

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

BIANCA ROSA BELLOMO

**Una classe di soluzioni asintotiche per una
equazione ellittica degenera**

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 75 (1986), p. 111-127

[<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1986__75__111_0>](http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1986__75__111_0)

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1986, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

Una classe di soluzioni asintotiche per una equazione ellittica degenera.

BIANCA ROSA BELLOMO

1. Introduzione.

In questo lavoro si considera una classe di operatori ellittici degeneri, in un semispazio ($t > 0$) dati da

$$P(t, x, D_t, D_x) = tP_2(t, x, D_t, D_x) + P_1(t, x, D_t, D_x)$$

dove P_2 è un operatore differenziale propriamente ellittico del secondo ordine e coefficienti reali $C^\infty(t > 0, x \in R^n)$ e P_1 è un operatore del primo ordine a coefficienti C^∞ .

Scopo del lavoro è di costruire esplicitamente una funzione $E(t, x)$ tale che

$$PE(t, x) \in C^\infty([0, T[\times R_x^n)$$

e di calcolare esplicitamente il comportamento di E per $t \rightarrow 0 +$.

Osserviamo che la regolarità di soluzioni di equazioni del tipo $Pu = f$, f appartenente ad un conveniente spazio di Sobolov con peso, è stata studiata da vari autori; citiamo qui P. Bolley-J. Camus [2], [3], M.S. Baouendi-C. Goulaouic [1], G. Goulaouic-N. Shimakura [5], quest'ultimo per il caso a coefficienti Hölderiani.

Indirizzo dell'A.: Dipartimento di Matematica, Università di Bologna.

Più precisamente l'operatore considerato è della forma

$$(1.1) \quad P = t \left[\partial_t^2 + 2 \sum_{j=1}^n a_{0j}(t, x) \partial_{x_j} \partial_t + \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t, x) \partial_{x_i} \partial_{x_j} \right] + \\ + \alpha(t, x) \partial_t + \sum_{j=1}^n b_j(t, x) \partial_{x_j} + c(t, x),$$

dove si suppone che

$$(1.2) \quad A(t, x, \xi) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t, x) \xi_i \xi_j \geq C |\xi|^2.$$

Nel § 2 si stabiliscono alcune notazioni usate nel seguito.

Nel § 3 si descrive il metodo impiegato per costruire formalmente la soluzione.

Nei §§ 4 e 5 si risolvono le equazioni di trasporto così ottenute e si dà un teorema di andamento asintotico di tali soluzioni.

Nel § 6 si dà senso a quanto fatto precedentemente.

2. Notazioni ed osservazioni preliminari.

Sia O^m , $m \in R$, l'insieme delle funzioni $g(x, \xi) \in C^\infty(R_x^n \times R_\xi^n)$ tale che $g(x, \lambda \xi) = \lambda^m g(x, \xi)$, $\lambda > 0$.

Sia ψ^m , $m \in R$, l'insieme delle funzioni $f(t, x, \xi) \in C^\infty(R_t^+ \times R_x^n \times R_\xi^n)$ tali che $f(t/\lambda, x, \lambda \xi) = \lambda^m f(t, x, \xi)$, $\lambda > 0$.

Osserviamo che gli operatori ∂_t , $t \cdot$, $g \cdot$, con $g \in O^k$, si comportano nel modo seguente

$$(2.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \partial_t: \psi^m \rightarrow \psi^{m+1} \\ : \psi^m \rightarrow \psi^{m+1} \\ O^k \psi^m \in (g, f) \rightarrow gf \in \psi^{m+k} \end{array} \right.$$

Riferendoci all'operatore (1.1) poniamo

$$(2.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} A_0(t, x, \xi) = 2 \sum_{j=1}^n a_{0j}(t, x) \xi_j \\ A(t, x, \xi) = \sum_{ij=1}^n a_{ij}(t, x) \xi_i \xi_j \\ B(t, x, \xi) = \sum_{j=1}^n b_j(t, x) \xi_j \\ M(t, x, \xi, \partial_x) = \sum_{ij=1}^n a_{ij}(t, x) \xi_i \partial_{x_j} \end{array} \right.$$

$$(2.3) \quad \left\{ \begin{array}{l} a_{0j}^{(k)}(x) = \frac{1}{k!} \partial_t^k a_{0j}(t, x)|_{t=0}, \quad k \geq 0, \quad 1 \leq j \leq n \\ A_{0k}(x, \partial_x) = \sum_{j=1}^n a_{0j}^{(k)}(x) \partial_{x_j} \\ A_{0k}(x, \xi) = \sum_{j=1}^n a_{0j}^{(k)}(x) \xi_j \end{array} \right.$$

$$(2.4) \quad \left\{ \begin{array}{l} a_{ij}^{(k)}(x) = \frac{1}{k!} \partial_t^k a_{ij}(t, x)|_{t=0}, \quad k \geq 0, \quad 1 \leq i, j \leq n \\ A_k(x, \partial_x) = \sum_{ij=1}^n a_{ij}^{(k)}(x) \partial_{x_i} \partial_{x_j} \\ A_k(x, \xi) = \sum_{ij=1}^n a_{ij}^{(k)}(x) \xi_i \xi_j \\ M_k(x, \xi, \partial_x) = \sum_{ij=1}^n a_{ij}^{(k)}(x) \xi_i \partial_{x_j} \end{array} \right.$$

$$(2.5) \quad \left\{ \begin{array}{l} b_j^{(k)}(x) = \frac{1}{k!} \partial_t^k b_j(t, x)|_{t=0}, \quad k \geq 0, \quad 1 \leq j \leq n \\ B_k(x, \partial_x) = \sum_{j=1}^n b_j^{(k)}(x) \partial_{x_j} \\ B_k(x, \xi) = \sum_{j=1}^n b_j^{(k)}(x) \xi_j \end{array} \right.$$

$$(2.6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha_k(x) = \frac{1}{k!} \partial_t^k \alpha(t, x)|_{t=0}, \quad k \geq 0 \\ c_k(x) = \frac{1}{k!} \partial_t^k c(t, x)|_{t=0}, \quad k \geq 0. \end{array} \right.$$

