

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

GIULIANO BRATTI

Su di un teorema di Hartogs

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 79 (1988), p. 59-70

[<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1988__79__59_0>](http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1988__79__59_0)

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1988, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

Su di un teorema di Hartogs.

GIULIANO BRATTI (*)

0. Il teorema di Hartogs cui il titolo allude è questo:

Sia A un aperto di C^n , $n \geq 2$, e sia K un compatto di A con complementare, $A \sim K$, connesso; ebbene: ogni funzione olomorfa definita su $A \sim K$ ammette un solo prolungamento olomorfo definito su tutto A .

È probabile che la prima estensione di questo teorema sia quella di Francesco Severi, [9], ⁽¹⁾; oggi è possibile dare una formulazione generale del teorema di Hartogs, relativamente a fasci soffici ⁽²⁾ di distribuzioni, e di iperfunzioni, che son soluzioni d'un sistema omogeneo di equazioni alle derivate parziali, lineari ed a coefficienti costanti. A tale scopo il mio punto di partenza sarà il Teorema 3 di Gaetano Fichera, [4], pag. 202.

L'oggetto dei successivi paragrafi 1), 2) e 3) è il seguente: 1) enunciato e dimostrazione del teorema di Hartogs per fasci di gruppi; 2) caratterizzazione dei sistemi differenziali lineari, a coefficienti costanti, che hanno soluzioni dell'omogeneo associato *prolungabili*; 3) versione coomologica dei risultati di 2).

(*) Indirizzo dell'A.: Seminario Matematico dell'Università, Via Belzoni 7, I-35131 Padova.

⁽¹⁾ Si veda anche la Nota di G. FUBINI: *Un teorema sulle equazioni alle derivate parziali di tipo ellittico che generalizza un teorema dell'Hartogs e uno del Severi*, sui medesimi Rendiconti di [9].

⁽²⁾ Per altri tipi di estensioni, si veda [5].

Nota. Gli argomenti qui trattati sono già stati oggetto d'una mia conferenza tenuta presso l'I.S.P.J.A.E., Instituto Superior Politecnico « José Antonio Echevarria », dell'Avana, Cuba, il 30 di marzo del 1987.

1. X sia uno spazio topologico di Hausdorff, unione numerabile di compatti:

$$X = \bigcup_j L_j, \quad \mathring{L}_j \subset L_{j+1},$$

dove $\mathring{L}_j$ è l'interno di L_j .

$\mathcal{F}$ sia un fascio di gruppi abeliani su X ; A sia un aperto connesso di X , H sia la famiglia di tutti i compatti di A , K_A sia una sottofamiglia di H tale che:

$i_1)$ i compatti di K_A invadono A ;

$i_2)$ per ogni K in K_A il suo complementare $A \sim K$ è connesso.

Identificando $\mathcal{F}(A)$ con $\Gamma(A, \overline{\mathcal{F}})$, dove $\overline{\mathcal{F}}$ è lo spazio étalé associato a $\mathcal{F}$, si pone

$$\mathcal{F}_H(A) = \{w \text{ in } \mathcal{F}(A) : \text{supp}(w) \text{ sta in } H\}.$$

Sia $P = \|\pi_{i,j}\|$, $1 \leq i \leq t$ e $1 \leq j \leq s$, una matrice di morfismi di $\mathcal{F}$.

DEFINIZIONE 1. $\mathcal{F}_P(A) = \{f \text{ in } \mathcal{F}(A)^s : Pf = 0\}$.

DEFINIZIONE 2. P verifica il fenomeno di Hartogs in A , rispetto alla famiglia K_A e al fascio $\mathcal{F}$ (brevemente $P \in H(A, K_A, \mathcal{F})$), se:

per ogni K in K_A e per ogni f in $\mathcal{F}_P(A \sim K)$ esiste una sola F in $\mathcal{F}_P(A)$ tale che

$$F|_{(A \sim K)} = f^{(3)}.$$

F si dice la P -estensione di f .

LEMMA 1. Le seguenti proposizioni, $p_1)$ e $p_2)$, sono equivalenti:

$p_1)$ per ogni K in K_A , ogni f in $\mathcal{F}_P(A \sim K)$ che ammetta P -estensioni, ne ammette una sola;

$p_2)$ se w sta in $\mathcal{F}_H(A)^s$ e $Pw = 0$, allora $w = 0$.

