

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

ANNA MARIA BRESQUAR

**Sulla risoluzione asintotica dell'equazione $y' = A(t)y$,
con $A(t)$ matrice 2×2 , nel caso oscillante. - II**

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 75 (1986), p. 173-190

[<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1986__75__173_0>](http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1986__75__173_0)

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1986, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

Sulla risoluzione asintotica dell'equazione $y' = A(t)y$, con $A(t)$ matrice 2×2 , nel caso oscillante. - II.

ANNA MARIA BRESQUAR (*)

SUMMARY - A previous paper on asymptotical solution of oscillatory systems of two first order linear differential equations is continued; asymptotic value of the extrema of solutions are given, with strict numerical bounds.

1. Introduzione.

Si consideri il sistema

$$(1.1) \quad \frac{dy}{dt} = A(t)y$$

dove $A(t) = (a_{ij}(t))$ è una matrice 2×2 , a_{ij} sono funzioni reali di variabile reale.

Nelle ipotesi

$$I_1) \quad a_{ij} \in L_{loc}([0, +\infty)) \text{ ed } a_{12}, a_{21} \in AC_{loc}([0, +\infty))$$

$$I_2) \quad a_{12}(t) > 0, a_{21}(t) < 0 \quad \forall t \in [0, +\infty)$$

$$a_{12}(0) + a_{21}(0) = 0$$

$$I_3) \quad \int_0^{+\infty} \sqrt{-a_{12}(t)a_{21}(t)} \, dt = +\infty$$

(*) Indirizzo dell'A.: Istituto di Matematica Applicata, via Belzoni 7, Università di Padova.

Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.A.F.A.

è stato mostrato in [2] che il sistema (1.1) si può scrivere nella forma canonica

$$(1.2) \quad \frac{dz}{dx} = C(x)z \quad C(x) = \begin{pmatrix} -\omega(x) & 1 \\ -1 & \omega(x) \end{pmatrix}$$

dove

$$(1.3) \quad x = \varphi(t) = \int_0^t \sqrt{-a_{12}(\tau)a_{21}(\tau)} d\tau, \quad t = \psi(x)$$

e q.o. in $[0, +\infty)$

$$(1.4) \quad \omega(x) = \frac{1}{2} \frac{d}{dx} \left\{ \left[\frac{1}{2} \log \left(\frac{-a_{12}(t)}{a_{21}(t)} \right) + \int_0^t [a_{22}(\tau) - a_{11}(\tau)] d\tau \right] \circ \psi \right\}.$$

Ovviamente dalle ipotesi I_1, I_2, I_3 segue $\omega \in L_{loc}[0, +\infty)$.

La forma canonica (1.2) è stata ottenuta da (1.1), oltre che con il cambio di variabile (1.3), mediante l'uso delle trasformazioni

$$(1.5) \quad y = T_1(t)\tilde{y}$$

$$(1.5') \quad T_1(t) = \begin{pmatrix} \exp \left[\int_0^t a_{11}(\tau) d\tau \right] & 0 \\ 0 & \exp \left[\int_0^t a_{22}(\tau) d\tau \right] \end{pmatrix}$$

e, posto $\tilde{y}(\psi(x)) = \tilde{z}(x)$,

$$(1.6) \quad \tilde{z} = T_2(x)z$$

$$(1.6') \quad T_2(x) = \begin{pmatrix} \exp \left[\int_0^x \omega(s) ds \right] & 0 \\ 0 & \exp \left[-\int_0^x \omega(s) ds \right] \end{pmatrix}$$

I sistemi trasformati di (1.1) nei vettori $\tilde{y}(t)$ e $\tilde{z}(x)$ sono rispettivamente

$$(1.7) \quad \frac{d\tilde{y}}{dt} = \tilde{A}(t)\tilde{y}$$

dove

$$(1.7') \quad \tilde{A}(t) = \begin{pmatrix} 0 & a_{12}(t) \exp \left[\int_0^t [a_{22}(\tau) - a_{11}(\tau)] d\tau \right] \\ a_{21}(t) \exp \left[\int_0^t [a_{11}(\tau) - a_{22}(\tau)] d\tau \right] & 0 \end{pmatrix}$$

$$(1.8) \quad \frac{d\tilde{z}}{dx} = \tilde{C}(x)\tilde{z}$$

dove

$$(1.8') \quad \tilde{C}(x) = \begin{pmatrix} 0 & \exp \left[2 \int_0^x \omega(s) ds \right] \\ -\exp \left[-2 \int_0^x \omega(s) ds \right] & 0 \end{pmatrix}$$

In ipotesi supplementari sulla funzione ω che, assieme alle ipotesi I_1, I_2, I_3 garantiscono il carattere oscillante ⁽¹⁾ di tutti i sistemi citati (1.2), (1.8), (1.7), (1.1), sono state proposte in [2] due rappresentazioni asintotiche delle loro soluzioni con maggiorazione esplicita del resto.

In particolare nell'ipotesi supplementare H_1

$$H_1) \quad (\exists \omega_\infty \in R, |\omega_\infty| < 1) \quad \text{tale che} \quad \omega - \omega_\infty \in L([0, +\infty))$$

si è mostrato che la generica soluzione $z(x) = (z_i(x))$ $i = 1, 2$ del sistema (1.2) ammette la rappresentazione

$$(1.9) \quad \begin{cases} z_1(x) = h[\sin(\sqrt{1-\omega_\infty^2}x + \gamma) + \eta_1(x, \gamma)] \\ z_2(x) = h[\cos(\sqrt{1-\omega_\infty^2}x + \gamma - \arcsin \omega_\infty) + \eta_2(x, \gamma)] \end{cases} \quad (h, \gamma \in R)$$

⁽¹⁾ Diremo che il sistema (1.2) è oscillante in $[0, +\infty)$ se detta $z(x) = (z_i(x))$ una sua soluzione non identicamente nulla le funzioni $z_1(x), z_2(x)$ posseggono in $[0, +\infty)$ infiniti zeri isolati che si separano mutuamente (si veda W. T. Reid [6]).

dove sulla semiretta $[\alpha, +\infty)$ sotto definita si ha

$$(1.10) \quad \max_i |\eta_i(x, \gamma)| = \|\eta(x, \gamma)\|_2 \leq \mu_0(x),$$

con $\mu_0(x)$ data da

$$(1.11) \quad \mu_0(x) = \frac{2k(x)}{1 - 2\sqrt{2}k(x) + \sqrt{1 - 4\sqrt{2}k(x)}},$$

$$(1.12) \quad k(x) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1 - |\omega_\infty|}} \int_x^{+\infty} |\omega(s) - \omega_\infty| ds.$$

Ovviamente $\mu_0(x)$ è definita sulla semiretta $[\alpha, +\infty)$ dove $k(x) \leq \frac{1}{4}\sqrt{2}$.

