

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

EPIFANIO G. VIRGA

GIANFRANCO CAPRIZ

Un teorema di unicità in viscoelasticità lineare

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 79 (1988), p. 15-24

[<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1988__79__15_0>](http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1988__79__15_0)

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1988, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Un teorema di unicità in viscoelasticità lineare.

EPIFANIO G. VIRGA - GIANFRANCO CAPRIZ (*)

RIASSUNTO - Si prova un teorema di unicità della soluzione del problema dinamico lineare unidimensionale di posto per un corpo viscoelastico omogeneo. Ci si discosta dalla tradizione perché *non* si ricorre alla ipotesi di quasistaticità (come, invece, in un contesto per altri versi molto più generale, si fa ad esempio in [1] e [2]), né si suppongono assegnati dati storici (come, invece, si suppone ad esempio in [3] e [4]).

SUMMARY - A uniqueness theorem is proved for the linear, one-dimensional, dynamic problem of place for a homogeneous viscoelastic body. The proof is given without recourse to the hypothesis of quasi-static behaviour (as, for instance, in [1] and [2]); also no historical data are presumed known (as, for instance, in [3] and [4]), but rather a certain asymptotic behaviour of the solution is assumed.

1. Enunciato del teorema.

Coll'uso di notazioni tradizionali (u spostamento; ρ densità; G , funzione di rilassamento), l'equazione unidimensionale del moto per un corpo viscoelastico omogeneo in assenza di forze di massa si scrive

$$(1) \quad -\rho u_{tt}(x, t) + G(0)u_{xx}(x, t) + \int_{-\infty}^t G(t-s)u_{xx}(x, s)ds = 0.$$

La variabile x si riterrà qui che cada nell'intervallo $[0, l]$, dove l è la dimensione del corpo (lunghezza se un filo, spessore se uno strato),

(*) Indirizzo degli AA.: E. G. VIRGA: Facoltà di Ingegneria, Università di Pisa; G. CAPRIZ: Dipartimento di Matematica, Università di Pisa.

mentre il tempo t s'intenderà variabile in $(-\infty, 0)$, l'estremo destro essendo scelto, in via puramente convenzionale, come origine dei tempi.

Per quanto riguarda la funzione di rilassamento $G(s)$ si supporrà che sia di classe C^2 in $[0, +\infty)$, ivi a valori positivi ed estremo superiore finito.

Siamo interessati a soluzioni $u(x, t)$ di (1) a valori reali, definite sulla semistriscia

$$\Sigma := \{(x, t) : x \in [0, l], t \in (-\infty, 0)\},$$

ivi di classe C^2 e soddisfacenti a condizioni omogenee di posto

$$(2) \quad u(0, t) = u(l, t) = 0, \quad \forall t \in (-\infty, 0).$$

Le condizioni (1), (2) sono nettamente insufficienti a rendere determinato il nostro problema; bisogna aggiungere qualche restrizione su u , che prenda qui le veci delle ulteriori condizioni che sono sempre presenti nei problemi di moto tradizionali: le condizioni iniziali. È ovvio pensare a restrizioni sul comportamento asintotico di u per $t \rightarrow -\infty$.

Conviene allora premettere alla formulazione del problema ed all'enunciato del teorema la definizione di alcune classi di funzioni.

Dato un numero reale positivo ε , siano

$$\begin{aligned} U_\varepsilon &:= \left\{ u \in C(\Sigma) \mid \sup_{\Sigma} e^{-\varepsilon t} |u(x, t)| < +\infty \right\}, \\ V_\varepsilon &:= \left\{ v \in C(-\infty, 0) \mid \sup_{(-\infty, 0)} e^{-\varepsilon t} |v(t)| < +\infty \right\}, \\ V'_\varepsilon &:= \left\{ v \in C(0, +\infty) \mid \int_0^{+\infty} |v(t)| e^{-\varepsilon t} dt < +\infty \right\}. \end{aligned}$$

U_ε , V_ε e V'_ε sono spazi di Banach, rispettivamente con le norme

$$\|u\|_\varepsilon := \sup_{\Sigma} e^{-\varepsilon t} |u(x, t)|, \quad \|v\|_\varepsilon := \sup_{(-\infty, 0)} e^{-\varepsilon t} |v(t)|, \quad \|v\|'_\varepsilon := \int_0^{+\infty} |v(t)| e^{-\varepsilon t} dt.$$

Si ponga allora il problema:

PROBLEMA 1. *Determinare una u di classe $C^2(\Sigma)$ che sia soluzione di (1), (2) e tale che esista un $\varepsilon > 0$ per cui*

$$(3) \quad u \in U_\varepsilon, \quad u_t \in U_\varepsilon.$$

Sussiste il teorema

TEOREMA 1. *Se $\dot{G}$ e $\ddot{G}$ appartengono a V'_ε ed inoltre*

$$(4) \quad G(0) > \int_0^{+\infty} |\dot{G}(\tau)| e^{-\varepsilon\tau} d\tau + \frac{1}{\varepsilon} \left(|\dot{G}(0)| + \int_0^{+\infty} |\ddot{G}(\tau)| e^{-\varepsilon\tau} d\tau \right),$$

allora il Problema 1 ammette solo la soluzione identicamente nulla.

La disuguaglianza (4) in sostanza richiede alla risposta elastica istantanea di prevalere su quella ritardata. In particolare, quando $\dot{G} \equiv 0$, dal teorema si può trarre una proprietà di unicità di certe soluzioni dell'equazione delle onde.

La dimostrazione del Teorema 1 si basa su una proprietà elementare espressa dal seguente lemma.

LEMMA. *Se $f \in V_\varepsilon$, l'equazione differenziale*

$$(5) \quad \alpha^2 \ddot{v}(t) + \beta^2 v(t) = f(t), \quad t \in (-\infty, 0),$$

(ove α, β sono reali non nulli) ha una sola soluzione di classe C^2 tale che $v, \dot{v} \in V_\varepsilon$, cioè

$$(6) \quad v(t) = \frac{1}{\alpha\beta} \int_{-\infty}^t \sin \frac{\beta}{\alpha} (t - \tau) f(\tau) d\tau.$$

Infatti, comunque si scelga s in $(-\infty, 0)$, l'integrale generale della (5) ammette la rappresentazione

$$(7) \quad v(t) = v(s) \cos \frac{\beta}{\alpha} (t - s) + \frac{\alpha}{\beta} \dot{v}(s) \sin \frac{\beta}{\alpha} (t - s) + \\ + \frac{1}{\alpha\beta} \int_s^t f(\tau) \sin \frac{\beta}{\alpha} (t - \tau) d\tau.$$

D'altra parte, poiché $f \in V_\varepsilon$, l'integrale al membro destro della (7) è convergente per $s \rightarrow -\infty$ uniformemente rispetto a t ; si può dunque, nella (7), passare al limite per $s \rightarrow -\infty$, sfruttare l'ipotesi che $v, \dot{v} \in V_\varepsilon$ ed assicurarsi così della convergenza, uniforme in t , del membro destro della (7) al membro destro della (6).

La ipotesi fatta su f assicura anche la regolarità e l'andamento asintotico richiesti per la soluzione.

OSSERVAZIONE 1. Nell'enunciare il lemma si è esagerato in ipotesi dato che il loro soddisfacimento è assicurato senza aggravii nella particolare applicazione che si fa di seguito del lemma stesso. In sé la (6) è l'unica soluzione di (5) anche se soltanto $v(t)$ è (di classe C^2 e) infinitesima per $t \rightarrow -\infty$, e $\dot{v}(t)$ ammette limite per $t \rightarrow -\infty$. Su f basterebbe fare l'ipotesi di assoluta integrabilità in $(-\infty, 0)$.

2. Dimostrazione del Teorema.

Per ogni $t \in (-\infty, 0)$, indichiamo con $\bar{u}(x, t)$ l'estensione con legge dispari all'intervallo $[-l, 0]$ di una qualunque funzione $u \in C^2(\Sigma)$ che sia nulla per $x = 0$ e $x = l$:

$$(8) \quad \begin{aligned} \bar{u}(x, t) &:= u(x, t), & x \in [0, l]; \\ \bar{u}(x, t) &:= -u(-x, t), & x \in [-l, 0]. \end{aligned}$$

La funzione $\bar{u}$ è di classe C^2 in $\bar{\Sigma} := \{(x, t): x \in [-l, l] \setminus \{0\}, t \in (-\infty, 0)\}$ e risolve in $\bar{\Sigma}$ l'equazione

$$(9) \quad G(0) \bar{u}_{xx}(x, t) + \int_{-\infty}^t \dot{G}(t - \tau) \bar{u}_{xx}(x, \tau) d\tau - \rho \bar{u}_{tt}(x, t) = 0.$$

con le condizioni

$$(10) \quad \bar{u}(-l, t) = \bar{u}(0, t) = \bar{u}(l, t) = 0, \quad \forall t \in (-\infty, 0).$$