$(^3)$ $F|_{(A \sim K)}$ è l'immagine, mediante l'omomorfismo di restrizione

$$r: \mathcal{F}(A) \rightarrow \mathcal{F}(A \sim K)$$

di F .

DIMOSTRAZIONE.

$p_1)$ *implica* $p_2)$: se $\text{supp}(w) \subset K$, con K in K_A , e se $Pw = 0$, lo zero di $\mathcal{F}_P(A \sim K)$ ammetterebbe come P -estensione anche la w .

$p_2)$ *implica* $p_1)$: due P -estensioni, F_1 e F_2 , della medesima f in $\mathcal{F}_P(A \sim K)$ darebbero $P(F_1 - F_2) = 0$ e $\text{supp}(F_1 - F_2) \subset K$.

A seguito del Lemma 1, si assume, d'ora in poi, che P verifichi questa ipotesi

(I) w in $\mathcal{F}_{H'}(X)^s$ e $Pw = 0$ implica $w = 0$,

dove H' è la famiglia di tutti i compatti di X .

TEOREMA 1. $\mathcal{F}$ sia un fascio soffice ⁽⁴⁾.

Le seguenti proposizioni, $p_1)$ e $p_2)$, sono equivalenti:

$p_1)$ $P \in H(A, K_A, \mathcal{F})$;

$p_2)$ P verifica queste ipotesi:

$f_1)$ per ogni w in $\mathcal{F}_H(A)^t$ per cui esiste una f in $\mathcal{F}(A)^s$ tale che

$$Pf = w$$

esiste pure una w' in $\mathcal{F}_H(A)^s$ tale che $Pw' = w$;

$f_2)$ se K sta in K_A , e $K \subset L_j$, e se la f di $\mathcal{F}_P(X \sim K)$ è tale che $f|_{(X \sim L_j)} = 0$, anche $f|_{(X \sim K)} = 0$.

DIMOSTRAZIONE.

$p_1)$ *implica* $p_2)$: per la $f_1)$ si ha: se $Pf = w$, $\text{supp}(w) \subset K$, e K sta in K_A , allora f sta in $\mathcal{F}_P(A \sim K)$; se F è la su P -estensione risulta

$$P(f - F) = w \quad \text{e} \quad \text{supp}(f - F) \subset K.$$

Per la $f_2)$ si ha: poichè $\mathcal{F}_P(X \sim K) \subset \mathcal{F}_P(A \sim K)$, se F è la P -estensione

⁽⁴⁾ Si intende che: se Z è un chiuso di A , la restrizione

$$r: \mathcal{F}(A) \rightarrow \mathcal{F}(Z) = \lim_{\rightarrow} \{\mathcal{F}(A), A \text{ in } F(Z)\}$$

dove $F(Z)$ è il filtro degli intorno aperti di Z , è suriettiva.

della f di $\mathcal{F}_P(X \sim K)$ in A , la G così definita

$$G = \begin{cases} F, & \text{in } A \\ f, & \text{in } X \sim K \end{cases}$$

ha supporto compatto contenuto in L_j e soddisfa l'equazione $PG = 0$; in virtù dell'ipotesi (I) su P , per cui P non ha radici compatte, risulta $G = 0$, ovvero $\bar{f}_{/(X \sim K)} = 0$.

$p_2)$ *implica* $p_1)$: sia f in $\mathcal{F}_P(A \sim K)$, e sia K_1 in K_A tale che $K \subset \overset{\circ}{K}_1$; ciò è possibile, in virtù delle proprietà della famiglia K_A . Visto che $\mathcal{F}$ è soffice, esiste $\bar{f}$ in $\mathcal{F}(A)$ tale che

$$\bar{f}_{/(A \sim \overset{\circ}{K}_1)} = f,$$

sicchè per la $\bar{f}$ si ha $P\bar{f} = w$, con $\text{supp}(w)$ in K_1 . In virtù dell'ipotesi $f_1)$ esiste una w' in $\mathcal{F}_H(A)^s$ tale che $Pw' = w$ e dunque

$$\bar{f} = w' + h$$

con h in $\mathcal{F}_P(A)$. La h coincide con la $\bar{f}$, e dunque con la f , in prossimità della frontiera di A , cioè in qualche $A \sim K_2$, con K_2 in K_A . Posto

$$G = \begin{cases} f - h, & \text{in } A \sim K \\ \text{zero}, & \text{in } X \sim A \end{cases}$$

per la G si ha: G sta in $\mathcal{F}_P(X \sim K)$ e risulta $G_{/(X \sim L_j)} = 0$, per qualche L_j . In virtù dell'ipotesi $f_2)$ risulta $G_{/(X \sim K)} = 0$, ovvero la h è la P -estensione della f .