Analoghe rappresentazioni si deducono per le soluzioni degli altri sistemi.

In questo lavoro (paragrafo 2), considerata una soluzione non banale $\tilde{z}(x) = (\tilde{z}_i(x))$ $i = 1, 2$ del sistema (1.8), osservato che gli zeri x_n , ξ_n ($n = 1, 2, \dots$) di $\tilde{z}_1(x)$, $d\tilde{z}_1/dx$ (coincidenti rispettivamente con quelli di $d\tilde{z}_2/dx$, $\tilde{z}_2(x)$) si separano, si studia il comportamento asintotico dei massimi relativi di $|\tilde{z}_1(x)|$, $|\tilde{z}_2(x)|$. Si ottengono così (teorema 1) le formule asintotiche (2.4), (2.5) contenenti una maggiorazione esplicita del resto. Benchè $\tilde{z}_1(x)$, $\tilde{z}_2(x)$ siano anche soluzioni rispettivamente delle equazioni (2.2), (2.3), ciò non viene usato nella dimostrazione del teorema 1. Invece questa è ottenuta considerando opportune funzioni $\alpha_1(x)$, $\alpha_2(x)$, date da (2.8), (2.9), dipendenti dalla soluzione $z(x) = (z_i(x))$ di (1.2) corrispondente di $\tilde{z}(x)$ mediante (1.6). Le funzioni $\alpha_1(x)$, $\alpha_2(x)$ sono positive monotone, rispettivamente decrescente e crescente, in $[0, +\infty)$ e tali che $\lim_{x \rightarrow +\infty} [\alpha_1(x)/\alpha_2(x)] = 1$. Esse si possono pensare ottenute dalle funzioni di tipo Liapunov

$$V_1(x, z_1, z_2) = \exp [L(x)] (z_1^2 - 2\omega_\infty z_1 z_2 + z_2^2)$$

$$V_2(x, z_1, z_2) = \exp [-L(x)] (z_1^2 - 2\omega_\infty z_1 z_2 + z_2^2)$$

con $L(x)$ data da (2.6) (si veda l'osservazione 1).

Nel paragrafo 3, aggiunta l'ipotesi $\omega \in \mathcal{O}^0([0, +\infty))$, si considera una soluzione $z(x) = (z_i(x))$ $i = 1, 2$ di (1.2) e si osserva che in generale gli zeri di $z_1(x)$, dz_1/dx non si separano anzi che questi ultimi pos-

sono non costituire una successione. Si studia quindi il comportamento asintotico delle successioni dei massimi assoluti di $|z_1(x)|$, $|z_2(x)|$ rispettivamente negli intervalli $[x_n, x_{n+1}]$, $[\xi_n, \xi_{n+1}]$ dove $\{x_n\}_{n \in N}$, $\{\xi_n\}_{n \in N}$ sono le successioni degli zeri di $z_1(x)$, $z_2(x)$. Si ottengono così le formule asintotiche (3.2), (3.3), (3.4), (3.5) del teorema 2. Nella dimostrazione si utilizzano le stesse funzioni $\alpha_1(x)$, $\alpha_2(x)$ già usate nel teorema 1. Nel paragrafo 4 si estendono i risultati ottenuti ad una soluzione $y(t)$ di (1.1) dopo aver aggiunto alle ipotesi I_1 , I_2 , I_3 quella che a_{11} , $a_{22} \in C^0([0, +\infty))$. Infine nel paragrafo 5 si fornisce un esempio di un sistema del tipo (1.2), verificante l'ipotesi H_1 ed $\omega \in C^0([0, +\infty))$, che ammette una soluzione $\bar{z}(x) = (\bar{z}_i(x))$ nella quale l'insieme degli zeri di $d\bar{z}_1/dx$ ha cardinale c . Più precisamente in ogni semiretta $[a, +\infty) \subset \subset [0, +\infty)$ esiste una successione di intervalli $[\alpha_n, \beta_n]$ nei quali $\bar{z}_1$ è costante e quindi $d\bar{z}_1/dx = 0$; invece $d\bar{z}_2/dx$ ha una successione $\{\xi'_n\}_{n \in N}$ di zeri. Si applica ad esempi il teorema 2, mostrando che in generale il resto non è migliorabile.

2. Comportamento asintotico delle successioni dei massimi relativi di $|\tilde{z}_1(x)|$, $|\tilde{z}_2(x)|$.

Prendiamo in considerazione il sistema (1.8) $d\tilde{z}/dx = \tilde{C}(x)\tilde{z}$ che, posto $\tilde{z}(x) = (\tilde{z}_i(x))$ $i = 1, 2$, si può scrivere

$$(2.1) \quad \begin{cases} \frac{d\tilde{z}_1}{dx} = \exp \left[2 \int_0^x \omega(s) ds \right] \cdot \tilde{z}_2 \\ \frac{d\tilde{z}_2}{dx} = - \exp \left[-2 \int_0^x \omega(s) ds \right] \cdot \tilde{z}_1 \end{cases}$$

dove ω è data da (1.4). Nell'ipotesi H_1 , cioè

$$(\exists \omega_\infty, |\omega_\infty| < 1) \quad \text{tale che } (\omega - \omega_\infty) \in L([0, +\infty)),$$

esso risulta oscillante, di modo che, detta $\tilde{z}(x)$ una sua soluzione non banale, $\tilde{z}_1(x)$, $\tilde{z}_2(x)$ ammettono in $[0, +\infty)$ infiniti zeri isolati che si separano mutuamente. Siano rispettivamente $\{x_n\}_{n \in N}$, $\{\xi_n\}_{n \in N}$ le successioni degli zeri di $\tilde{z}_1(x)$, $\tilde{z}_2(x)$. Risulta allora che $\{|\tilde{z}_1(\xi_n)|\}_{n \in N}$, $\{|\tilde{z}_2(x_n)|\}_{n \in N}$

sono rispettivamente le successioni dei massimi relativi di $|\tilde{z}_1(x)|$, $|\tilde{z}_2(x)|$. Osserviamo che $\tilde{z}_1(x)$, $\tilde{z}_2(x)$ sono anche rispettivamente soluzioni delle equazioni

$$(2.2) \quad \frac{d^2 \tilde{z}_1}{dx^2} - 2\omega \frac{d\tilde{z}_1}{dx} + \tilde{z}_1 = 0$$

$$(2.3) \quad \frac{d^2 \tilde{z}_2}{dx^2} + 2\omega \frac{d\tilde{z}_2}{dx} + \tilde{z}_2 = 0.$$