Indichiamo con $v_n(t)$, $n = 1, 2, \dots$, i coefficienti di Fourier non nulli di $\bar{u}$:

$$(11) \quad v_n(t) := \frac{2}{l} \int_0^l u(x, t) \sin \frac{n\pi x}{l} dx, \quad t \in (-\infty, 0);$$

v_n è di classe C^2 in $(-\infty, 0)$ per ogni n . Inoltre, se $u, u_t \in U_\varepsilon$, si con-

stata che $v, \dot{v} \in V_\varepsilon$. Calcoliamo per ogni t i coefficienti di Fourier della funzione di $L^2(-l, l)$ al primo membro della (9). Applicando (8) e (11), risulta che $\bar{u}$ soddisfa a (9) e (10) se e solo se le funzioni $v_n(t)$ risolvono

$$\varrho \left(\frac{l}{n\pi} \right)^2 \ddot{v}_n(t) + G(0) v_n(t) = - \int_{-\infty}^t \dot{G}(t-\tau) v_n(\tau) d\tau, \quad t \in (-\infty, 0),$$

per ogni $n = 1, 2, \dots$

Posto

$$\alpha := \frac{l\sqrt{\varrho}}{n\pi}, \quad \beta := \sqrt{G(0)}, \quad f(t) := - \int_{-\infty}^t \dot{G}(t-\tau) v_n(\tau) d\tau,$$

è semplice riconoscere che ricorrono le ipotesi del lemma; pertanto

$$(12) \quad v_n(t) = - \frac{\lambda_n}{G(0)} \int_{-\infty}^t d\sigma \sin \lambda_n(t-\sigma) \int_{-\infty}^{\sigma} \dot{G}(\sigma-\tau) v_n(\tau) d\tau,$$

con

$$\lambda_n = \frac{n\pi}{l} \sqrt{\frac{G(0)}{\varrho}}.$$

Se $\ddot{G} \in V'_\varepsilon$, al secondo membro di (12) si può integrare per parti rispetto a σ ; si ottiene

$$(13) \quad v_n = \mathcal{F}_n[v_n],$$

dove, per ogni n , $\mathcal{F}_n$ è l'operatore lineare di V_ε

$$(14) \quad \mathcal{F}_n[v] := \frac{1}{G(0)} \left\{ - \int_{-\infty}^t \dot{G}(t-\tau) v(\tau) d\tau + \dot{G}(0) \int_{-\infty}^t \cos \lambda_n(t-\tau) v(\tau) d\tau + \right. \\ \left. + \int_{-\infty}^t d\sigma \cos \lambda_n(t-\sigma) \int_{-\infty}^{\sigma} \ddot{G}(\sigma-\tau) v(\tau) d\tau \right\}.$$

Poiché dalla (14) segue facilmente che per ogni $t \in (-\infty, 0)$

$$e^{-\varepsilon t} |\mathcal{F}_n[v]| \leq \frac{1}{G(0)} \left\{ \int_0^{+\infty} |\dot{G}(\tau)| e^{-\varepsilon \tau} d\tau + \right. \\ \left. + \left(|\dot{G}(0)| + \int_0^{+\infty} |\ddot{G}(\tau)| e^{-\varepsilon \tau} d\tau \right) \int_0^{+\infty} e^{-\varepsilon \tau} |\cos \lambda_n(t - \tau)| d\tau \right\} \|v\|_\varepsilon,$$

si ha che, per ogni n , $\mathcal{F}_n$ è una contrazione dello spazio V_ε , se vale la (4). Ciò conclude la prova del teorema perché se ne può trarre che per ogni n la (13) ha la sola soluzione $v_n \equiv 0$.

Val la pena di osservare che, nell'approssimazione quasi-statica, l'equazione (1) diviene

$$(15) \quad G(0)u_{xx}(x, t) + \int_{-\infty}^t \dot{G}(t - \tau) u_{xx}(x, \tau) d\tau = 0;$$

allora l'analogo del Problema 1 è il problema:

PROBLEMA 2. *Determinare $u \in C(\Sigma)$ con $u_x, u_{xx} \in C(\Sigma)$ che risolva (15) e (2).*

Siano U_0 , V_0 e V'_0 le classi di funzioni

$$U_0 := \left\{ u \in C(\Sigma) \mid \sup_{\Sigma} |u(x, t)| < +\infty \right\}, \\ V_0 := \left\{ v \in C(-\infty, 0) \mid \sup_{(-\infty, 0)} |v(t)| < +\infty \right\}, \\ V'_0 := \left\{ v \in C(0, +\infty) \mid \int_0^{+\infty} |v(\tau)| d\tau < +\infty \right\};$$

vale il teorema:

TEOREMA 2. *Se $\dot{G} \in V'_0$ e*

$$(16) \quad G(0) > \int_0^{+\infty} |\dot{G}(\tau)| d\tau$$

il Problema 2 ammette in U_0 la sola soluzione $u \equiv 0$.

