Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova

Wolfram Büttner

Automorphismengruppen von Translationsebenen, die gewisse verallgemeinerte Elationen besitzen

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 74 (1985), p. 1-5

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1985__74__1_0>

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1985, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (http://rendiconti.math.unipd.it/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques

http://www.numdam.org/

REND. SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol. 74 (1985)

Automorphismengruppen von Translationsebenen, die gewisse verallgemeinerte Elationen besitzen.

WOLFRAM BÜTTNER (*)

Unter einer Translationsebene $(V, \mathcal{N})$ verstehen wir im folgenden einen endlichdimensionalen Vektorraum V, der ein Spread $\mathcal{N}$ besitzt, d. h. ein System halbdimensionaler Unterräume, die sich paarweise trivial schneiden und den Raum überdecken. Ein Automorphismus von $(V, \mathcal{N})$ ist eine semilineare Bijektion des Raumes auf sich, die $\mathcal{N}$ invariant läßt. Ist diese Bijektion linear, so sprechen wir von einem linearen Automorphismus der Ebene. Es existieren zahlreiche Beispiele von Ebenen $(V, \mathcal{N})$, die lineare Automorphismen besitzen, deren Ordnung gleich der Vektorraumdimension ist. Mit der folgenden Definition erfassen wir einen Teil dieser Beispiele.

DEFINITION. $(V, \mathcal{N})$ bezeichne eine Translationsebene der Charakteristik 2, mit $\dim V < \infty$. Ein linearer Automorphismus s der Ebene von 2-Potenzordnung heißt maximal, falls $\langle s \rangle$ direkt unzerlegbar auf V operiert.

Man beachte, daß diese Definition von dem Körper abhängt, über dem V konstruiert wurde. Ist s eine Involution, dann liegt eine desarguessche Ebene vor. Wir beweisen in dieser Note den folgenden Satz.

SATZ. *$(V, \mathcal{N})$ sei eine Translationsebene der Charakteristik 2, die maximale lineare Automorphismen zulasse.*

$$G := \langle s \mid s \text{ maximaler linearer Automorphismus von } (V, \mathcal{N}) \rangle .$$

(*) Indirizzo dell'A.: Fachbereich Mathematik, Technische Hochschule Darmstadt, Schloßgartenstraße 7, D-6100 Darmstadt.

Dann gilt:

i) *Die maximalen linearen Automorphismen sind verallgemeinerte Elationen, ihre Ordnung ist gleich der Dimension von* V.

ii) *Enthält* G *maximale lineare Automorphismen* s, s', *so daß die Involutionen aus* $\langle s \rangle$ *bzw.* $\langle s' \rangle$ *nicht vertauschen, dann ist* V *ein (absolut) irreduzibler* G*-Modul. Für endliche Ebenen ist* G *eine der folgenden Gruppen.*

iii) $G \cong SL(2, 2^l) \cdot \langle s \rangle$ *mit* $o(s)/2 | l$.

iv) $G \cong Sz(q)$ *und* $o(s) = 4$.

v) $G \cong Z_n \cdot \langle s \rangle$. *Für jede Untergruppe* R *von* Z_n *gilt* $\dim V | |R| - 1$. *Ferner operiert* R *fixpunktfrei auf den Geraden sowie auf den von* O *verschiedenen Punkten von* $(V, \mathcal{N})$.

Bemerkung 1. Die in iii), iv) beschriebenen Möglichkeiten lassen sich durch Ebenen der Ordnung 64 realisieren [1]. Serien von Ebenen vom Typ (iv) sind etwa die Lüneburgebenen. Noch offen scheint die Frage der Existenz von Ebenen, die maximale lineare Automorphismen einer Ordnung 2^n $(n \geqslant 3)$ zulassen.

Bemerkung 2. Offen ist ferner die Frage, welche Struktur G hat, falls die Involutionen aus $\langle s \rangle$ (s durchläuft die maximalen linearen Automorphismen von G) eine elementar abelsche Gruppe bilden. Teilresultate liegen im Fall $\dim V = 4$ vor.

Die verwendete gruppentheoretische und geometrische Bezeichnungsweise ist die übliche. Es sei $V := V(2n, \mathbb{K})$ mit einem Körper $\mathbb{K}$ der Charakteristik 2. Für $|V| < \infty$ sei $\mathbb{K} \cong GF(q)$ mit $q = 2^m$ $(m \in \mathbb{N})$. $\mathcal{N}$ bezeichne einen Spread in V und G das Erzeugnis aller maximalen linearen Automorphismen von $(V, \mathcal{N})$. Für einen solchen Automorphismus s sei i_s die Involution aus $\langle s \rangle$.