Il comportamento asintotico delle successioni dei massimi relativi dei valori assoluti delle soluzioni di (2.2) e di (2.3) è stato studiato in ipotesi completamente diverse in [7] ottenendo risultati diversi e in generale difficilmente confrontabili con quelli che saranno ottenuti in questo paragrafo. Infatti le formule asintotiche che compaiono in [7] contengono la derivata di ω la cui esistenza qui non viene supposta.

Osserviamo infine che, escluso il caso $\omega_\infty = 0$, $\tilde{z}_1(x)$ oppure $\tilde{z}_2(x)$ non sono limitate in $[0, +\infty)$. Ciò segue dall'ipotesi H_1 , dalla trasformazione (1.6) $\tilde{z} = T_2(x)z$ e dalla limitatezza di $z_1(x)$, $z_2(x)$ rappresentate da (1.9). Pertanto in questi casi le formule asintotiche che otterremo ci daranno anche l'ordine di infinito o di infinitesimo delle successioni $\{|\tilde{z}_1(\xi_n)|\}_{n \in N}$, $\{|\tilde{z}_2(x_n)|\}_{n \in N}$. Vale il seguente teorema.

TEOREMA 1. Valga l'ipotesi H_1 , sia $\tilde{z}(x) = (\tilde{z}_i(x))$ $i = 1, 2$ una soluzione non banale di (2.1) e sia $z(x) = (z_i(x))$ $i = 1, 2$ la soluzione corrispondente, mediante (1.6), del sistema (1.2), soluzione quest'ultima che ammette la rappresentazione asintotica (1.9). Siano $\{x_n\}_{n \in N}$, $\{\xi_n\}_{n \in N}$ le rispettive successioni degli zeri di $\tilde{z}_1(x)$, $\tilde{z}_2(x)$ allora per le successioni $\{|\tilde{z}_1(\xi_n)|\}_{n \in N}$, $\{|\tilde{z}_2(x_n)|\}_{n \in N}$ dei massimi relativi di $|\tilde{z}_1(x)|$, $|\tilde{z}_2(x)|$ valgono le seguenti formule asintotiche con maggiorazione del resto:

$$(2.4) \quad \left| \exp \left[- \int_0^{\xi_n} \omega(s) ds \right] \cdot |\tilde{z}_1(\xi_n)| - b \right| \leq b(\exp [L(\xi_n)/2] - 1)$$

$$(2.5) \quad \left| \exp \left[\int_0^{x_n} \omega(s) ds \right] \cdot |\tilde{z}_2(x_n)| - b \right| \leq b(\exp [L(x_n)/2] - 1)$$

dove

$$(2.6) \quad L(x) = \frac{2}{\sqrt{1 - \omega_\infty^2}} \int_x^{+\infty} |\omega(s) - \omega_\infty| ds, \quad b = |h| \sqrt{1 - \omega_\infty^2}.$$

DIMOSTRAZIONE. Ricordiamo che per $\tilde{z}(x)$ e $z(x)$ soluzioni corrispondenti mediante (1.6) dei sistemi (2.1) e (1.2), valgono le formule

$$(2.7) \quad \begin{cases} \tilde{z}_1(x) = \exp \left[\int_0^x \omega(s) ds \right] z_1(x) \\ \tilde{z}_2(x) = \exp \left[- \int_0^x \omega(s) ds \right] z_2(x) . \end{cases}$$

Pertanto $\{x_n\}_{n \in N}$, $\{\xi_n\}_{n \in N}$ rappresentano anche le successioni degli zeri di $z_1(x)$, $z_2(x)$. In corrispondenza a questa soluzione $(z_i(x))$ $i = 1, 2$ consideriamo le funzioni

$$(2.8) \quad \alpha_1(x) = \exp [L(x)] [z_1^2(x) - 2\omega_\infty z_1(x) z_2(x) + z_2^2(x)]$$

$$(2.9) \quad \alpha_2(x) = \exp [-L(x)] [z_1^2(x) - 2\omega_\infty z_1(x) z_2(x) + z_2^2(x)]$$

con $L(x)$ data da (2.6). Le funzioni α_1 , α_2 risultano positive ⁽²⁾, monotone, rispettivamente decrescente e crescente ⁽³⁾, in $[0, +\infty)$ ed inoltre si ha

$$(2.10) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)} = 1 .$$

Infatti, tenendo conto che $(z_i(x))$ $i = 1, 2$ è soluzione di (1.2), si ha q.o. in $[0, +\infty)$

$$(2.11) \quad \alpha_1'(x) = \exp [L(x)] \{ [L'(x) - 2(\omega(x) - \omega_\infty)] z_1^2(x) - 2\omega_\infty L'(x) z_1(x) z_2(x) + [L'(x) + 2(\omega(x) - \omega_\infty)] z_2^2(x) \} ,$$

$$(2.12) \quad \alpha_2'(x) = \exp [-L(x)] \{ [-L'(x) - 2(\omega(x) - \omega_\infty)] z_1^2(x) + 2\omega_\infty L'(x) z_1(x) z_2(x) + [-L'(x) + 2(\omega(x) - \omega_\infty)] z_2^2(x) \} .$$

⁽²⁾ Si ricordi che $z(x)$ come soluzione corrispondente mediante (2.7) di $\tilde{z}(x)$ non può essere la soluzione banale.

⁽³⁾ Questa monotonia va intesa in senso largo. In particolare nel caso che sia $\omega(x) = \omega_\infty$ su una semiretta $[q, +\infty)$, $\alpha_1(x)$, $\alpha_2(x)$ risulteranno costanti e coincidenti in $[q, +\infty)$ come si vedrà più avanti.