DIMOSTRAZIONE. Si definiscano le funzioni $\bar{u}(x, t)$ e $v_n \in V_0$ come nella dimostrazione del Teorema 1. Per ogni $n = 1, 2, \dots$ si ha

$$(17) \quad v_n(t) = -\frac{1}{G(0)} \int_{-\infty}^t \dot{G}(t-\tau) v_n(\tau) d\tau, \quad t \in (-\infty, 0),$$

da cui

$$|v_n(t)| \leq \left(\frac{1}{G(0)} \int_0^{+\infty} |\dot{G}(\tau)| d\tau \right) \sup |v_n(t)|, \quad \forall t \in (-\infty, 0).$$

Pertanto se vale la (16), l'equazione (17) ha la sola soluzione $v_n \equiv 0$, per ogni $n = 1, 2, \dots$

OSSERVAZIONE 2. Si prova facilmente che in U_ε il Problema 2 ha la sola soluzione identicamente nulla anche se $\dot{G} \notin V'_0$, ma $\dot{G} \in V'_\varepsilon$ per qualche $\varepsilon > 0$, purché G sia tale che

$$(18) \quad G(0) > \int_0^{+\infty} |\dot{G}(\tau)| e^{-\varepsilon\tau} d\tau \quad (1).$$

I risultati di unicità per le equazioni (1) e (15) illustrati in questo paragrafo sussistono senza alcuna altra condizione per la funzione G che l'appartenenza di $\dot{G}$ e $\ddot{G}$ a qualche classe V'_ε , se si suppone che esista $T < 0$ tale che per $t \in (-\infty, T)$ sia

$$(19) \quad u(x, t) = 0, \quad \forall x \in [0, l].$$

Infatti, per la (19), $u \in U_\varepsilon$ per ogni $\varepsilon > 0$, e, per ε sufficientemente grande, la (4) è certamente soddisfatta da qualunque G , poiché $G(0) > 0$ ed il secondo membro di (4) decresce a zero quando $\varepsilon \rightarrow +\infty$. Il medesimo argomento si applica alla disuguaglianza (18), ove peraltro è sufficiente che $G \in V'_\varepsilon$ per qualche $\varepsilon > 0$.

(1) Per cortese informazione di A. Morro, apprendiamo che questo risultato è contenuto in una comunicazione privata di G. Fichera.

3. Alcune applicazioni.

In [5] abbiamo considerato il Problema 1 per l'equazione di moto (1) in cui la densità sia moltiplicata per un parametro di perturbazione. Abbiamo dato, per la funzione G , delle condizioni sufficienti perché il problema dinamico ammetta anche soluzioni non nulle in una classe $\mathcal{U}_\varepsilon$ con ε dello stesso ordine del parametro perturbativo. In particolare, abbiamo trovato che entrambe le seguenti scelte di G

$$(20) \quad G(s) = G_0(1 - 2\mu s e^{-\mu s}), \quad \text{con } G_0, \mu > 0,$$

$$(21) \quad G(s) = G_\infty + (G_\infty + 2G_0)e^{-2\mu s} - (2G_\infty + G_0)e^{-\mu s},$$

$$\text{con } 4G_\infty > G_0 > 0, \quad \mu > 0,$$

possono condurre a casi di non unicità. Disponendo ora della condizione (4) per l'unicità di soluzione del problema di moto in una qualunque classe $\mathcal{U}_\varepsilon$, appare interessante applicarla alle funzioni di rilassamento (20) e (21).