La dimostrazione è conclusa.

OSSERVAZIONE 1. Se $\mathcal{G}$ è un prefascio su X , contenuto in $\mathcal{F}$, e se P è anche un morfismo di $\mathcal{G}^s$ in $\mathcal{G}^t$ allora è immediato verificare che: $P \in H(A, K_A, \mathcal{F})$ implica $P \in H(A, K_A, \mathcal{G})$ non appena $\mathcal{G}$ soddisfi questa ipotesi:

(B) f in $\mathcal{F}_P(A) \cap \mathcal{G}(A \sim K)^s$ implica f in $\mathcal{G}_P(A)$.

ESEMPIO. Se $\mathcal{D}'$ è il fascio delle distribuzioni su $X = \mathbb{R}^n$ in base a (1) ogni sottofascio $\mathcal{A}$, $\mathcal{E}$, e $\mathcal{I}^a$: rispettivamente il fascio delle funzioni analitiche reali, quello delle funzioni di classe C^∞ , ed il fascio

delle funzioni della d -esima classe di Gvrey, soddisfano la (B), quando P è un operatore differenziale lineare a coefficienti costanti, o un sistema di tali operatori verificanti l'ipotesi (I).

2. In questo paragrafo si applica il teorema precedente ai prefasci di distribuzioni su $X = R^n$, con $P = \|p_{i,j}\|$, $1 \leq i \leq t$ e $1 \leq j \leq s$, dove i $p_{i,j}$ sono operatori differenziali lineari, a coefficienti costanti.

Sia Q l'algebra dei polinomi in n indeterminate; $P: Q^s \rightarrow Q^t$ agisca così

$$P(q_1, \dots, q_s) = \sum_j p_{i,j} q_j, \quad 1 \leq i \leq t.$$

Posto, seguendo (8),

$$M = \text{cooker } ({}^tP) = Q^s / ({}^tPQ^t),$$

dove tP è la trasposta di P ; e posto anche che

$$(1) \quad 0 \leftarrow M \leftarrow Q^s \xleftarrow{{}^tP} Q^t \xleftarrow{{}^tP} Q^{t_1} \leftarrow \dots$$

sia la risoluzione (finita) di Hilbert di M , considerata la duale della (1), cioè la

$$(2) \quad 0 \rightarrow Q^s \xrightarrow{P} Q^t \xrightarrow{P} Q^{t_1} \rightarrow \dots$$

indicheremo con $\text{Ext}^p(M, Q)$ il p -esimo gruppo di coomologia della (2).

DEFINIZIONE 3. Il sistema differenziale P si dice *determinato* se $\text{Ext}^0(M, Q) = \ker(P) = 0$; si dice *sovradeterminato* se $\text{Ext}^0(M, Q) = \text{Ext}^1(M, Q) = \ker(P_1)/(PQ^s) = 0$.

Sia A un aperto connesso di R^n che ne contenga l'origine. Sia $\mathcal{F}$ un prefascio di distribuzioni che soddisfi le seguenti ipotesi:

$b_1)$ $\mathcal{F}(A)$ contiene una successione $n \rightarrow u_n$ di distribuzioni a supporto compatto tale che: $\text{supp}(u_n) \downarrow \{0\}$ e $\lim_n u_n = \delta$, dove δ è la misura di Dirac, e il limite è calcolato nello spazio delle distribuzioni a supporto compatto $\mathcal{E}'$;

$b_2)$ se w sta in $\mathcal{F}_{H'}(R^n)^t$, se u sta in $\mathcal{E}'(R^n)^s$ e se $Pu = w$, anche w sta in $\mathcal{F}(R^n)^t$;

b_3) la sequenza

$$\mathcal{F}(R^n)^s \xrightarrow{P} \mathcal{F}(R^n)^t \xrightarrow{P_1} \mathcal{F}(R^n)^{t_1}$$

è esatta.

