gruppo G si dice uniforme se per ogni elemento g di G esiste $h \in G$ tale che $g = h^{-1}h^\alpha$.

Il termine di automorfismo uniforme è stato introdotto da Zappa in [3] per indicare quella che appariva a molti la più naturale estensione del concetto di automorfismo privo di coincidenze al caso di gruppi che non fossero necessariamente finiti.

Infatti è noto (si veda 10.5.1 di [2]) che:

(A) In un gruppo finito un automorfismo è uniforme se e solo se esso risulta privo di coincidenze. ■

Era già noto ⁽¹⁾ che un gruppo finito e risolubile dotato di un automorfismo di ordine primo p privo di coincidenze risulta essere nilpotente e di ordine coprimo con p .

(*) Indirizzo dell'A.: Dorsoduro 3647, 30123 Venezia.

⁽¹⁾ Per la storia di questo risultato vedi [3].

In [3] Zappa generalizzava tale risultato dimostrando, mediante l'applicazione di un teorema di Hirsch (5.4.18 di [2]), che se un gruppo policiclico G ammette un automorfismo uniforme di ordine primo p allora G è nilpotente. Dal che discende che G risulta essere un p' -gruppo finito.

Successivamente Robinson in [1] dimostrava una versione più forte del teorema di Hirsch ottenendo anche che il risultato di Zappa e le sue implicazioni continuano a valere quando all'ipotesi che G sia policiclico si sostituisce quella, più debole, che G sia finitamente generato (f.g.) e iperabeliano (Teorema 3 di [1]).

In questo lavoro ci proponiamo di dare una parziale generalizzazione dei risultati precedenti dimostrando il seguente:

TEOREMA. Sia G un gruppo iperabeliano e f.g. che ammette un automorfismo uniforme di ordine p^n , con p primo. Allora G è un p' -gruppo finito.

Non ci si può aspettare la nilpotenza di G in quanto sono noti esempi di gruppi finiti che ammettono un automorfismo uniforme di ordine 4 e che non sono nilpotenti (si veda l'esempio a p. 298 di [2]).

Tra gli esempi che forniremo nell'ultimo paragrafo ve ne sono alcuni che mostrano come le ipotesi che G sia f.g. e che l'ordine di α sia la potenza di un primo sono essenziali per ottenere le nostre tesi. Altri semplici esempi mostrano che (A) cessa completamente di valere non appena si prendono in considerazione gruppi di ordine infinito.

2. La notazione che useremo è quella di [2]; con α denoteremo sempre un automorfismo di ordine p^n (p primo) del gruppo G .

Nella dimostrazione del teorema ci serviremo, oltre che di (A), dei risultati qui di seguito riportati.

(B) **LEMMA.** Sia α uniforme e sia N un sottogruppo normale α -invariante di G . Allora:

- 1) l'automorfismo $\bar{\alpha}$ indotto da α su $\bar{G} = G/N$ è uniforme;
- 2) se N ha indice finito in G anche la restrizione di α ad N è un automorfismo uniforme.

Si noti che nella dimostrazione di questo lemma non è necessario che α sia di ordine potenza di un primo; è sufficiente che $o(\alpha) = r$ sia finito. Nell'ultimo paragrafo daremo però un esempio di un gruppo con un automorfismo uniforme di ordine infinito per il quale (B) cessa di valere.

DIMOSTRAZIONE. 1) Poichè $N^\alpha \leq N$ si ha $N = N^{\alpha'} \leq \dots \leq N^\alpha \leq N$ e quindi $N^\alpha = N$.

Sia $gH \in \bar{G}$, allora in G esiste un elemento h tale che si ha $g = h^{-1}h^\alpha$ da cui $gN = h^{-1}h^\alpha N = h^{-1}Nh^\alpha N = (hN)^{-1}(hN)^\alpha$.

2) Sia $g \in N$ con $g = h^{-1}h^\alpha$ e $h \notin N$; ma allora nel gruppo finito $\bar{G}$ si avrebbe $\bar{h} \neq 1$: assurdo perchè $\bar{\alpha}$, per il punto precedente è uniforme in G e quindi, per (A), privo di coincidenze. ■

(C) **LEMMA.** Se G è nilpotente e f.g. (oppure G è finito) e α è uniforme allora G risulta essere un p' -gruppo finito.

DIMOSTRAZIONE. Se G è finito α , per (A), risulta privo di coincidenze; è quindi sufficiente considerare le α -orbite in G per concludere che $o(G) \equiv 1 \pmod{p}$.

Sia allora G nilpotente e f.g.; se G è di torsione esso risulta certamente finito e l'asserto discende da quanto si è dimostrato sopra. Altrimenti, quozientando G rispetto al suo sottogruppo di torsione (operazione che, in base a (B.1), non modifica le nostre ipotesi), possiamo supporre G libero da torsione. Allora è facile provare (si veda 5.2.21 di [2]) che G/G^p è un p -gruppo finito non banale.