Sia inoltre

$$(2.7) \quad D(x, \xi) = \sqrt{A_0(x, \xi) - A_{00}^2(x, \xi)}.$$

Osserviamo che per la (1.2) D è reale.

3. Parametrice formale.

Consideriamo, dunque, l'operatore P ; cerchiamo di risolvere

$$(3.1) \quad Pu = 0, \quad t > 0$$

mediante un operatore

$$E(t, x) = \int \exp[ix\xi] q(t, x, \xi) d\xi, \quad d\xi = (2\pi)^{-n} d\xi$$

essendo q una certa ampiezza da determinare.

Applichiamo P ad E , otteniamo:

$$PE(t, x) = \int \exp[ix\xi] \tilde{q}(t, x, \xi) d\xi$$

essendo $\tilde{q}(t, x, \xi) = \exp[-ix\xi] P(\exp[ix\xi] q(t, x, \xi))$. Si cerca quindi di scegliere $q(t, x, \xi)$ decrescente in modo esponenziale per $|\xi| \rightarrow \infty$, $t > 0$ e tale che $\tilde{q}(t, x, \xi) = 0$.

Osservando che

$$\partial_t(\exp[ix\xi] q) = \exp[ix\xi] \partial_t q,$$

$$\partial_i^2(\exp[ix\xi] q) = \exp[ix\xi] \partial_i^2 q$$

$$\partial_{x_j}(\exp[ix\xi] q) = \exp[ix\xi] (i\xi_j q + \partial_{x_j} q),$$

$$\partial_{x_i} \partial_{x_j}(\exp[ix\xi] q) = \exp[ix\xi] (-\xi_i \xi_j q + i\xi_j \partial_{x_i} q + i\xi_i \partial_{x_j} q + \partial_{x_i} \partial_{x_j} q)$$

si ottiene

$$(3.2) \quad \begin{aligned} \tilde{q}(t, x, \xi) = & [t\partial_i^2 + itA_0(t, x, \xi)\partial_i + tA_0(t, x, \partial_x)\partial_i - \\ & - tA(t, x, \xi) + 2itM(t, x, \xi, \partial_x) + tA(t, x, \partial_x) + \alpha(t, x)\partial_i + \\ & + iB(t, x, \xi) + B(t, x, \partial_x) + c(t, x)] q(t, x, \xi). \end{aligned}$$

Cerchiamo q nella forma

$$(3.3) \quad \begin{cases} q(t, x, \xi) \sim \sum_{j \geq 0} q_{-j}(t, x, \xi) \\ q_{-j} \in \psi^{-j}, \quad j \geq 0 \end{cases}$$

dove il significato di $q \sim \sum_{j \geq 0} q_{-j}$ verrà opportunamente precisato.

Utilizzando le (2.2)-(2.6), scriviamo formalmente

$$\begin{aligned} A(t, x, \partial_x) &= \sum_{k \geq 0} t^k A_k(x, \partial_x), & A(t, x, \xi) &= \sum_{k \geq 0} t^k A_k(x, \xi), \\ A_0(t, x, \partial_x) &= \sum_{k \geq 0} t^k A_{0k}(x, \partial_x), & A_0(t, x, \xi) &= \sum_{k \geq 0} t^k A_{0k}(x, \xi), \\ R(t, x, \partial_x) &= \sum_{k \geq 0} t^k B_k(x, \partial_x), & B(t, x, \xi) &= \sum_{k \geq 0} t^k B_k(x, \xi), \\ M(t, x, \xi, \partial_x) &= \sum_{k \geq 0} t^k M_k(x, \xi, \partial_x), & \alpha(t, x) &= \sum_{k \geq 0} t^k \alpha_k(x), \\ c(t, x) &= \sum_{k \geq 0} t^k c_k(x). \end{aligned}$$

Raggruppiamo ora, in (3.2) i termini di omogeneità corrispondente; veniamo così a definire i seguenti operatori:

$$(3.4) \quad \begin{cases} L_1 = t \partial_t^2 + (2it A_{00}(x, \xi) + \alpha_0(x)) \partial_t - t A_0(x, \xi) + i B_0(x, \xi) \\ L_{-k} = 2it^{k+2} A_{0, k+1}(x, \xi) \partial_t + 2it^{k+1} A_{0, k}(x, \partial_x) \partial_t - \\ \quad - t^{k+2} A_{k+1}(x, \xi) + 2it^{k+1} M_k(x, \xi, \partial_x) + \\ \quad + H(k) t^k A_{k-1}(x, \partial_x) + t^{k+1} \alpha_{k+1}(x) \partial_t + \\ \quad + it^{k+1} B_{k+1}(x, \xi) + t^k B_k(x, \partial_x) + t^k c_k(x) \end{cases}$$

essendo $H(0) = 0$, $H(k) = 1$ se $k > 0$.