Beweis des Satzes:

i) Ein maximaler linear Automorphismus s der Ordnung 2^r besitzt die eindeutig bestimmte Kompositionsreihe

$$\{0\} \subset V^{(s-1)^{2^{r-1}}} \subset \ldots \subset V^{(s-1)^{2^{r-1}}} = V^{(s^{2^{r-1}}-1)} = \mathbb{C}_V(i_s) \subset \ldots \subset V^{s-1} \subset V\,.$$

Da $i_s = s^{2^{r-1}}$ auf $(V, \mathcal{N})$ eine Elation oder eine Baerinvolution induziert gilt $\dim \mathbb{C}_V(i_s) = n$. $\langle s \rangle$ läßt eine « Gerade » aus $\mathcal{N}$ fest. Wegen der Eindeutigkeit der Kompositionsreihe von $\langle s\rangle$ fällt diese Gerade mit $C_V(i_s)$ zusammen. Folglich bewirkt i_s eine Elation auf $(V, \mathcal{N})$. Da die 2^r Kompositionsfaktoren 1-dimensional sind, gilt $\dim V = o(s)$.

ii) $\{0\} \subsetneq U \subset V$ sei ein G-invarianter Unterraum von V. s, s' bezeichnen maximale lineare Automorphismen, so daß $i_s, i_{s'}$ nicht miteinander vertauschen. U ist $\langle s\rangle$-bzw. $\langle s'\rangle$-invariant und liegt daher in den zu $\langle s\rangle$ bzw. $\langle s'\rangle$ gehörenden Kompositionsreihen. Wäre $\dim U \leqslant \dim V/2$, dann gälte $U \subseteq C_V(i_s) \cap C_V(i_{s'}) = \{0\}$ entgegen der Wahl von s und s'. Also $\dim U > \dim V/2$, d. h. $U \supseteq \langle C_V(i_s) \cup \cup\, C_V(i_{s'})\rangle = V$. Ersetzen wir V durch $V \bigotimes_{\mathrm{K}} L$ mit einem Erweiterungskörper L von K, dann lassen sich die gleichen Schlüsse anwenden. Folglich ist V ein absolut irreduzibler G-Modul Nach i) existieren in G Elationen, G_E bezeichne ihr Erzeugnis. Die Klassifikation der von den Elationen einer endlichen Translationsebene der Charakteristik 2 erzeugten Gruppen [3] zeigt, daß G_E zu einer der folgenden Gruppen isomorph ist: $SL(2, 2^l)$, $Sz(2^k)$ oder $N\cdot\langle i\rangle$ mit einer Involution i und einem Normalteiler N von ungerader Ordnung.

iii) Nehmen wir an $G_E \cong SL(2, 2^l)$. Bekanntlich gilt $\mathrm{Aut}\,(SL(2, 2^l) \cong SL(2, 2^l)\cdot Z_l$. Da $i_s \in G_E$ und $Z(G_E) = 1$ operiert $\langle s\rangle$ durch Konjugation treu auf G_E. $SL(2, 2^l)$ enthält nur involutorische 2-Elemente, folglich $o(s)/2 = \dim V/2 | l$.

iv) Ist G_E isomorph zu $Sz(2^k)$, dann hat der durch Konjugation mit s bewirkte Automorphismus von G_E eine Ordnung $\leqslant 4$. Falls $s^4 \neq 1$, dann wird G_E von s^4 zentralisiert. Die verallgemeinerte Elation s^4 läßt genau eine Gerade aus $\mathcal{N}$ fest, die folglich auch unter G_E fest bleibt. Nicht kommutierende Involutionen aus G_E induzieren jedoch auf $(V, \mathcal{N})$ Elationen mit verschiedenen Achsen. Also gilt $G_E = G \cong Sz(q)$.

v) Nehmen wir schließlich an $G_E = N\cdot\langle i_s\rangle$ mit einem Normalteiler N von G_E von ungerader Ordnung. $M := O_{2'}(G)$, also $M \supseteq N$.
Wie in ii) zeigt man, daß V irreduzibler $M\cdot\langle s\rangle$-Modul ist.

Der Satz von Clifford [2] S. 70 ff. mit M als Normalteiler liefert $V = \bigoplus_{i=1}^{t} W_i$, wobei W_i von allen paarweise isomorphen irreduziblen M-Teilmoduln von V erzeugt wird. $\langle s\rangle$ permutiert transitiv die Räume W_i. Operiert $\langle s\rangle$ scharf transitiv auf den W_i, dann ist M zyklisch und ein Erzeuger m von M besitzt genau $\dim V$ verschiedene Eigenwerte. Also läßt m genau 2 Geraden aus $\mathcal{N}$ fest, die von $\langle s \rangle$ permutiert werden. Folglich gilt $s^2 = 1$ und $(V, \mathcal{N})$ ist desarguessche Ebene.

Im nicht desarguesschen Fall bleiben die Moduln W_i fest unter einer Untergruppe $\langle s_0 \rangle$ von $\langle s \rangle$. $W_i = \bigoplus_j U_{ij}$ mit $U_{ij} \cong U_{ij'}$. Nach Theorem 5.6 aus [2], pg. 79 enthält W_i eine ungerade Anzahl von irreduziblen M-Teilmoduln. Auf diesen operiert $\langle s_0 \rangle$ und läßt folglich einen dieser Moduln, etwa U_{ij_0} fest. $U_{ij_0}^{\langle s \rangle}$ ist ein $M \cdot \langle s \rangle$ invarianter Unterraum von V, also gilt $V = U_{ij_0}^{\langle s \rangle}$. Dies erzwingt $U_{ij_0} = M_i$.