Consideriamo dapprima il caso banale che sia $\omega(x) = \omega_\infty$ q.o. su una semiretta $[q, +\infty)$; si ha ivi $L(x) = 0$, $\alpha'_1(x) = \alpha'_2(x) = 0$. Dalle (1.9), (1.10), (1.11), (1.12) si ottiene allora $\eta_1(x, \gamma) = \eta_2(x, \gamma) = 0$ in $[q, +\infty)$ e di conseguenza $\alpha_1(x) = \alpha_2(x) = \hbar^2(1 - \omega_\infty^2)$ in $[q, +\infty)$.

In caso contrario per ogni x , fissato q.o. in $[0, +\infty)$, le forme quadratiche

$$(2.11') \quad \exp [L(x)] \{ [L'(x) - 2(\omega(x) - \omega_\infty)] \lambda_1^2 - 2\omega_\infty L'(x) \lambda_1 \lambda_2 + \\ + [L'(x) + 2(\omega(x) - \omega_\infty)] \lambda_2^2 \}$$

$$(2.12') \quad \exp [-L(x)] \{ [-L'(x) - 2(\omega(x) - \omega_\infty)] \lambda_1^2 + 2\omega_\infty L'(x) \lambda_1 \lambda_2 + \\ + [-L'(x) + 2(\omega(x) - \omega_\infty)] \lambda_2^2 \}$$

risultano nulle o semidefinite, rispettivamente negativa e positiva. Ne segue

$$(2.13) \quad \alpha'_1(x) \leq 0, \quad \alpha'_2(x) \geq 0 \quad \text{q.o. in } [0, +\infty)$$

e la monotonia richiesta di $\alpha_1(x)$, $\alpha_2(x)$. Da ciò e dalla (2.10) segue l'esistenza di una costante $b^2 > 0$ tale che

$$(2.14) \quad \alpha_1(x) \geq b^2 \geq \alpha_2(x) \quad x \in [0, +\infty)$$

e quindi

$$(2.15) \quad \exp [L(\xi_n)] z_1^2(\xi_n) \geq b^2 \geq \exp [-L(\xi_n)] z_1^2(\xi_n),$$

$$(2.16) \quad \exp [L(x_n)] z_2^2(x_n) \geq b^2 \geq \exp [-L(x_n)] z_2^2(x_n).$$

Ne seguono le disuguaglianze, dove ovviamente $b > 0$,

$$(2.17) \quad ||z_1(\xi_n)| - b| \leq b(\exp [L(\xi_n)/2] - 1),$$

$$(2.18) \quad ||z_2(x_n)| - b| \leq b(\exp [L(x_n)/2] - 1)$$

poichè $|\exp [-L(x)/2] - 1| = 1 - \exp [-L(x)/2] \leq \exp [L(x)/2] - 1$.

Mediante (2.7) da (2.17), (2.18) seguono subito le (2.4), (2.5). Rimane da dimostrare ⁽⁴⁾ che $b = |\hbar| \sqrt{1 - \omega_\infty^2}$. Ricordando che $z(x)$ am-

⁽⁴⁾ Nel caso $\omega(x) = \omega_\infty$ q.o. in $[q, +\infty)$ ciò è già stato dimostrato perchè si è visto $\alpha_1(x) = \alpha_2(x) = \hbar^2(1 - \omega_\infty^2)$, $\forall x \in [q, +\infty)$.

mette la rappresentazione asintotica (1.9), dove $\lim_{x \rightarrow +\infty} \eta_i(x, \gamma) = 0$, $i = 1, 2$, da $z_2(\xi_n) = 0$ si ottiene

$$(2.19) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \cos(\sqrt{1 - \omega_\infty^2} \xi_n + \gamma - \arcsin \omega_\infty) = 0$$

e quindi con facili calcoli che

$$(2.20) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} |z_1(\xi_n)| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \{|h| \cdot |\sin(\sqrt{1 - \omega_\infty^2} \xi_n + \gamma)|\} = |h| \sqrt{1 - \omega_\infty^2}.$$

OSSERVAZIONE 1. Si noti che, nell'ipotesi aggiuntiva $\omega \in C^0([0, +\infty))$ che garantisce la continuità di $L'(x)$, $\alpha_1(x)$ si potrebbe anche ottenere dalla funzione di Liapunov in senso classico ⁽⁵⁾

$$(2.21) \quad V_1(x, z_1, z_2) = \exp[L(x)](z_1^2 - 2\omega_\infty z_1 z_2 + z_2^2).$$

In tal caso la (2.11'), posto $\lambda_i = z_i$, e pensata funzione di (x, z_1, z_2) , coinciderebbe ovviamente con

$$(2.22) \quad \frac{\partial V_1}{\partial x} + \frac{\partial V_1}{\partial z_1}(-\omega(x)z_1 + z_2) + \frac{\partial V_1}{\partial z_2}(-z_1 + \omega(x)z_2).$$

In senso più largo si potrebbe pensare come funzione di Liapunov anche

$$V_2(x, z_1, z_2) = \exp[-L(x)](z_1^2 - 2\omega_\infty z_1 z_2 + z_2^2)$$

dalla quale si otterrebbe $\alpha_2(x)$. Infatti per $\omega \in C^0([0, +\infty))$

$$\frac{\partial V_2}{\partial x} + \frac{\partial V_2}{\partial z_1}(-\omega(x)z_1 + z_2) + \frac{\partial V_2}{\partial z_2}(-z_1 + \omega(x)z_2)$$

risulta semidefinita positiva in $[0, +\infty) \times R \times R$.

⁽⁵⁾ Per la definizione si può vedere ad esempio W. Hahn [4] sez. 4. Più larga appare la definizione di L. Cesari [3] nella quale non si fanno ipotesi sul fatto che (2.22) sia semidefinita negativa.