Osserviamo che per ogni $m \in \mathbb{R}$ si ha

$$L_1: \psi^m \rightarrow \psi^{m+1}, \quad L_{-k}: \psi^m \rightarrow \psi^{m-k}.$$

Tenendo conto di (3.4) formalmente si può scrivere

$$\tilde{q}(t, x, \xi) = L_1 q + \sum_{k \geq 0} L_{-k} q.$$

Scrivendo $q \sim \sum_{j \geq 0} q_{-j}$ con $q_{-j} \in \psi^{-j}$, si ottiene, raggruppando i termini di uguale omogeneità

$$\begin{aligned} \tilde{q}(t, x, \xi) = L_1 q_0 + (L_1 q_{-1} + L_0 q_0) + \\ + (L_1 q_{-2} + L_0 q_{-1} + L_{-1} q_0) + \dots = \sum_{j \geq 0} Q_{-j} \end{aligned}$$

essendo

$$(3.5) \quad Q_{-j} = \sum_{k=0}^j L_{1-k} q_{k-j}.$$

Per avere $\tilde{q}(t, x, \xi) = 0$ arriviamo alle seguenti equazioni di trasporto

$$(3.6) \quad \begin{cases} L_1 q_0 = 0, & t > 0 \\ L_1 q_{-j} = - \sum_{k=1}^j L_{1-k} q_{k-j}, & t > 0, j \geq 1. \end{cases}$$

4. Soluzione dell'equazione $L_1 q_0 = 0$.

Risolviamo dunque la prima equazione di trasporto.

Mediante opportune trasformazioni e cambiamenti di variabile, si riconduce l'equazione data ad una equazione ipergeometrica confluyente dipendente dai parametri $(x, \xi) \in R_x^n \times R_\xi^n$. Allo scopo poniamo

$$q_0(t, x, \xi) = \exp[-itA_{00} - tD] \hat{q}_0(t, x, \xi)$$

essendo D definito dalla (2.7).

L'equazione

$$(4.1) \quad \exp[itA_{00} + tD] L_1 [\exp[-itA_{00} - tD] \hat{q}_0(t, x, \xi)] = 0$$

diventa

$$[t\partial_t^2 + (\alpha_0 - 2tD)\partial_t + (-i\alpha_0 A_{00} - D\alpha_0 + iB_0)] \hat{q}_0(t, x, \xi) = 0.$$

Ponendo inoltre $2tD = z$, si arriva all'equazione

$$2D[z\partial_z^2 + (\alpha_0 - z)\partial_z - (\alpha_0/2 + i(A_{00}\alpha_0 - B_0))/2D]q_0(z, x, \xi) = 0,$$

da cui

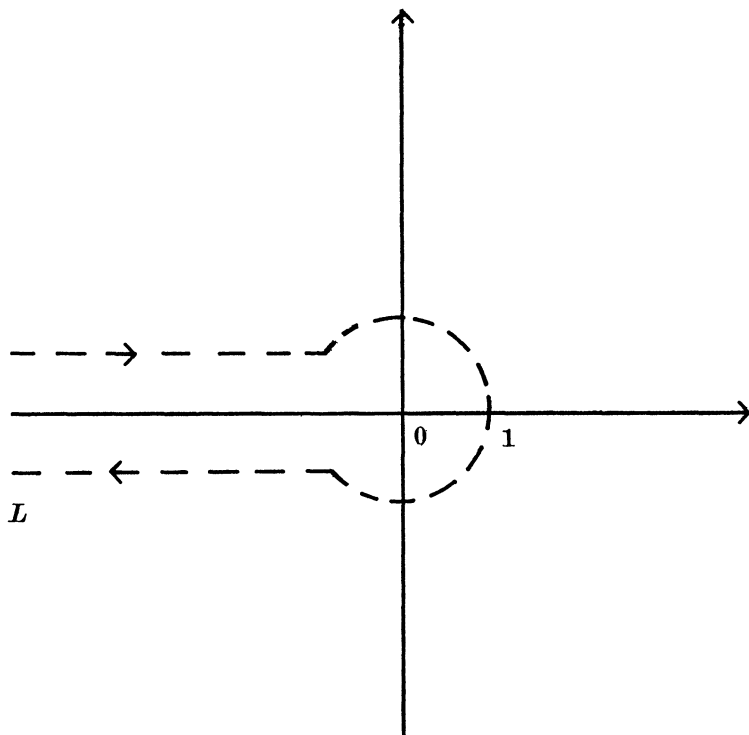
$$(4.2) \quad [z\partial_z^2 + (\alpha_0 - z)\partial_z - (\alpha_0/2 + i(A_{00}\alpha_0 - B_0))/2D]q_0(z, x, \xi) = 0.$$

Tale equazione è una equazione ipergeometrica confluyente di parametri $b = \alpha_0$, $a = \alpha_0/2 + i(A_{00}\alpha_0 - B_0)/2D$.

Dato il tipo richiesto di comportamento all'infinito, scegliamo quella soluzione, tra le due linearmente indipendenti che tale equazione ammette, che in [7] viene indicata con $\psi(a, b, z)$ e che ha la seguente rappresentazione integrale

$$(4.3) \quad \psi(a, b, z) = \exp[-a\pi i] \Gamma(1-a) \int_L \exp[z\sigma] \sigma^{a-1} (1-\sigma)^{b-a-1} d\sigma$$

essendo $d\sigma = (2\pi)^{-n} d\sigma$, ed essendo L un contorno del tipo



Da tale rappresentazione ricaviamo, per a , la seguente restrizione: $a \neq n$, per ogni $n \in N$.