Ma ciò è assurdo poichè α , per (B.1), induce su G/G^p un automorfismo uniforme di ordine p^n , contraddicendo quanto provato all'inizio della dimostrazione. ■

(D) **LEMMA.** Se G è iperabeliano esso possiede un sottogruppo normale abeliano α -invariante non banale.

Anche nella dimostrazione di questo lemma è sufficiente che $o(\alpha) = r$ sia finito.

DIMOSTRAZIONE. Sia A un sottogruppo normale, abeliano non banale di G . Allora $AA^\alpha \dots A^{\alpha^{r-1}}$ risulta essere un sottogruppo normale α -invariante non banale di G che, per il teorema di Fitting, è nilpotente. Il suo centro, essendo abeliano e caratteristico, soddisfa ai requisiti dell'enunciato. ■

3. Veniamo ora alla dimostrazione del nostro teorema.

Ragioniamo per assurdo supponendo che G sia un gruppo di ordine infinito, iperabeliano e f.g. che ammette un automorfismo uniforme α di ordine p^n (p primo).

Sia $\{H_i: i \in I\}$ una catena di sottogruppi α -invarianti e normali di G con la proprietà che i quozienti G/H_i non siano finiti e sia $H = \bigcup_{i \in I} H_i$.

Se G/H è finito da 1.6.11 di [2] discende che H è f.g. e, di conseguenza, $H = H_i$ per qualche $i \in I$: assurdo.

Dal lemma di Zorn discende allora che esiste un sottogruppo α -invariante normale di G , che chiameremo N , massimale rispetto la proprietà che G/N non sia finito.

Per (B.1) non è restrittivo supporre $N = 1$ e che quindi ogni quoziente proprio di G tramite un sottogruppo α -invariante normale non banale sia finito.

Sia A un sottogruppo normale abeliano α -invariante di G , che certamente esiste per (D).

Poichè G/A è finito, da 1.6.11 di [2], discende che A è f.g.; per (B.2) $\alpha|_A$ è uniforme (di ordine una potenza di p).

Per (C) A , e quindi G stesso, sarebbe finito: contraddizione. ■

Osserviamo che nella nostra dimostrazione non si fa uso del teorema di Robinson (neppure di quello di Zappa); non si usa nemmeno il fatto che un gruppo finito che ammette un automorfismo di ordine primo privo di coincidenze risulta essere nilpotente.

4. Alcuni dei seguenti esempi sono già comparsi (seppur in contesti lievemente differenti) nell'ampia letteratura che esiste sull'argomento ma, per completezza, vogliamo segnalarli ugualmente.

1) In un gruppo abeliano (scritto additivamente) consideriamo l'automorfismo che manda ogni elemento nel suo opposto. Tale automorfismo risulta essere:

a) non uniforme e privo di coincidenze in $\mathbb{Z}$;

b) l'identità in $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$;

c) uniforme e privo di coincidenze in $\mathbb{Q}$;

d) uniforme ma con coincidenze in $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ e nella sua 2-componente di torsione $\mathbb{Z}_{2^\infty}$.

Si noti che negli ultimi due casi i gruppi considerati non sono finitamente generali e che nell'ultimo compaiono elementi di ordine non coprimo (in ogni caso sembra che un gruppo con un automorfismo uniforme di ordine p^n debba essere p -radicabile).

Il seguente esempio (Zappa, [3]) mostra quanto sia lontana dall'esser vera (A) nel caso di gruppi infiniti.

2) Il gruppo diedrale di ordine infinito (che non è nilpotente) ammette un automorfismo di ordine 2 privo di coincidenze.

3) Sia n un numero naturale diverso da 1. Allora l'automorfismo del gruppo additivo $\mathbf{Q}$ definito da $\alpha(x) = nx$ è uniforme di ordine infinito ma non induce un automorfismo sul sottogruppo α -invariante $\mathbf{Z}$.

4) Sia $G = \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ il gruppo abeliano libero (scritto additivamente) generato da x e y e sia $\alpha \in \text{Aut}(G) = GL(2, \mathbf{Z})$ definito da $\alpha(x) = y$ e $\alpha(y) = -x + y$. Si verifica che α ha ordine 6 e risulta essere uniforme.

Questo mostra che il nostro teorema non continua ad essere valido se l'ordine di α non è la potenza di un primo.

BIBLIOGRAFIA

- [1] D. J. S. ROBINSON, *A theorem on finitely generated hyperabelian groups*, Invent. Math., **10** (1970), pp. 38-43.
- [2] D. J. S. ROBINSON, *A course in the theory of groups*, Springer, New York (1982).
- [3] G. ZAPPA, *Sugli automorfismi uniformi nei gruppi di Hirsch*, Ricerche Math., **7** (1958), pp. 3-13.

Manoscritto pervenuto in redazione il 17 ottobre 1989.