3. Comportamento asintotico di certe successioni di massimi di $|z_1(x)|$, $|z_2(x)|$.

Prendiamo ora in considerazione il sistema (1.2) $dz/dx = C(x)z$ che, usando la usuale notazione $z(x) = (z_i(x))$ $i = 1, 2$, si può scrivere

$$(3.1) \quad \begin{cases} \frac{dz_1}{dx} = -\omega(x)z_1 + z_2 \\ \frac{dz_2}{dx} = -z_1 + \omega(x)z_2 \end{cases}$$

dove ω è data da (1.4). Supponiamo che valga l'ipotesi H_1 e che inoltre $\omega \in C^0([0, +\infty))$. Come è stato ricordato nel paragrafo 1, il sistema (3.1) risulta oscillante come il sistema (2.1). Le soluzioni dei due sistemi (2.1), (3.1) si corrispondono mediante (2.7) e la successione degli zeri di $z_i(x)$ coincide con quella di $\tilde{z}_i(x)$. Siano allora, in accordo con le notazioni introdotte nel teorema 1, $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ e $\{\xi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ le successioni degli zeri di $z_1(x)$, $z_2(x)$ (componenti di una soluzione non banale di (3.1)). Osserviamo che invece gli zeri di $z'_i(x)$, $\tilde{z}'_i(x)$ non si corrispondono anzi gli zeri di $z'_i(x)$ possono non essere un insieme numerabile nè in $[0, +\infty)$ nè in alcuna semiretta $[a, +\infty)$. (Si veda l'esempio del paragrafo 4). Inoltre fra due zeri consecutivi x_n , x_{n+1} di $z_1(x)$ ci possono essere più massimi relativi di $|z_1(x)|$. Consideriamo allora il massimo assoluto di $|z_1(x)|$ in $[x_n, x_{n+1}]$; esso viene assunto in almeno un punto appartenente a $]x_n, x_{n+1}[$, nel quale punto ovviamente si ha $z'_1(x) = 0$. Nel caso che ci sia più di un punto nel quale il massimo assoluto di $|z_1(x)|$ in $[x_n, x_{n+1}]$ viene assunto scelgo (*) il punto $\bar{x}_n$ che ha la distanza minima da x_n . Si può così costruire la successione $\{\bar{x}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ associata alla successione $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ottenendo la successione dei massimi assoluti di $|z_1(x)|$ in $[x_n, x_{n+1}]$. Analogamente si può costruire la successione $\{\bar{\xi}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ associata a $\{\xi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ottenendo quella dei massimi assoluti di $|z_2(x)|$ in $[\xi_n, \xi_{n+1}]$. Vale allora il seguente teorema.

TEOREMA 2. Valga l'ipotesi H_1 e si abbia inoltre $\omega \in C^0([0, +\infty))$. Sia $z(x) = (z_i(x))$ $i = 1, 2$ una soluzione non banale di (3.1), dotata

(*) Ovviamente $\bar{x}_n$ esiste perchè l'insieme di tali punti è chiuso, vista la continuità di $|z_1(x)|$. La scelta non è priva di significato perchè, come si vede dall'esempio del paragrafo 4, l'insieme di questi punti può avere cardinale c .

della rappresentazione asintotica (1.9), siano $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\{\xi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ le successioni degli zeri di $z_1(x)$, $z_2(x)$ e $\{|z_1(\bar{x}_n)|\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\{|z_2(\bar{\xi}_n)|\}_{n \in \mathbb{N}}$ le corrispondenti successioni dei massimi assoluti di $|z_1(x)|$, $|z_2(x)|$ rispettivamente in $[x_n, x_{n+1}]$, $[\xi_n, \xi_{n+1}]$, dove $\{\bar{x}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\{\bar{\xi}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ sono state sopra definite.

Valgono allora le seguenti formule asintotiche con maggiorazione del resto:

$$(3.2) \quad |(1 + \omega^2(\bar{x}_n) - 2\omega_\infty \omega(\bar{x}_n))^{\frac{1}{2}} \cdot |z_1(\bar{x}_n)| - b| \leq b(\exp[L(\bar{x}_n)/2] - 1)$$

$$(3.3) \quad |(1 + \omega^2(\bar{\xi}_n) - 2\omega_\infty \omega(\bar{\xi}_n))^{\frac{1}{2}} \cdot |z_2(\bar{\xi}_n)| - b| \leq b(\exp[L(\bar{\xi}_n)/2] - 1)$$

$$(3.4) \quad ||z'_1(x_n)| - b| \leq b(\exp[L(x_n)/2] - 1)$$

$$(3.5) \quad ||z'_2(\xi_n)| - b| \leq b(\exp[L(\xi_n)/2] - 1)$$

dove $L(x)$ e b sono definite da (2.6).

DIMOSTRAZIONE. In corrispondenza alla soluzione non banale $(z_i(x))$ $i = 1, 2$ del sistema (3.1), dotata della rappresentazione asintotica (1.9), consideriamo nuovamente le funzioni $\alpha_1(x)$, $\alpha_2(x)$ definite da (2.8), (2.9); avendo supposto $\omega \in C^0([0, +\infty))$, si possono $\forall x \in [0, +\infty)$ rappresentare $\alpha_1(x)$, $\alpha_2(x)$ mediante $z_1(x)$, $z'_1(x)$ oppure mediante $z_2(x)$, $z'_2(x)$. Otteniamo così

$$(3.6) \quad \alpha_1(x) = \exp[L(x)] \{ [1 - 2\omega_\infty \omega(x) + \omega^2(x)] z_1^2(x) + \\ + 2(\omega(x) - \omega_\infty) z_1(x) z'_1(x) + (z'_1(x))^2 \},$$

$$(3.7) \quad \alpha_2(x) = \exp[-L(x)] \{ [1 - 2\omega_\infty \omega(x) + \omega^2(x)] z_1^2(x) + \\ + 2(\omega(x) - \omega_\infty) z_1(x) z'_1(x) + (z'_1(x))^2 \}$$

ed analogamente

$$(3.8) \quad \alpha_1(x) \exp[-L(x)] = \alpha_2(x) \exp[L(x)] = \\ = [1 - 2\omega_\infty \omega(x) + \omega^2(x)] z_2^2(x) - 2(\omega(x) - \omega_\infty) z_2(x) z'_2(x) + (z'_2(x))^2.$$

Il cambiamento di rappresentazione di $\alpha_1(x)$, $\alpha_2(x)$ non ne altera la monotonia di verso opposto in $[0, +\infty)$ nè la proprietà che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)} = 1.$$

Ne segue pertanto

$$\alpha_1(x) \geq b^2 \geq \alpha_2(x)$$

con b data da (2.6). Se ne deducono in modo perfettamente analogo a quello usato nel teorema 1 le formule (3.2), (3.3), (3.4), (3.5).