Esempi di prefasci che soddisfano le b_1), b_2) e b_3) sono: il fascio $\mathcal{E}$ ed il prefascio delle distribuzioni di ordine finito $\mathcal{D}'_F$.

Sia Γ_A la famiglia di tutti i compatti convessi di A .

TEOREMA 2. *Sia un prefascio di distribuzioni che soddisfa le precedenti ipotesi b_1), b_2) e b_3).*

Se $P \in H(A, K_A, \mathcal{F})$ si ha:

- a) P è determinato;
- b) $P \in H(A, K_A \cup \Gamma_A, \mathcal{F})$;
- c) P è sovraterminato.

DIMOSTRAZIONE.

a) In virtù dell'ipotesi b_1) risulta $\mathcal{F}_H(A) \neq 0$. Se $(q_1, \dots, q_s)$ sta in $\ker(P)$, scelta la g in $\mathcal{F}_H(A)$ e posto

$$Z = (q_1 g, \dots, q_s g)$$

si ha $PZ = 0$, che è assurdo in base al Lemma 1.

b) Sia G un elemento di Γ_A , con $G \subset K$ e K in K_A . Se f sta in $\mathcal{F}_P(A \sim G) \cap \mathcal{F}_P(A \sim K)$, esiste una sola F in $\mathcal{F}_P(A)$ tale che $F|_{(A \sim K)} = f$. Ovvio che $(f - F)$ stia in $\mathcal{F}_P(A \sim G)$.

Sia $T = \{x \text{ in } R^n: x_n \leq d\}$; sia $G \subset T$ e siano:

$$A' = A \sim G;$$

$$A'_e = \{x \text{ in } A': x_n > d + e\}, \text{ con } e > 0; \text{ e}$$

$$G_0 = K \cap \{x \text{ in } A': x_n \geq d + e\}.$$

Poichè $(f - F)$ sta in $\mathcal{D}'(A')^s$ ed è nulla, e quindi analitica in $A'_e \sim G_0$, ed inoltre $P(f - F) = 0$ in A' , in base a (1) la $(f - F)$ risulta analitica su tutto A'_e , e dunque nulla. Al variare di T , la $(f - F)$ risulta nulla

su tutto $A \sim G$, e dunque la F è una P -estensione della f su A :

$$F|_{(A \sim G)} = f.$$

c) Sia $(q_1, \dots, q_t)$ in $\ker(P_1)$. Considerata la successione delle u_n , di cui all'ipotesi b_1), per la successione

$$(q_1 u_n, \dots, q_t u_n)$$

si ha, in base all'ipotesi b_3): esiste $(v_1^n, \dots, v_s^n)$ in $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)^s$ tale che

$$\sum_j p_{i,j} v_j^n = q_i u_n, \quad 1 \leq i \leq t;$$

in virtù della f_2) del Teorema 1 (per la validità della quale non è necessario nè che $\mathcal{F}$ sia soffice, nè che sia un fascio), esiste $(w_1^n, \dots, w_s^n)$ in $\mathcal{F}_H(A)^s$ per cui si ha, ancora

$$\sum_j p_{i,j} w_j^n = q_i u_n, \quad 1 \leq i \leq t.$$

Se Δ è un minore di P , d'ordine s , con $\det(\Delta) = D \neq 0$ (esiste, visto che P è determinato), risulta $Dw_j^n = R_j(u_n)$, sicchè si può supporre che il $\text{supp}(w_j^n)$ sia contenuto nel $\text{supp}(u_n)$. Ora, se f sta in $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ e se ${}^t Dg = f$, con g in $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$, si ha

$$\lim_n \langle w_j^n, f \rangle = \lim_n \langle Dw_j^n, g \rangle = \lim_n \langle R_j(u_n), g \rangle = \langle R_j(\delta), g \rangle,$$

così che la successione delle w_j^n converge, in $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, verso la r_j . Ovvio che $\text{supp}(r_j) \downarrow \{0\}$, e dunque, con la trasformata di Fourier, si ottiene

$$\sum_j p_{i,j}(x) r_j(x) = q_i(x), \quad 1 \leq i \leq t.$$

Ciò dimostra che $PQ^s = \ker(P_1)$, ovvero che $\text{Ext}^1(M, Q) = 0$.

La dimostrazione è conclusa.