5. Soluzione delle altre equazioni di trasporto.

La $(l+1)$ -sima equazione di trasporto ha la forma seguente

$$(5.1) \quad L_1 q_{-(l+1)} = - \sum_{k=0}^l L_{-k} q_{k-1}.$$

Operiamo ancora la trasformazione

$$\begin{aligned} \exp[itA_{00} + tD]L_1 \exp[-itA_{00} - tD]\hat{q}_{-(l+1)} = \\ = - \sum_{k=0}^l \exp[itA_{00} + tD]L_{-k} \exp[-itA_{00} - tD]\hat{q}_{k-l} \end{aligned}$$

otteniamo

$$\begin{aligned} t\hat{\partial}_t^2 + (\alpha - 2tD)\partial_t + (-i\alpha_0 A_{00} + D\alpha_0 + iB_0)\hat{q}_{-(l+1)} = \\ = - \sum_{k=0}^l (L_{-k} + M_{-k})\hat{q}_{k-l} \end{aligned}$$

essendo

$$\begin{aligned} M_{k-} = t^{k+2} \left[2i\varphi \sum_{j=1}^n a_{0j}^{(k+1)} \xi_j - 2i \sum_{j=1}^n a_{0j}^{(k)} \varphi_j \partial_t + \right. \\ \left. + 2i \sum_{j=1}^n a_{0j}^{(k)} \varphi \varphi_j - 2i \sum_{i,j=1}^n a_{ij}^{(k)} \xi_i \varphi_j + H(k) \sum_{i,j=1}^n a_{ij}^{(k-1)} \varphi_i \varphi_j \right] + \\ + t^{k+1} \left[-2i \sum_{j=1}^n a_{0j}^{(k)} \varphi_j - 2i \sum_{j=1}^n a_{0j}^{(k)} \varphi \partial_{x_j} - \right. \\ \left. - H(k) \sum_{i,j=1}^n a_{ij}^{(k-1)} \varphi_{ij} - H(k) \sum_{i,j=1}^n a_{ij}^{(k-1)} (\varphi_j \partial_{x_i} + \varphi_i \partial_{x_j}) - \alpha_{k+1} \varphi - \sum_{j=1}^n b_j \varphi_j \right] \end{aligned}$$

ove si è posto $\varphi = iA_{00} + D$, $\varphi_j = \partial_{x_j}$.

Con il cambiamento di variabile $2tD = z$ si ottiene

$$(5.2) \quad [z\partial_z^2 + (b-z)\partial_z - a]\hat{q}_{-(i+1)} = -\frac{1}{2D}\left[\sum_{k=0}^i (L_{-k} + M_{-k})\hat{q}_{-i}\right]$$

dove a e b sono definiti come nel § 4.

Indicando genericamente con $\varrho_{-(k+1)}(x, \xi)$ una funzione di omogeneità $-(k+1)$ in ξ , siamo indotti a dover risolvere equazioni del tipo

$$(5.3) \quad [z\partial_z^2 + (b-z)\partial_z - a]\hat{q}_{-(l+1)} = \sum_{k=0}^l A_k \hat{q}_{k-l}$$

essendo A_k uno degli operatori seguenti

$$(5.4) \quad \left\{ \begin{array}{ll} (a) & \varrho_{-(k+1)} z^{k+2} \partial_z \\ (b) & \varrho_{-(k+1)} z^{k+1} \partial_{x_j} \partial_z \\ (c) & \varrho_{-(k+1)} z^{k+2} \\ (d) & \varrho_{-(k+1)} z^{k+1} \partial_{x_j} \\ (e) & \varrho_{-(k+1)} z^k \partial_{x_i} \partial_{x_j} \\ (f) & \varrho_{-(k+1)} z^k \partial_{x_i} \partial_{x_j} \\ (g) & \varrho_{-(k+1)} z^{k+1} \\ (h) & \varrho_{-(k+1)} z^k \partial_{x_j} \\ (i) & \varrho_{-(k+1)} z^k \end{array} \right.$$

Siano ora S_0 e $\hat{S}_0$ i seguenti insiemi

$$(5.5) \quad \left\{ \begin{array}{l} S_0 = \{\sigma, \sigma \in C, |\operatorname{Im} \sigma| < 2, \sigma \neq 0, \sigma \neq 1, \sigma \neq x, x \in R, x \leq 0\} \\ \hat{S}_0 = \{\sigma, \sigma \in C, |\operatorname{Im} \sigma| < 2, \sigma \neq 0, \sigma \neq 1\} \end{array} \right.$$

DEFINIZIONE 1.5. Con $\mathcal{A}_{-k, j_1, j_2}$, $k, j_1, j_2 \in Z_+$, indichiamo l'insieme delle funzioni

$$\psi(\sigma, x, \xi) \in C^\infty(S_0 \times R_x^n \times R_\xi^n)$$

tali che

$$1) \quad \psi(\sigma, x, \lambda\xi) = \lambda^{-k}\psi(\sigma, x, \xi), \quad \lambda > 0.$$

2) Per ogni $\alpha, \beta \in (Z_+)^n$, si può scrivere $\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta \psi(\sigma, x, \xi)$ nella forma seguente

$$\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta \psi(\sigma, x, \xi) = \sum_{i_1=0}^{m_1^{\alpha\beta}} \sum_{i_2=0}^{m_2^{\alpha\beta}} \psi_{i_1 i_2}^{\alpha\beta}(\sigma, x, \xi) (\log \sigma)^{i_1} (\log(1-\sigma))^{i_2}$$

$m_1^{\alpha\beta}, m_2^{\alpha\beta} \in Z_+$, essendo $\psi_{i_1 i_2}^{\alpha\beta}(\sigma, x, \xi)$ olomorfe in $\hat{S}_0$ con polo di ordine j_1 al più in $\sigma = 0$ e j_2 al più in $\sigma = 1$.