4. Comportamento asintotico di certe successioni di massimi di $|y_1(t)|$, $|y_2(t)|$.

Sia $\tilde{y}(t) = (\tilde{y}_i(t))$ $i = 1, 2$ una soluzione non banale di (1.7) $d\tilde{y}/dt = \tilde{A}(t)\tilde{y}$ e siano $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\{\tau_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ le successioni degli zeri di $\tilde{y}_1(t)$, $\tilde{y}_2(t)$ corrispondenti mediante (1.3) $t = \psi(x)$ alle successioni $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\{\xi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ degli zeri di $\tilde{z}_1(x)$, $\tilde{z}_2(x)$, dove $\tilde{z}_i(x) = \tilde{y}_i(\psi(x))$ $i = 1, 2$ e $(\tilde{z}_i(x))$ è soluzione di (1.8). Considerata la soluzione $y(t) = (y_i(t))$ $i = 1, 2$ del sistema (1.1), corrispondente mediante (1.5) $y = T_1(t)\tilde{y}$ alla soluzione $\tilde{y}(t)$ di (1.7), allora $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\{\tau_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ risulteranno anche le successioni degli zeri di $y_1(t)$, $y_2(t)$. Invece gli zeri di $d\tilde{y}_i/dt$ ($i = 1, 2$) non coincideranno con quelli di dy_i/dt anzi questi ultimi potranno anche non costituire una successione. Costruiamo allora le successioni $\{\bar{t}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\{\bar{\tau}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ in modo analogo a quanto fatto nel paragrafo 3 per le successioni $\{\bar{x}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\{\bar{\xi}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Vale allora il seguente teorema.

TEOREMA 3. Valgono le ipotesi I_1 , I_2 , I_3 ed inoltre si abbia a_{11} , $a_{22} \in C^0([0, +\infty))$; sia $y(t) = (y_i(t))$ una soluzione non banale di (1.1), siano $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\{\tau_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ le successioni degli zeri di $y_1(t)$, $y_2(t)$ e siano $\{|y_1(\bar{t}_n)|\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\{|y_2(\bar{\tau}_n)|\}_{n \in \mathbb{N}}$ le associate successioni dei massimi assoluti di $|y_1(t)|$, $|y_2(t)|$ rispettivamente in $[t_n, t_{n+1}]$, $[\tau_n, \tau_{n+1}]$, le successioni $\{\bar{t}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\{\bar{\tau}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ essendo state definite nel modo sopra detto. Diciamo $z(x)$ la soluzione di (1.2), corrispondente di $y(t)$ mediante (1.5), (1.3), (1.6) e dotata della rappresentazione asintotica (1.9). Valgono allora le seguenti formule asintotiche:

$$(4.1) \quad \left| \exp \left[-\frac{1}{2} \int_0^{\bar{t}_n} [a_{11}(\tau) + a_{22}(\tau)] d\tau \right] \cdot \left(\frac{-a_{12}(\bar{t}_n)}{a_{21}(\bar{t}_n)} \right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left[1 + \frac{2\omega_\infty a_{11}(\bar{t}_n)}{\varphi'(\bar{t}_n)} + \frac{a_{11}^2(\bar{t}_n)}{(\varphi'(\bar{t}_n))^2} \right]^{\frac{1}{2}} \cdot |y_1(\bar{t}_n)| - b \right| \leq b \left(\exp [L(\varphi(\bar{t}_n))/2] - 1 \right),$$

$$(4.2) \quad \left| \exp \left[-\frac{1}{2} \int_0^{\bar{\tau}_n} [a_{11}(\tau) + a_{22}(\tau)] d\tau \right] \cdot \left(-\frac{a_{12}(\bar{\tau}_n)}{a_{21}(\bar{\tau}_n)} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left[1 - \frac{2\omega_\infty a_{22}(\bar{\tau}_n)}{\varphi'(\bar{\tau}_n)} + \frac{a_{22}^2(\bar{\tau}_n)}{(\varphi'(\bar{\tau}_n))^2} \right]^{\frac{1}{2}} \cdot |y_2(\bar{\tau}_n)| - b \right| \leq b \left(\exp [L(\varphi(\bar{\tau}_n))/2] - 1 \right)$$

con $\varphi(t)$ data da (1.3) e $L(x)$, b da (2.6).

DIMOSTRAZIONE. Ricordiamo che per $y(t)$ e $z(x)$ soluzioni corrispondenti mediante (1.5), (1.3), (1.6) dei sistemi (1.1) e (1.2) valgono le formule

$$\begin{cases} z_1(\varphi(t)) = \exp \left[-\frac{1}{2} \int_0^t [a_{11}(\tau) + a_{22}(\tau)] d\tau \right] \cdot \left(-\frac{a_{12}(t)}{a_{21}(t)} \right)^{-\frac{1}{2}} \cdot y_1(t) \\ z_2(\varphi(t)) = \exp \left[-\frac{1}{2} \int_0^t [a_{11}(\tau) + a_{22}(\tau)] d\tau \right] \cdot \left(-\frac{a_{12}(t)}{a_{21}(t)} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot y_2(t) \end{cases}$$

con $\varphi(t)$ data da (1.3). In corrispondenza a questa soluzione $z(x) = (z_i(x))$, dotata della rappresentazione asintotica (1.9), consideriamo nuovamente le funzioni $\alpha_1(x)$, $\alpha_2(x)$ definite da (2.8), (2.9). Otterremo per la corrispondente soluzione $(y_i(t))$ di (1.1) le funzioni

$$\begin{aligned} \alpha_1(\varphi(t)) \exp [-L(\varphi(t))] &= \alpha_2(\varphi(t)) \exp [L(\varphi(t))] = \\ &= \exp \left[-\int_0^t [a_{11}(\tau) + a_{22}(\tau)] d\tau \right] \cdot \\ &\cdot \left\{ \left(-\frac{a_{12}(t)}{a_{21}(t)} \right)^{-\frac{1}{2}} y_1^2(t) - 2\omega_\infty y_1(t) y_2(t) + \left(-\frac{a_{12}(t)}{a_{21}(t)} \right)^{\frac{1}{2}} y_2^2(t) \right\}. \end{aligned}$$

Le funzioni $\alpha_1(\varphi(t))$, $\alpha_2(\varphi(t))$ conservano la monotonia di verso opposto in $[0, +\infty)$ e la proprietà che

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\alpha_1(\varphi(t))}{\alpha_2(\varphi(t))} = 1.$$

Avendo supposto $a_{11}, a_{22} \in C^0([0, +\infty))$ e che valgano I_1, I_2, I_3 , si

ha per ogni $t \in [0, +\infty)$

$$y_2(t) = \frac{y_1'(t) - a_{11}y_1(t)}{a_{12}(t)}, \quad y_1(t) = \frac{y_2'(t) - a_{22}y_2(t)}{a_{21}(t)}.$$

Ne segue la possibilità di rappresentare $\alpha_1(\varphi(t))$, $\alpha_2(\varphi(t))$ mediante $y_1(t)$, $y_1'(t)$ oppure mediante $y_2(t)$, $y_2'(t)$ e di dedurne nello stesso modo usato nel teorema 2 le (4.1), (4.2).