Posto $\xi := \varepsilon/\mu$, per (20) e (21) la (4) si traduce, rispettivamente, nelle disuguaglianze

$$(22) \quad f_i(\xi) < 1, \quad i = 1, 2,$$

con

$$(23) \quad f_1(\xi) := \frac{2}{(1 + \xi)^2} \left\{ \xi + 2(1 + e^{-(\xi+1)}) + \frac{1}{\xi}(1 + 2e^{-2(\xi+1)}) \right\} - \frac{2}{\xi},$$

ed

$$(24) \quad f_2(\xi) := \frac{2(\gamma + 2)}{\xi + 2} \left[1 - 2 \left(\frac{2\gamma + 1}{2(\gamma + 2)} \right)^{\xi+2} \right] -$$

$$- \frac{2\gamma + 1}{\xi + 1} \left[1 - 2 \left(\frac{2\gamma + 1}{2(\gamma + 2)} \right)^{\xi+1} \right] +$$

$$+ \frac{1}{\xi} \left\{ 3 + \frac{4(\gamma + 2)}{\xi + 2} \left[1 - 2 \left(\frac{2\gamma + 1}{4(\gamma + 2)} \right)^{\xi+2} \right] - \right.$$

$$\left. - \frac{2\gamma + 1}{\xi + 1} \left[1 - 2 \left(\frac{2\gamma + 1}{4(\gamma + 2)} \right)^{\xi+1} \right] \right\}, \quad \gamma = G_\infty/G_0.$$

Le funzioni f_i sono entrambe monotone decrescenti da $+\infty$ a 0 quando ξ cresce da 0 a $+\infty$ e sono di conseguenza minori di 1 a partire da un valore ξ_i opportuno. Calcoli numerici approssimati indicano che $\xi_1 \approx 4$, mentre ξ_2 dipende dalla scelta di γ (ad es., $\xi_2 \approx 6$ per $\gamma = \frac{1}{2}$).

Ciò prova che quando la funzione G è data da (20) o da (21), fissato comunque $\varepsilon > 0$, il problema di moto ha una sola soluzione in U_ε , se il tempo di rilassamento μ è sufficientemente piccolo:

$$(25) \quad 0 < \mu < \varepsilon/\xi_i.$$

D'altra parte, per il problema quasi-statico è noto da [2] e [5] che le funzioni di rilassamento (20) e (21) danno origine a casi di non unicità nella classe delle soluzioni limitate.

Concordemente, la (16) è violata per ogni valore di μ , come facilmente si verifica.

Osserviamo infine che nonostante la (25) assicuri l'unicità della soluzione in U_ε al problema dinamico quando G è data da (20) o (21), le funzioni (20) e (21) non verificano per nessun valore di μ la condizione

$$\Gamma(\omega) := \int_0^{+\infty} \dot{G}(s) \sin \omega s \, ds \leq 0 \quad \forall \omega \geq 0,$$

che è richiesta dalla seconda legge della termodinamica (v. [6], [7] e [8], [9]). Infatti, semplici calcoli mostrano che la funzione $\Gamma(\omega)$ è alternativamente data da

$$\Gamma(\omega) = 2G_0\mu \frac{\omega(\omega^2 - \mu^2)}{(\omega^2 + \mu^2)^2},$$

o

$$\Gamma(\omega) = \frac{3\mu\omega}{(\omega^2 + 4\mu^2)(\omega^2 + \mu^2)} (G_0\omega^2 - 2G_\infty\mu^2),$$

quando G ha, rispettivamente, la forma (20) o (21).

BIBLIOGRAFIA

- [1] G. FICHERA, *Avere una memoria tenace crea gravi problemi*, Arch. Rational Mech. Anal., **70** (1979), pp. 101-112.
- [2] G. FICHERA, *Sul principio della memoria evanescente*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, **68** (1982), pp. 245-259.
- [3] C. M. DAFERMOS, *Asymptotic stability in viscoelasticity*, Arch. Rational Mech. Anal., **37** (1970), pp. 297-308.
- [4] C. M. DAFERMOS, *An abstract Volterra equation with applications to linear viscoelasticity*, J. Diff. Eq., **7** (1970), pp. 554-569.
- [5] G. CAPRIZ - E. G. VIRGA, *Esempi di non-unicità in viscoelasticità lineare*, Atti Accad. Sc. Torino, Suppl. **120** (1986), pp. 81-86.
- [6] D. GRAFFI, *Sopra alcuni fenomeni ereditari dell'elettrologia*, Rend. Istit. Lombardo Scienze Lettere, **68-69** (1936), pp. 124-139.
- [7] D. GRAFFI, *On the fading memory*, Applicable Analysis, **15** (1983), pp. 295-311.
- [8] M. FABRIZIO - A. MORRO, *Thermodynamic restrictions on relaxation functions in linear viscoelasticity*, Mech. Res. Comm., **12** (1985), pp. 101-105.
- [9] A. MORRO, *Constitutive relations in thermoviscoelasticity*, Atti del Convegno di Termoelasticità Finita, Accademia Nazionale dei Lincei, Roma, 1985.

Manoscritto pervenuto in redazione il 16 novembre 1986.