N_i bezeichne den Kern der Darstellung von M auf M_i. Also operiert M/N_i treu auf M_i. Da $\langle s \rangle$ die Moduln M_i transitiv bewegt, ist die Dimension von M_i eine 2-Potenz. In dieser Situation greift ein Satz aus [4] S. 711 und zeigt, daß M/N_i zyklisch ist. Folglich gilt $[M, M] \subseteq \bigcap_{i=1}^{t} N_i = \{1\}$ und M ist abelsch. Wir zeigen nun, daß M_i trivial ist und haben damit M als zyklische Gruppe nachgewiesen.

Die Achsen der Elationen aus G werden von G permutiert. Wir analysieren den Kern H der Darstellung von G auf diesen Geraden. Ähnlich wie für M erschließen wir:

Ist $O_{2'}(H)$ nichttrivial, dann operiert $O_{2'}(H) \cdot \langle s \rangle$ irreduzibel auf V und V gestattet eine Zerlegung in paarweise nichtisomorphe, irreduzible $O_{2'}(H)$-Teilmoduln. $O_{2'}(H)$ läßt definitionsgemäß alle Elationenachsen fest. Nach dem Satz von Jordan-Hölder gibt es dann höchstens zwei solcher Achsen, ein Widerspruch.

Also gilt $O_{2'}(H) = 1$.

N_i operiert trivial auf M_i. M_i bleibt fest unter allen Elationen aus G und daher liegt N_i in H. Mit $\langle N_i | 1 \leqslant i \leqslant t \rangle \subseteq O_{2'}(H) = \{1\}$ folgt $N_i = \{1\}$ und wir erhalten $M \cong Z_n$.

Wir berechnen den Zentralisator von M in G. S bezeichne eine Sylow-2-Gruppe von G und s einen maximalen linearen Automorphismus in S. $\mathrm{C}_S(M) < S$. Nehmen wir an, $\mathrm{C}_S(M) > 1$. Dann vertauscht s mit einer Involution $j \in \mathrm{C}_S(M)$. Diese Involution zentralisiert G_E, und ist somit eine Baerinvolution. $\mathrm{C}_V(j)$ ist der eindeutige Unterraum aus der Kompositionsreihe von $\langle s \rangle$ der Dimension $\dim V/2$. Also gilt $\mathrm{C}_V(j) = \mathrm{C}_V(i_s)$, ein Widerspruch, da i_s eine Elation induziert. Folglich gilt $\mathrm{C}_S(M) = 1$ und damit $\mathrm{C}_G(M) = M$. Da $G/M \cong S$ treu auf M operiert, ist S abelsch. Wie oben sieht man, daß S keine Baerinvolution enthalten kann. Demnach enthält S genau eine Involution, nämlich i_s und S ist als zyklisch erkannt.

Wir haben bereits $O_{2'}(H)$ als trivial nachgewiesen. Die Zerlegung

$G = M \cdot \langle s \rangle$ liefert $H = \{1\}$. Für jede Untergruppe R von M gilt $\mathbf{C}_G(R) \supseteq M$. Wird R von einer Involution (d. h. Elation) aus G zentralisiert, dann bereits von allen und $R \subseteq H = \{1\}$. Also $\mathbf{C}_G(R) = M$ für alle nichttrivialen Untergruppen R von M. Insbesondere ergibt sich die Teilbarkeitsaussage aus v). Wie für M schließen wir: V ist irreduzibler $R \cdot \langle s \rangle$-Modul und wird in paarweise nichtisomorphe, irreduzible R-Teilmoduln zerlegt. Besitzt R im projektiven Abschluß von $(V, \mathcal{N})$ einen von O verschiedenen Fixpunkt, dann läßt R eine Gerade l aus $\mathcal{N}$ fest. Wegen $\mathbf{C}_G(R) = M$ ist l sicherlich nicht Achse einer Elation aus G. Folglich stabilisiert R die Geraden 1^{s^i} $(1 \leqslant i \leqslant \dim V)$.

Aus dem Satz von Jordan-Hölder und der Zerlegung von V in paarweise nichtisomorphe irreduzible R-Teilmoduln folgt nun der gewünschte Widerspruch. Damit ist der Satz bewiesen.

LITERATUR

[1] W. Büttner, *Einige Translationsebenen der Ordnung* 64, Preprint FB Mathematik, TH Darmstadt (1983).

[2] D. G. Gorenstein, *Finite groups*, Harper and Row, New York, Evanston, London (1968).

[3] Chr. Hering, *On shears of translation planes*, Abh. Math. Sem. Hamb., **37** (1972).

[4] B. Huppert, *Endliche Gruppen I*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York.

Manoscritto pervenuto in redazione il 20 giugno 1983.