TEOREMA 3. *Sia $\mathcal{F}$ un fascio soffice di distribuzioni, che soddisfa le ipotesi $b_1)$, $b_2)$ e $b_3)$.*

Le seguenti proposizioni, p_1 e p_2), sono equivalenti:

$p_1)$ $P \in H(A, K_A, \mathcal{F})$;

$p_2)$ P soddisfa l'ipotesi f_2) del Teorema 1; inoltre $\text{Ext}^1(M, Q) = 0$.

DIMOSTRAZIONE.

$p_1)$ *implica* $p_2)$: è conseguenza del Teorema 1 e del Teorema 2.

$p_2)$ *implica* $p_1)$: basta provare che P soddisfa l'ipotesi f_1) del Teorema 1.

Sia, dunque, w in $\mathcal{F}_H(A)^t$ e sia $Pf = w$, con f in $\mathcal{F}(A)^s$. Ovvio che w stia in $\ker(P_1)$, sicchè, in base all'ipotesi b_3) si può supporre, direttamente, che la f stia in $\mathcal{F}(R^n)^s$. Sia G_0 la copertura convessa del $\text{supp}(w)$; si ha: f sta in $\mathcal{F}_P(R^n \sim G_0)$; in virtù del Coroll. 3 di (8), pag. 394, esiste una F in $\mathcal{D}'_P(R^n)$ tale che

$$F / (R^n \sim G_0) = f.$$

Poichè $P(f - F) = w$ e $\text{supp}(f - F)$ è compatto, in virtù dell'ipotesi b_2) si ha che $(f - F)$ sta in $\mathcal{F}(R^n)$, e dunque anche la F vi sta. Per l'ipotesi f_2), il $\text{supp}(f - F)$ deve stare in A .

La dimostrazione è conclusa.

Il prossimo teorema mostra la rilevanza della famiglia di compatti K_A nello studio del fenomeno di Hartogs per il sistema differenziale P .

P sia del tipo $P = \|p_{i,1}\|$, con $i \geq 2$; gli operatori $p_{i,1}$ siano omogenei. Per questo tipo di sistemi differenziali vale il

TEOREMA 4. *Le seguenti proposizioni, p_1) e p_2), sono e equivalenti:*

$p_1)$ P è ellittico e $P \in H(A, K_A, \mathcal{E})$;

$p_2)$ $P \in H(A, H_A, \mathcal{E})$, dove H_A è la famiglia di tutti i compatti di A che hanno complementare connesso.

DIMOSTRAZIONE.

$p_1)$ *implica* $p_2)$: l'ellitticità di P implica che è soddisfatta l'ipotesi f_2) del Teorema 1 relativamente alla famiglia H_A ; che sia soddisfatta anche la f_1) dipende da $P \in H(A, K_A, \mathcal{E})$.

$p_2)$ *implica* $p_1)$: supponiamo d'aver dimostrato che se P non è ellittico esiste un vettore $N = (0, \dots, 0, 1)$ per cui si ha $P_{i,1}(N) = 0$,

$i \geq 2$. Allora si può concludere così: sia K definito da

$$K = \{x \text{ in } A : a \leq |x| \leq b \text{ e } x_n > 0\};$$

scelta la f in $C^\infty(\mathbf{R})$ in modo che $f(t) > 0$, se $t > 0$, $f(t) = 0$, se $t < 0$, per la funzione

$$u(x) = \begin{cases} f(\langle x, N \rangle), & \text{se } |x| \leq a \\ \text{zero}, & \text{se } x \in R^n \sim K_1 \end{cases}$$

dove $K_1 = \{x \text{ in } R^n : |x| \leq b \text{ e } x_n \geq 0\}$, si ha: u sta in $\mathcal{E}_P(R^n \sim K)$, $u|_{(R^n \sim L_j)} = 0$, se $L \subset K_1$, ma $u(x) \neq 0$; ciò implica che P non verifica l'ipotesi f_2) relativamente alla famiglia H_A , il che è assurdo. Dunque P deve essere ellittico, sicché soddisfa l'ipotesi f_2) rispetto ad ogni famiglia K_A , ed inoltre, per l'ipotesi, P verifica anche la f_1) del Teorema 1.