5. Esempi.

Nell'esempio che segue si introduce una funzione ω , soddisfacente alle ipotesi del teorema 2, tale che il sistema

$$\begin{cases} \frac{dz_1}{dx} = -\omega(x)z_1 + z_2 \\ \frac{dz_2}{dx} = -z_1 + \omega(x)z_2 \end{cases}$$

ammetta una soluzione $(\bar{z}_i(x))$ $i = 1, 2$ in cui l'insieme degli zeri di $d\bar{z}_1/dx$ abbia cardinale c in ogni semiretta contenuta in $[0, +\infty)$. Sia ω data da

$$(5.1) \quad \omega(x) = \begin{cases} \text{th}(\gamma_n - x) & x \in [\alpha_n, \beta_n] \\ \text{th}(\gamma_n - \beta_n) & x \in [\beta_n, \alpha_{n+1}] \end{cases} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

dove

$$(5.2) \quad \begin{cases} \alpha_1 = 0 & \alpha_n = \pi \sum_{k=2}^n \text{ch} \left(\frac{1}{2^{k-1}} \right) + \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}} \right) & (n = 2, 3, \dots) \\ \beta_n = \alpha_n + \frac{1}{2^n} & \gamma_n = \alpha_n + \frac{1}{2^{n-1}} & (n = 1, 2, 3, \dots) \end{cases}$$

e di conseguenza $\gamma_n - \beta_n = 1/2^n$ per $n = 1, 2, \dots$. La definizione (5.1) è ben posta perchè si ha

$$(5.3) \quad \omega(\alpha_{n+1}) = \text{th}(\gamma_n - \beta_n) = \text{th}(\gamma_{n+1} - \alpha_{n+1})$$

ed ω risulta positiva, continua, decrescente in $[0, +\infty)$, infinitesima per $x \rightarrow +\infty$. Risulta anche chiaramente che $\omega \in L([0, +\infty))$ infatti, viste le proprietà di ω , è sufficiente osservare che la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{\alpha_n}^{\alpha_{n+1}} \omega(x) dx$$

è convergente avendosi

$$(5.4) \quad \int_{\alpha_n}^{\beta_n} \omega(x) dx < \operatorname{th}(\gamma_n - \alpha_n) \cdot (\beta_n - \alpha_n) < \frac{1}{2^{2n-1}},$$

$$(5.5) \quad \int_{\beta_n}^{\alpha_{n+1}} \omega(x) dx = \operatorname{th}\left(\frac{1}{2^n}\right) \cdot (\alpha_{n+1} - \beta_n) = \pi \operatorname{sh}\left(\frac{1}{2^n}\right).$$

Valgono quindi le ipotesi del teorema 2 con $\omega_{\infty} = 0$. Una soluzione del sistema considerato definita in $[0, +\infty)$ è data allora da $(?)$ $\bar{z}(x) = (\bar{z}_i(x))$ dove

$$(5.6) \quad \begin{cases} \bar{z}_1(x) = (-1)^{n-1} \\ \bar{z}_2(x) = (-1)^{n-1} \omega(x) \end{cases} \quad x \in [\alpha_n, \beta_n] \quad n = 1, 2, \dots$$

$$(5.7) \quad \begin{cases} \bar{z}_1(x) = (-1)^{n-1} \cos[\sqrt{1 - \omega^2(\beta_n)}(x - \beta_n)] \\ \bar{z}_2(x) = (-1)^n \sin[\sqrt{1 - \omega^2(\beta_n)}(x - \beta_n) - \operatorname{arcsin} \omega(\beta_n)] \end{cases} \quad x \in [\beta_n, \alpha_{n+1}].$$

Come previsto gli zeri di $\bar{z}_1(x)$, $\bar{z}_2(x)$ sono isolati e si separano mutua-

(?) Per verificare facilmente che $\bar{z}_1, \bar{z}_2 \in C^1([0, +\infty))$ si ricordi che

$$\alpha_{n+1} - \beta_n = \frac{\pi}{\sqrt{1 - \omega^2(\beta_n)}} = \pi \operatorname{ch}\left(\frac{1}{2^n}\right), \quad \gamma_n - \beta_n = \gamma_{n+1} - \alpha_{n+1}.$$

mente. Essi sono dati rispettivamente da ⁽⁸⁾

$$(5.8) \quad x_n = \beta_n + \frac{\pi}{2} \operatorname{ch} \left(\frac{1}{2^n} \right) \quad \xi_n = \beta_n + \frac{\pi}{2} \operatorname{ch} \left(\frac{1}{2^n} \right) \operatorname{arcsin} \left(\operatorname{th} \frac{1}{2^n} \right) \\ (n = 1, 2, \dots)$$

e si ha $\beta_n < \xi_n < x_n < \alpha_{n+1}$.

Gli zeri di $d\bar{z}_1/dx$ sono dati da tutti i punti degli intervalli $[\alpha_n, \beta_n]$ ($n = 1, 2, \dots$), quelli di $d\bar{z}_2/dx$ formano una successione e sono

$$(5.9) \quad \xi'_n = \beta_n + \operatorname{ch} \left(\frac{1}{2^n} \right) \cdot \left[\frac{\pi}{2} + \operatorname{arcsin} \left(\operatorname{th} \frac{1}{2^n} \right) \right].$$

Si ha $\xi_n < \xi'_n < \alpha_{n+1}$.