3) Per ogni insieme Ω tale che $\Omega \subset\subset R_x^n$, e per ogni $\delta \in]0, 1[$ vale la stima

$$\sup_{\substack{(x, \xi) \in O \times S^{n-1} \\ |\operatorname{Im} \sigma| \leq 1-\delta \\ |\operatorname{Re} \sigma| > 1}} |\operatorname{Re} \sigma|^{2j_1+2j_2} |\psi_{i_1 i_2}^{\alpha\beta}(\sigma, x, \xi)| < +\infty.$$

La determinazione del logaritmo è fatta tagliando C lungo la semiretta $x + iy$, con $y = 0, x \leq 0$, e si intende reale il logaritmo di un argomento positivo.

DEFINIZIONE 2.5. Se $\psi \in \mathcal{A}_{-k, j_1, j_2}$ indichiamo con $I(z, x, \xi; \psi)$ il seguente integrale:

$$I(z, x, \xi; \psi) = \exp[-a\pi i] \Gamma(1-a) \int_L \exp[z\sigma] \sigma^{a-1} (1-\sigma)^{b-a-1} \psi(\sigma, x, \xi) d\sigma.$$

PROPOSIZIONE 1.5. Le equazioni di trasporto (3.4) ammettono una soluzione del tipo

$$q_{-k}(t, x, \xi) = \exp[-itA_{00} - tD] \hat{q}_{-k}(2tD, x, \xi)$$

essendo $\hat{q}_{-k}(z, x, \xi) = I(z, x, \xi; \psi_{-k})$ con $\psi_{-k} \in \mathcal{A}_{-k, 2k, 2k}$.

DIMOSTRAZIONE. Si ragiona per induzione su k . Per $k = 0$, l'equazione $L_1 q_0 = 0$ ha, come abbiamo visto, la soluzione cercata. Supponiamo ora che $\hat{q}_{-h}, h = 0, 1, \dots, l$, siano del tipo desiderato, ossia

tali che

$$\hat{q}_{-h}(z, x, \xi) = I(z, x, \xi; \psi_{-h}) \quad \text{con} \quad \psi_{-h} \in \mathcal{A}_{-h, 2h, 2h}$$

si tratta di dimostrare che anche $\hat{q}_{-(l+1)} = I(z, x, \xi; \psi_{-(l+1)})$ con $\psi_{-(l+1)} \in \mathcal{A}_{-(l+1), 2(l+1), 2(l+1)}$.

Tenendo presente le omogeneità e il comportamento dei poli, è facile vedere che per risolvere le equazioni (5.3) basta risolvere la seguente equazione

$$\begin{aligned} (z\partial_z^2 + (b-z)\partial_z - a)\hat{q} = \\ = \exp[-a\pi i] \Gamma(1-a) \int_L \exp[z\sigma] \sigma^{a-1} (1-\sigma)^{b-a-1} \psi(\sigma, x, \xi) d\sigma \end{aligned}$$

con $\psi \in \mathcal{A}_{-(l+1), 2(l+1), 2(l+1)}$.

Cerchiamo $\hat{q}$ sotto la forma

$$\hat{q}(z, x, \xi) = \exp[-a\pi i] \Gamma(1-a) \int_L \exp[z\sigma] \sigma^{a-1} (1-\sigma)^{b-a-1} v(\sigma, x, \xi) d\sigma.$$

Per determinare v , basta risolvere la seguente equazione

$$(\sigma - \sigma^2) v' = \psi(\sigma, x, \xi)$$

e, quindi, l'equazione

$$(5.6) \quad v' = \psi^*(\sigma, x, \xi) \quad \text{con} \quad \psi^* \in \mathcal{A}_{-(l+1), 2(l+1)+1, 2(l+1)+1}.$$

In un intorno di $\sigma = 0$ il secondo membro è del tipo

$$\sigma^{-2(l+1)-1} \sum_{l_1=0}^{m_1} \tilde{\psi}_{l_1} (\log \sigma)^{l_1},$$

$\tilde{\psi}_{l_1}$ olomorfa, e, quindi, una soluzione, in un intorno di $\sigma = 0$ è una funzione del tipo

$$v = \sigma^{-2(l+1)} \sum_{n_1=0}^{m'_1} \tilde{\tilde{\psi}}_{n_1} (\log \sigma)^{n_1}, \quad \tilde{\tilde{\psi}}_{n_1} \text{ olomorfa.}$$

Analogamente, in un intorno di $\sigma = 1$. La tesi segue poi per l'unicità della soluzione olomorfa in ogni aperto di $C \setminus \{0, 1\}$ e dal fatto che $(\log \sigma)^m$ e $(\log(1 - \sigma))^n$, $m, n \in \mathbb{Z}_+$, sono linearmente indipendenti.

Un risultato analogo vale per $\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta \hat{q}$ e per la verifica della condizione 3, definizione 1.5.