Per concludere: se $\deg(p_{i,1}) = n_i \geq 1$; se m è il minimo comune multiplo degli n_i , il polinomio

$$p = \sum_i (p_{i,1} \bar{p}_{i,1})^{(m/n_i)},$$

dove $\bar{p}_{i,1}$ è il coniugato di $p_{i,1}$, è somma di quadrati di grado m , e quindi ha come caratteristiche reali solo quelle comuni ad ogni $p_{i,1}$; se P non è ellittico, nemmeno p lo è.

La dimostrazione è conclusa.

OSSERVAZIONE 2.

In base al teorema precedente si ha: se $P = \|D_{x_i}\|$, $1 \leq i \leq n$, P verifica il fenomeno di Hartogs

$$H(R^{n+1}, K_{R^{n+1}}, \mathcal{E}),$$

dove $K_{R^{n+1}}$ è la famiglia delle sfere di R^{n+1} , di centro 0 e raggio qualunque, ma non soddisfa il fenomeno di Hartogs

$$H(R^{n+1}, H_{R^{n+1}}, \mathcal{E})$$

poiché P non è ellittico.

3. In base ai risultati di (6) è possibile dare un'interpretazione coomologica dei Teoremi 2 e 3 relativamente ai fasci di iperfunzioni.

Sia A un aperto convesso di R^n ; sia P una matrice differenziale, e sia $\mathcal{B}$ un fascio sofficie di iperfunzioni su R^n che soddisfa queste ipotesi

$F_1)$ $\Gamma_*(R^n, \mathcal{B}_P) = 0$, cioè l'equazione $Pu = 0$ non ha soluzioni, con supporto compatto, in $\mathcal{B}$;

$F_2)$ $H^1(R^n, \mathcal{B}_P) = 0$.

TEOREMA 5. *Le seguenti proposizioni, $p_1)$, $p_2)$ e $p_3)$, sono equivalenti:*

$p_1)$ $P \in H(A, K_A, \mathcal{B})$;

$p_2)$ P verifica l'ipotesi $f_2)$, relativamente alla famiglia K_A , del Teorema 1; inoltre per ogni G in Γ_A , si ha

$$H_G^1(A, \mathcal{B}_P) = 0;$$

$p_3)$ per ogni K in K_A si ha

$$H_K^1(A, \mathcal{B}_P) = 0.$$

DIMOSTRAZIONE.

$p_3)$ implica $p_1)$: in base al teorema di excisione, e vista l'ipotesi $F_1)$, la sequenza

$$0 \rightarrow H^0(A, \mathcal{B}_P) \rightarrow H^0(A \sim K, \mathcal{B}_P) \rightarrow 0$$

è esatta; dunque $P \in H(A, K_A, \mathcal{B})$.

$p_1)$ implica $p_2)$: incominciamo col dimostrare che P verifica l'ipotesi $f_2)$ del Teorema 1 relativamente alla famiglia Γ_A :

Sia G_0 in Γ_A ; sia f in $\mathcal{B}_P(R^n \sim G_0)$ e sia $f|_{(R^n \sim L_j)} = 0$.

Sia F l'iperfunzione su R^n tale che

$$F|_{(R^n \sim G_0)} = f;$$

ovvio che $\text{supp}(F) \subset L_j$ e che se $PF = w$, $\text{supp}(w) \subset G_0$. Dimostriamo che anche $\text{supp}(F) \subset G_0$.

Sia $\mathcal{A}(G_0)$ lo spazio delle funzioni analitiche su G_0 e $\mathcal{A}'(G_0)$ il suo duale; se si dimostra che w sta in $P(\mathcal{A}'(G_0))$, che è chiuso in $\mathcal{A}'(G_0)$, per la convessità di G_0 , in virtù della F_1 , $\text{supp}(F) \subset G_0$. In base al Teorema di Hahn-Banach, se così non fosse, esisterebbe una f in $\mathcal{A}(G_0)$ tale che $\langle w, f \rangle = 1$ e ${}^tPf = 0$. Sia V un intorno convesso, in R^{2n} , sul quale la f si prolunga, nella f_0 , come funzione olomorfa, che ancora soddisfa, su V , l'equazione $Pf = 0$. Se $S = \{{}^tP, \bar{\partial}\}$, dove $\bar{\partial}$ è il sistema di Cauchy-Riemann, in base al Th. 3 di (8), pag. 305, la restrizione

$$r: \mathbb{C}_s^\infty(R^n) \rightarrow \mathbb{C}_s^\infty(V)$$

ha immagine densa, così che

$$\langle w, f \rangle = \langle w, f_0 \rangle = \lim_n \langle w, f_n \rangle = \lim_n \langle (PF), f_n \rangle = \lim_n \langle F, {}^tPf_n \rangle = 0,$$

se $\lim_n f_n = f_0$ in $\mathcal{A}(G_0)$.