Applichiamo alla soluzione trovata le formule asintotiche previste dal teorema 2. Le successioni $\{\bar{x}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\{\bar{\xi}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ivi considerate restano in questo esempio individuate dalle

$$\bar{x}_n = \alpha_{n+1} \quad \bar{\xi}_n = \xi'_n \quad (n = 1, 2, \dots)$$

e le formule (3.2), (3.3) diventano

$$(5.10) \quad |\sqrt{1 + \omega^2(\alpha_{n+1})} |\bar{z}_1(\alpha_{n+1})| - 1| \leq \exp [L(\alpha_{n+1})/2] - 1$$

$$(5.11) \quad |\sqrt{1 + \omega^2(\xi'_n)} |\bar{z}_2(\xi'_n)| - 1| \leq \exp [L(\xi'_n)/2] - 1.$$

Poichè $|\bar{z}_1(\alpha_{n+1})| = |\bar{z}_2(\xi'_n)| = 1$ si ha

$$\omega^2(\alpha_{n+1}) \leq \exp [L(\alpha_{n+1})] - 1, \quad \omega^2(\xi'_n) \leq \exp [L(\xi'_n)] - 1.$$

⁽⁸⁾ Si osservi che per $x \in [\beta_n, \alpha_{n+1}]$ si ha

$$- \operatorname{arcsin} \omega(\beta_n) \leq \sqrt{1 - \omega^2(\beta_n)} (x - \beta_n) - \operatorname{arcsin} \omega(\beta_n) \leq \pi - \operatorname{arcsin} \omega(\beta_n)$$

dove

$$0 < \operatorname{arcsin} \omega(\beta_n) < \frac{\pi}{2}.$$

Usando (5.4), (5.5) e con facili calcoli si trova

$$\exp[L(\alpha_{n+1})] - 1 = \exp\left[2 \int_{\alpha_{n+1}}^{+\infty} \omega(s) ds\right] - 1 = \frac{\pi}{2^{n-1}} + O\left(\frac{1}{2^{2n}}\right),$$

$$\exp[L(\xi'_n)] - 1 = \exp\left[2 \int_{\xi'_n}^{+\infty} \omega(s) ds\right] - 1 = \frac{3\pi}{2^n} + O\left(\frac{1}{2^{2n}}\right),$$

$$\omega^2(\alpha_{n+1}) = \omega^2(\xi'_n) = \operatorname{th}^2\left(\frac{1}{2^n}\right) = \frac{1}{2^{2n}} + O\left(\frac{1}{2^{4n}}\right).$$

In questo esempio il resto effettivo è di ordine inferiore a quello previsto dal teorema 2.

ESEMPIO 2°. Il resto previsto dalle formule (3.2), (3.3) non è in generale migliorabile. Consideriamo il sistema (3.1) con $\omega(x) = \exp[-x]$, già studiato in [2]. Le equazioni differenziali del 2° ordine a cui soddisfano $z_1(x)$, $z_2(x)$, componenti di una soluzione $z(x) = (z_i(x))$ di (3.1), si possono ottenere da una trasformazione di una equazione di Whittaker; come si è visto in [2] le soluzioni si possono rappresentare con serie di funzioni analitiche.

Consideriamo in particolare la soluzione $(\bar{z}_i(x))$ $i = 1, 2$ rappresentata dagli sviluppi in serie (di cui riportiamo soltanto i primi termini)

$$\begin{cases} \bar{z}_1(x) = \sin x + \frac{1}{5} \exp[-x] (2 \cos x + \sin x) + O(\exp[-2x]) \\ \bar{z}_2(x) = \cos x + \frac{1}{5} \exp[-x] (2 \sin x - \cos x) + O(\exp[-2x]). \end{cases}$$

Detti $\bar{x}_n$ gli zeri di $\bar{z}'_1(x)$, $\bar{\xi}_n$ quelli di $\bar{z}'_2(x)$ su una semiretta conveniente, dove gli zeri di $\bar{z}_1(x)$, $\bar{z}_2(x)$ separano rispettivamente gli zeri di $\bar{z}'_1(x)$, $\bar{z}'_2(x)$, si trova

$$\begin{aligned} |\bar{z}_1(\bar{x}_n)| &= 1 + \frac{1}{5} \exp[-\bar{x}_n] + O(\exp[-2\bar{x}_n]), \\ |\bar{z}_2(\bar{\xi}_n)| &= 1 - \frac{1}{5} \exp[-\bar{\xi}_n] + O(\exp[-2\bar{\xi}_n]); \end{aligned}$$

ne seguono le valutazioni

$$\begin{aligned} |\sqrt{1 + \omega^2(\bar{x}_n)} |\bar{z}_1(\bar{x}_n)| - 1| &\sim \frac{1}{5} \exp[-\bar{x}_n] \\ |\sqrt{1 + \omega^2(\bar{\xi}_n)} |\bar{z}_2(\bar{\xi}_n)| - 1| &\sim \frac{1}{5} \exp[-\bar{\xi}_n] \end{aligned}$$

mentre si ha

$$\exp \left[\int_{\bar{x}_n}^{+\infty} \omega(s) ds \right] - 1 \sim \exp [-\bar{x}_n], \quad \exp \left[\int_{\bar{\xi}_n}^{+\infty} \omega(s) ds \right] - 1 \sim \exp [-\bar{\xi}_n].$$

L'ordine di grandezza della maggiorazione dell'errore prevista da (3.2), (3.3) coincide in questo caso con la valutazione asintotica dell'errore stesso.

BIBLIOGRAFIA

- [1] M. BARTUSEK, *Properties of oscillating solutions of two-dimensional differential systems*, Proceedings of the I. N. Vekna Institute of Applied Mathematics, **8**, pp. 5-12.
- [2] A. M. BRESQUAR, *Sulla risoluzione asintotica dell'equazione $y' = A(t)y$, con $A(t)$ matrice 2×2 , nel caso oscillante*, in corso di stampa su Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, **74** (1985).
- [3] L. CESARI, *Asymptotic behavior and stability problems in ordinary differential equations*, Springer, Berlin, 1963.
- [4] W. HAHN, *Theory and Application of Liapunov's Direct Method*, Prentice-Hall, 1963.
- [5] E. HEIL, *Oscillatory and nonoscillatory systems of two first order linear differential equations*, Colloq. Math. Soc. Janos Bolyai, **30**, North-Holland, 1981.
- [6] W. T. REID, *Sturmian Theory for Ordinary Differential Equations*, Springer, New York, 1980.
- [7] U. RICHARD, *Sulla risoluzione asintotico-numerica dell'equazione differenziale $(py')' + qy = 0$ nel caso oscillante*, Atti Accad. Sci. Torino, **97** (1962-63), pp. 857-890.

Manoscritto pervenuto in redazione il 26 ottobre 1984.