PROPOSIZIONE 2.5. Sia $\psi_j \in \mathcal{A}_{-j, 2j, 2j}$, allora per $I(z, x, \xi; \psi_j)$, $z \in R_+$, $x \in R_x^n$, $\xi \in R_\xi^n$ (si veda la definizione 2.5, a, b funzioni C^∞), valgono le seguenti stime:

$$1) \ I(z, x, \xi; \psi_j) = z^{-\operatorname{Re} a + \varepsilon + 2j} (C_{1j} + O(1/z)) \text{ per } z \rightarrow +\infty,$$

$$2) \ I(z, x, \xi; \psi_j) = z^{1 - \operatorname{Re} b - \varepsilon} (C_{2j} + O(z)) \text{ per } z \rightarrow 0_+ \text{ essendo } C_{1j}, C_{2j} \text{ costanti opportune, } \varepsilon > 0.$$

DIMOSTRAZIONE. 1) Operando il cambiamento di variabile $z\sigma = \tau$, si ha, tenendo conto che $(1 - \tau/z)^{b-a-1}$ è una quantità limitata per $\tau \rightarrow +\infty$:

$$\begin{aligned} |I(z, x, \xi; \psi_j)| &\leq \\ &\leq C' \left| \int_L \exp[\tau] (\tau/z)^{a-1} (1 - \tau/z)^{b-a-1} (1/z) \psi_j(\tau/z, x, \xi) d\tau \right| \leq \\ &\leq C'_j \left| \int_L \exp[-\operatorname{Re} \tau] z^{\operatorname{Re} a} |\tau|^{\operatorname{Re} a-1} |\log(\tau/z)|^M (1 + |\tau/z|)^{4j} (\tau/z)^{-2j} d\tau \right| \\ &\leq C'_j \left[\int_L \exp[-|\operatorname{Re} \tau|] |\tau|^{\operatorname{Re} a-1-2j} |\log \tau|^M (1 + |\tau|)^{4j} d\tau \right] z^{-\operatorname{Re} a + \varepsilon + 2j} \leq \\ &\leq C_{1j} z^{-\operatorname{Re} a + \varepsilon + 2j}. \end{aligned}$$

2) Analogamente, per $z \rightarrow 0_+$, operando ancora il cambiamento di variabile $z\sigma = \tau$, si ha

$$\begin{aligned} |I(z, x, \xi; \psi_j)| &\leq \\ &\leq C' \frac{1}{z} \int_L \left| \exp[\tau] \left(\frac{\tau}{z}\right)^{a-1} \left(1 - \frac{\tau}{z}\right)^{b-a-1} \left(\frac{\tau}{z}\right)^{-2j} \left(1 - \frac{\tau}{z}\right)^{-2j} \right. \\ &\quad \cdot \left. \left| \log \frac{\tau}{z} \right|^M \left| \log \left(1 - \frac{\tau}{z}\right) \right|^N \left| 1 + \frac{\tau}{z} \right|^{4j} d\tau \right| \leq \\ &\leq C_{2j} z^{-1 - \operatorname{Re} a + 1 - \operatorname{Re} b + \operatorname{Re} a + 1 + 2j + 2j - 4j - \varepsilon} = C_{2j} z^{1 - \operatorname{Re} b - \varepsilon}. \end{aligned}$$

Nelle precedenti disuguaglianze si è tenuto conto della limitatezza, per $z \rightarrow O_+$, della seguente quantità:

$$\int_L \exp[-|\operatorname{Re} \tau|] |\tau|^{\operatorname{Re} a - 1 - 2j} |z - \tau|^{\operatorname{Re} b - \operatorname{Re} a - 1 - 2j} |\log \tau|^M \cdot |\log(z - \tau)|^N ||z| + |\tau|^{4j} d\tau.$$

6. Costruzione di una soluzione.

Definiamo alcune classi di simboli:

DEFINIZIONE 1.6. Siano $m, p \in R$, indichiamo con $\tilde{S}_\mu^m$ la classe delle funzioni $p(t, x, \xi) \in C^\infty([0, T[; S^m(R_x^n \times R_\xi^n))$ tali che

$$|t^\mu (t \partial_t)^k \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta p(t, x, \xi)| \leq C(1 + |\xi|)^{m - |\beta|}$$

per ogni ξ , $|\xi| > 1$, per ogni $x \in \Omega \subset R_x^n$, per ogni k, α, β .

Si dimostrano, analogamente a come viene fatto in [6] le seguenti proposizioni:

PROPOSIZIONE 1.6. Sia $(m_j)_{j \in N}$ una successione che diverge decrescendo a $-\infty$ per $j \rightarrow +\infty$. Siano p_j funzioni tali che $p_j \in \tilde{S}_\mu^{m_j}$, $j = 1, 2, \dots$, esiste allora una funzione $p \in \tilde{S}_\mu^m$ tale che

$$p \sim \sum_{j \geq 1} p_{m_j}.$$

nel senso che per ogni $N > 0$, la differenza $p - \sum_{j=1}^{N-1} p_j \in \tilde{S}_\mu^{m_N}$.

PROPOSIZIONE 2.6. Valgono le seguenti proprietà:

- 1) Se $p \in \tilde{S}_\mu^m$ e $q \in \tilde{S}_\mu^{m'}$, allora $pq \in \tilde{S}_\mu^{m+m'}$,
- 2) Per ogni t fissato, $t > 0$, $p(t, x, \xi) \in \tilde{S}_{1,0}^m$ (classe di Hormander) [6].