Ciò dimostra che $P \in H(A, \Gamma_A, \mathcal{B})$. Ancora in base al teorema di excisione, ed in base all'ipotesi F_2 , la sequenza

$$0 \rightarrow H^0(A, \mathcal{B}_p) \xrightarrow{a} H^0(A \sim G, \mathcal{B}_p) \xrightarrow{b} H^1_\delta(A, \mathcal{B}_p) \rightarrow 0$$

è esatta per ogni G in Γ_A ; poichè a è suriettiva, deve essere $b = 0$, e dunque $H^1_\delta(A, \mathcal{B}_p) = 0$.

p_2) *implica* p_3): sia K un compatto di K_A e sia G in Γ_A con $K \subset G$. Il seguente diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & H^0(A, \mathcal{B}_p) & \xrightarrow{a} & H^0(A \sim K, \mathcal{B}_p) & \xrightarrow{b} & H^1_K(A, \mathcal{B}_p) \rightarrow 0 \\ & & \downarrow j & & \downarrow r & & \\ 0 & \rightarrow & H^0(A, \mathcal{B}_p) & \xrightarrow{a'} & H^0(A \sim G, \mathcal{B}_p) & \rightarrow & 0 \end{array}$$

dove j è l'identità e r è la restrizione canonica, che è iniettiva in virtù dell'ipotesi f_2) ⁽⁵⁾, è tale che a' è suriettiva e la prima riga è esatta. Ora, se f sta in $H^0(A \sim K, \mathcal{B}_p)$ esiste g in $H^0(A, \mathcal{B}_p)$ tale che

$$a'(j(g)) = r(f),$$

⁽⁵⁾ Infatti, se $r(f) = 0$ posto $F = f$, in $A \sim K$, e $F = 0$, in $R^n \sim A$, risulta che G sta in $\mathcal{B}_p(R^n \sim K)$ e $G/R^n \sim L_j = 0$, se L_j contiene G .

e dunque $r(a(g)) = r(f)$, cioè $a(g) = f$. Ciò dimostra che la a è suriettiva, quindi $b = 0$, ovvero $H_X^1(A, \mathcal{B}_P) = 0$.

La dimostrazione è conclusa.

BIBLIOGRAFIA

- [1] J. BOMAN, *Propagation of analyticity of solutions of differential equations*, Ark. Math., **5** (1964), pp. 271-279.
- [2] G. BRATTI, *A proposito di un esempio di Fichera relativo al fenomeno di Hartogs*, Rend. Acc. Naz. delle Scienze, Serie V, Vol. X, Parte I, (1986), pp. 241-246.
- [3] L. EHERENPREIS, *A new proof and extension of Hartogs theorem*, Bull. Amer. Math. Soc., **67** (1961), pp. 507-509.
- [4] G. FICHERA, *Sul fenomeno di Hartogs per gli operatori lineari alle derivate parziali*, Ist. Lomb. (Rend. Sc.), A-**117** (1983), pp. 199-211.
- [5] A. KANEKO, *Note on continuation of real analytic solutions of partial differential equations with constant coefficients*, Proc. Jap. Acad., **51** (1975), pp. 262-265.
- [6] H. KOMATSU, *Relative cohomology of sheaves of solutions of differential equations*, Lect. Notes in Math., **287** (1973), pp. 193-261.
- [7] B. MALGRANGE, *Système différentiels à coefficients constant*, Séminaire Bourbaki, **15**, No. 246, (1962-1963).
- [8] V. P. PALAMODOV, *Linear differential operators with constant coefficients*, Springer-Verlag, 1970.
- [9] F. SEVERI, *Una proprietà fondamentale dei campi di olomorfismo di una funzione analitica di una variabile reale e di una variabile complessa*, Rend. della Reale Accademia Nazionale dei Lincei, Vol. XV, (1932), pp. 487-490.

Manoscritto pervenuto in redazione il 28 gennaio 1987.