

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

M. C. RONCONI

**Monoidi del quarto ordine di P_k^3 a curve
sottoinsieme intersezione completa**

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 72 (1984), p. 49-68

http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1984__72__49_0

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1984, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Monoidi del quarto ordine di $\mathbb{P}_k^3$ a curve sottoinsieme intersezione completa.

M. C. RONCONI (*)

SUMMARY - In this paper we give a complete classification, within linear isomorphisms, of monoidal surfaces $\mathcal{M}$ of degree 4 in $\mathbb{P}_k^3$ (k algebraically closed field of characteristic $\neq 2, 3$) nonsingular in codimension one, whose algebraic curves are set-theoretic complete intersections of $\mathcal{M}$ itself with another surface $\mathcal{S}$ of $\mathbb{P}_k^3$. Moreover, for each of these surfaces, we determine, together with the equations, the minimum positive number μ such that every algebraic curve of $\mathcal{M}$, with multiplicity of intersection μ , is complete intersection on $\mathcal{M}$.

Introduzione.

Oggetto di questa nota è la classificazione, a meno di isomorfismi lineari, dei monoidi $\mathcal{M}$ del quarto ordine di $\mathbb{P}_k^3$, k algebricamente chiuso e di caratteristica diversa da 2 e 3, non singolari in codimensione uno, a curve sottoinsieme intersezione completa, tali cioè che per ogni loro curva algebrica $\mathbf{c}$ esiste una superficie $\mathcal{S}$ di $\mathbb{P}_k^3$ per cui risulta $\mathcal{S} \cap \mathcal{M} = \mathbf{c}$. Tali superficie vengono denominate anche μ -fattoriali, essendo possibile determinare per ciascuna di esse il minimo intero positivo μ per cui ogni loro curva algebrica, contata μ volte, è completa intersezione di $\mathcal{M}$ e di una opportuna superficie di $\mathbb{P}_k^3$. Gli interi associati alle superficie in esame, oltre al valore $\mu = 4$, in

(*) Indirizzo dell'A.: Istituto di Matematica Applicata, Via Belzoni 7, 35100 Padova.

Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.S.A.G.A. del C.N.R.

relazione al quale erano noti alcuni esempi [4], pag. 69, possono assumere anche i valori $\mu = 8, 12, 20, 24, 28, 36$.

Assegnata una curva $\mathbf{c}$ su un monoide $\mathcal{M}$ a curve sottoinsieme intersezione completa, è possibile ricavare un metodo per la determinazione di una superficie $\mathcal{S}$ tale che $\mathcal{S} \cap \mathcal{M} = \mathbf{c}$. Questo metodo viene illustrato nella nota alla fine del terzo paragrafo.

Nell'ultimo paragrafo vengono riportate alcune considerazioni sui monoidi singolari in codimensione uno nell'ipotesi che k sia di caratteristica zero e più che numerabile. Esse inducono a ritenere che nessun monoide di questo tipo sia a curve sottoinsieme intersezione completa (su corpi di caratteristica zero e più che numerabili).

Notazioni.

Le *superficie* di $\mathbf{P}_k^3$, intese sempre come superficie algebriche ridotte, saranno indicate con $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \dots$. Con la scrittura $\mathcal{A} = \{A = 0\}$, $\mathcal{B} = \{B = 0\}$, si intenderà che $A, B, \dots$ sono generatori degli ideali principali associati ad $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \dots$.

Le *curve* di $\mathbf{P}_k^3$ (equidimensionali), verranno indicate con $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \dots$.

Siano $\mathcal{A} \subset \mathbf{P}_k^3$ una superficie non singolare in codimensione uno, B un polinomio omogeneo di $k[x_0, x_1, x_2, x_3]$ e $\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_r$ le componenti irriducibili dell'intersezione di $\mathcal{A}$ e della superficie luogo degli zeri di B . Con la scrittura

$$\langle B \rangle_{\mathcal{A}} = \mu_1 \mathbf{c}_1 + \dots + \mu_r \mathbf{c}_r,$$

interpretata in un opportuno aperto affine di $\mathbf{P}_k^3$, si intende che $\mu_i = v_{\mathfrak{p}_i}(\bar{B})$, dove $\mathfrak{p}_i$ indica l'ideale primo di $k[\mathcal{A}]$ associato a $\mathbf{c}_i$, $v_{\mathfrak{p}_i}$ la valutazione del campo dei quozienti dell'anello $\mathcal{R} = k[\mathcal{A}]_{\mathfrak{p}_i}$ e $\bar{B}$ l'immagine canonica di B in $\mathcal{R}$. Vale inoltre:

$$\langle B/C \rangle_{\mathcal{A}} = \langle B \rangle_{\mathcal{A}} - \langle C \rangle_{\mathcal{A}}.$$

Qualora $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B} = \{B = 0\}$ siano due superficie di $\mathbf{P}_k^3$ tali che $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \mathbf{c}_1 \cup \dots \cup \mathbf{c}_r$, $\mathbf{c}_i$ irriducibile, di cui una almeno, per esempio $\mathcal{A}$, sia non singolare lungo le $\mathbf{c}_i$, si può usare la notazione precedente e porre

$$\mathcal{A} \cdot \mathcal{B} = \langle B \rangle_{\mathcal{A}}.$$

Inoltre, qualora $\mathcal{A} \cdot \mathcal{B} = \mu_1 \mathbf{c}_1 + \dots + \mu_r \mathbf{c}_r$, l'intero μ_i verrà detto molteplicità di intersezione di $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ lungo $\mathbf{c}_i$ e verrà denotato anche con $I(\mathbf{c}_i, \mathcal{A} \cap \mathcal{B})$. Analoghe posizioni varranno per le curve di $\mathbf{P}_k^3$.