Se con OPS_μ^m indichiamo l'insieme degli operatori definiti nel modo seguente:

$$p(t, x, D_x) u(x) = \int \exp[ix\xi] p(t, x, \xi) \hat{u}(\xi) d\xi, \quad u \in \mathcal{D}'(R_x^n)$$

(integrale oscillante), si ha

PROPOSIZIONE 3.6. Se $p(t, x, D_x) \in OP\tilde{S}_\mu^m$ e $q(t, x, D_x) \in OP\tilde{S}_{\mu'}^{m'}$, allora la composizione $p(t, x, D_x) o q(t, x, D_x) \in OP\tilde{S}_{\mu+\mu'}^{m+m'}$. con simbolo $c(t, x, \xi)$ tale che

$$c(t, x, \xi) \sim \sum_{\alpha \geq 0} \frac{1}{\alpha!} \partial_\xi^\alpha p(t, x, \xi) D_x^\alpha q(t, x, \xi).$$

Vale inoltre la

PROPOSIZIONE 4.6. Siano $q_{-j}(t, x, \xi)$ le soluzioni delle equazioni di trasporto (5.3), la cui forma è stata dimostrata nella proposizione 1.5, allora, per ogni $\varepsilon > 0$ si ha che

$$q_{-j}(t, x, \xi) \in \tilde{S}_{b-1+\varepsilon}^{1-\bar{b}-\varepsilon-j} \quad \bar{b} = \sup_{x \in \Omega \subset \subset R_x^n} \max \{0, \operatorname{Re} b\}.$$

DIMOSTRAZIONE. Dalla proposizione 2.5, si ha che

$$\hat{q}(2tD, x, \xi) = z^{-\operatorname{Re} a + \varepsilon + 2j} (C_{1j} + O(1/2tD)) \quad \text{per} \quad tD \rightarrow +\infty,$$

$$\hat{q}(2tD, x, \xi) = z^{1-\operatorname{Re} b - \varepsilon} (C_{2j} + O(2tD)) \quad \text{per} \quad tD \rightarrow 0_+.$$

Ora

$$q_{-j}(t, x, \xi) = \exp[-itA_{00}(x, \xi) - tD(x, \xi)] \hat{q}_{-j}(2tD(x, \xi), x, \xi).$$

Da qui si ha che

$$|t^{\bar{b}+\varepsilon-1} q_{-j}(t, x, \xi)| \leq C(1 + |\xi|)^{1-\bar{b}-\varepsilon-j}$$

Proviamo ora la seguente disuguaglianza

$$|t^{\bar{b}+\varepsilon-1} (t\partial_x)^k \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta q_{-j}(t, x, \xi)| \leq C(1 + |\xi|)^{1-\bar{b}-\varepsilon-j-|\beta|}.$$

per ogni $k \in N$, per ogni α, β multiindici, per ogni $t \in [0, T]$, per ogni $x \in \Omega \subset \subset R^n$, per ogni $\xi \in R^n$, $|\xi| \geq 1$.

Allo scopo è sufficiente controllare q_{-j} per ogni singola derivata. Ora

$$\partial_{x_k} q_{-j}(t, x, \xi) = \partial_{x_k} h(2tD(x, \xi), x, \xi)$$

dove

$$h(z, x, \xi) = \exp [-izA_{00}(x, \xi)/2D(x, \xi) - z/2] \hat{q}_{-j}(z, x, \xi).$$

Si noti che h è positivamente omogenea di grado $-j$ rispetto a ξ .

Dunque

$$\begin{aligned} \partial_{x_k} h(2tD(x, \xi), x, \xi) &= (\partial_z h)(2tD, x, \xi) 2t\partial_{x_k} D(x, \xi) + (\partial_{x_k} h)(2tD, x, \xi) = \\ &= \left\{ (z\partial_z h)(2tD, x, \xi) \partial_{x_k} D(x, \xi) \cdot \frac{1}{D(x, \xi)} + (\partial_{x_k} h)(z, x, \xi) \right\}_{z=2tD(x, \xi)}. \end{aligned}$$

Osservando che $z\partial_z h$ ha lo stesso sviluppo asintotico di h sia per $z \rightarrow +\infty$, che per $z \rightarrow O_+$, si ha che

$$|t^{\bar{b}+\varepsilon-1} \partial_{x_k} q_{-j}(t, x, \xi)| \leq C(1 + |\xi|)^{1-\bar{b}-\varepsilon-j}.$$

Consideriamo ora $\partial_{\varepsilon_k} q_{-j}$. Usando le stesse notazioni di prima, poniamo

$$\partial_{\varepsilon_k} q_{-j}(t, x, \xi) = \partial_{\varepsilon_k} h(2tD(x, \xi), x, \xi).$$

Si ha quindi:

$$\begin{aligned} \partial_{\varepsilon_k} h(2tD(x, \xi), x, \xi) &= \\ &= (\partial_z h)(2tD, x, \xi) 2tD(x, \xi) \partial_{\varepsilon_k} D(x, \xi) \cdot \frac{1}{D(x, \xi)} + (\partial_{\varepsilon_k} h)(2tD, x, \xi) = \\ &= \left\{ (z\partial_z h)(z, x, \xi) \partial_{\varepsilon_k} D(x, \xi) \cdot \frac{1}{D(x, \xi)} + (\partial_{\varepsilon_k} h)(z, x, \xi) \right\}_{z=2tD}. \end{aligned}$$

La conclusione segue dal fatto che $h \in O^{-j}$, e che

$$\left| \partial_{\varepsilon_k} D(x, \xi) \cdot \frac{1}{D(x, \xi)} \right| \leq C/|\xi|.$$

Per stimare $t\partial_z$ si procede allo stesso modo osservando che l'operatore $z\partial_z$ non altera l'andamento asintotico.

Poniamo $q(t, x, \xi) \sim \sum_{j \geq 0} q_{-j}(t, x, \xi)$ allora $q \in S_{\bar{b}-1-\varepsilon}^{1-\bar{b}+\varepsilon} \bmod \tilde{S}_{\bar{b}-1-\varepsilon}^{-\infty} = \bigcap_{m \in \mathbb{Z}} \tilde{S}_{\bar{b}-1-\varepsilon}^m$.

DEFINIZIONE 2.6. Siano $k \in \mathbb{Z}_+$, $\mu \in \mathbb{R}$, definiamo $C_\mu^k([0, T] \times \mathbb{R}_x^n)$ l'insieme delle funzioni $u \in C^{(k)}([0, T]; L^2(\mathbb{R}_x^n))$ tali che

$$\sup_{t \in [0, T]} \left[t^\mu \sum_{j=1}^k \|(t \partial_t)^j u(t, \cdot)\|_{H^{k-j}(\mathbb{R}_x^n)}^2 \right]^{\frac{1}{2}} < +\infty.$$

OSSERVAZIONE 1.6. Se $u \in C_\mu^k$ allora $u \in H^k([\lambda, T] \times \mathbb{R}_x^n)$ per ogni λ tale che $T > \lambda > 0$.

LEMMA 1.6. Sia C un operatore tale che $C \in OPS_\mu^0$, propriamente supportato, $C = C^*$ e tale che per ogni $\Omega \subset \subset \mathbb{R}_x^n$ si ha

$$(6.1) \quad \liminf_{|\xi| \rightarrow \infty} \left(\inf_{\substack{x \in \Omega \subset \subset \mathbb{R}_x^n \\ t \in [0, T]}} t^\mu p(t, x, \xi) \right) > 0$$

allora esiste un operatore B , $B \in \tilde{S}_{\mu/2}^0(\Omega \times \mathbb{R}_\xi^n)$ propriamente supportato tale che $C - B^* B \in \tilde{S}_\mu^{-\infty}$.

DIMOSTRAZIONE. Dalla (6.1) si deduce che possiamo trovare una funzione cut-off $\chi(x)$ tale che, se poniamo

$$b_0(t, x, \xi) = \chi(x) \sqrt{p(t, x, \xi)} \in \tilde{S}_{\mu/2}^0(\Omega' \times \mathbb{R}_\xi^n)$$

($\Omega' \subset \subset \Omega$) si ha $C - B_0^* B_0 \in \tilde{S}_\mu^{-1}$ con $B_0(t, x, D_x)$ l'operatore associato a b_0 .

Ragionando per induzione come in [6], si ha che per ogni j , esiste $B_{-j} \in \tilde{S}_{\mu/2}^{-j}$ tale che

$$C - (B_0 + \dots + B_{-j})^* (B_0 + \dots + B_{-j}) \tilde{S}_\mu^{-j-1}.$$

E questo completa la dimostrazione del lemma.

PROPOSIZIONE 5.6. Sia $p \in \tilde{S}_\mu^0(\Omega \times \mathbb{R}_\xi^n)$, allora $p: C_\lambda^0 \rightarrow C_{\lambda+\mu}^0$ con continuità.

DIMOSTRAZIONE. La dimostrazione è come in [6] e si fonda sul lemma 1.6.

PROPOSIZIONE 5.7. Sia $E(t, x) = \int \exp[ix\xi] q(t, x, \xi) d\xi$, allora $E \in C_{b-1-\varepsilon}^{(-n/2+b-1)}$. Inoltre $E(t, x) \in C^\infty([\varepsilon, T] \times \mathbb{R}_x^n)$ per ogni $\varepsilon > 0$.

DIMOSTRAZIONE. Basta osservare che $E = q(t, x, D_x) \delta(x)$ e che per ogni $\varepsilon > 0$ $\delta(x) \in C_{-n/2-\varepsilon}^0$.

BIBLIOGRAFIA

- [1] M. S. BAOUENDI - C. GOULAOUIC, *Régularité et théorie spectrale pour une classe d'opérateurs elliptiques dégénérés*, Arch. Rational Mech. Anal., **34-5** (1969), pp. 361-379.
- [2] P. BOLLEY - J. CAMUS, *Sur une classe d'opérateurs elliptiques et dégénérés à plusieurs variables*, Bull. Soc. Math. France, Mémoire **34** (1973), pp. 55-140.
- [3] P. BOLLEY - J. CAMUS, *Régularité pour une classe de problèmes aux limites elliptiques dégénérés variationnels*, Bollettino U.M.I., (5), **14-B** (1977), pp. 77-100.
- [4] A. BOVE - J. E. LEWIS - C. PARENTI, *Parametrix for a characteristic Cauchy problem*, preprint, 1983.
- [5] C. GOULAOUIC - N. SHIMAKURA, *Régularité Hölderienne de certain problèmes aux limites elliptiques dégénérés*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, **10** (1983), pp. 79-108.
- [6] L. HÖRMANDER, *Fourier Integral Operators, I*, Acta Math., **127** (1971), pp. 87-183.
- [7] W. MAGNUS - F. OBERHETTINGER - F. G. TRICOMI, *Higher Transcendental Functions*, vol. I, McGraw-Hill Book Company, 1953.

Manoscritto pervenuto in redazione il 24 settembre 1984.