Sia $\mathcal{M}$ una superficie di $\mathbf{P}_k^3$ e $\mathbf{c}$ una sua curva.

Si dirà che $\mathbf{c}$ è *sottoinsieme intersezione completa* su $\mathcal{M}$ se esiste una superficie $\mathcal{G} \subset \mathbf{P}_k^3$ tale che $\mathcal{G} \cap \mathcal{M} = \mathbf{c}$. (Per brevità si scriverà che $\mathbf{c}$ è s.i.c. su $\mathcal{M}$). Se ogni curva di $\mathcal{M}$ è s.i.c. su $\mathcal{M}$ si dirà che $\mathcal{M}$ è a curve s.i.c.. Qualora $\mathcal{M}$ sia non singolare in codimensione uno, si dirà che $\mathbf{c}$, contata μ volte, è completa intersezione su $\mathcal{M}$ se esiste una superficie $\mathcal{G} \subset \mathbf{P}_k^3$ tale che $\mathcal{G} \cdot \mathcal{M} = \mu \mathbf{c}$.

L'anello $k[x_0, x_1, x_2, x_3]$ verrà indicato anche con il simbolo $\mathfrak{A}$ e l'anello $k[x_1, x_2, x_3]$ con il simbolo $\mathfrak{A}'$.

1. Monoidi del quarto ordine di $\mathbf{P}_k^3$, non singolari in codimensione uno, a curve s.i.c.

In questo paragrafo k rappresenta un campo algebricamente chiuso di caratteristica arbitraria.

I monoidi trattati, essendo non singolari in codimensione uno, hanno un solo punto triplo. A meno di isomorfismi lineari di $\mathbf{P}_k^3$, si può supporre che tale punto coincida con $O(1, 0, 0, 0)$. I monoidi possono pertanto essere rappresentati da equazioni del tipo:

$$Ax_0 + B = 0$$

con A e B forme di $k[x_1, x_2, x_3]$ del terzo e quarto ordine rispettivamente.

PROPOSIZIONE 1.1. (D. Gallarati). Sia $\mathcal{F}$ una superficie di $\mathbf{P}_k^3$ non singolare in codimensione uno e sia $\mathcal{G}$ una superficie di $\mathbf{P}_k^3$ tale che $\mathcal{F} \cdot \mathcal{G} = \mu_1 \mathbf{a}_1 + \dots + \mu_r \mathbf{a}_r$. Se $\mathbf{a}_1$ è s.i.c. su $\mathcal{F}$ allora esiste una superficie $\mathcal{H} \subset \mathbf{P}_k^3$ tale che $\mathcal{F} \cdot \mathcal{H} = \mu(\mu_2 \mathbf{a}_2 + \dots + \mu_r \mathbf{a}_r)$, con μ intero positivo opportuno.

PROPOSIZIONE 1.2. (D. Gallarati). Sia $\mathcal{M} \subset \mathbf{P}_k^3$ un monoide non singolare in codimensione uno di ordine n . Condizione necessaria e sufficiente perchè ogni curva algebrica $\mathbf{c}$ (riducibile o no) sia s.i.c. su $\mathcal{M}$ è che ciò avvenga per le rette $\mathbf{r}_i$ di $\mathcal{M}$, $i = 1, \dots, n(n-1)$, uscenti dal punto triplo O . Più precisamente, se $\mathbf{r}_i$ contata ν_i volte è completa

intersezione su $\mathcal{M}$, allora $\mathbf{c}$ contata ad esempio $v = \text{m.c.m.} \{v_1, \dots, v_{n(n-1)}\}$ è completa intersezione su $\mathcal{M}$.

Per le dimostrazioni delle proposizioni 1.1 e 1.2 si veda [5] pag. 139.

Analizzando la dimostrazione della proposizione 1.1 si può dedurre il seguente

COROLLARIO 1.1. Sia $\mathcal{F}$ una superficie di $\mathbf{P}_k^3$ non singolare in codimensione uno. Se esistono $\mathcal{G}_1$ e $\mathcal{G}_2$ tali che $\mathcal{F} \cdot \mathcal{G}_1 = \mu_1 \mathbf{c}$ e $\mathcal{F} \cdot \mathcal{G}_2 = \mu_2 \mathbf{c}$, con $\mu_2 > \mu_1$, allora esiste anche una superficie $\mathcal{G}$ tale che $\mathcal{F} \cdot \mathcal{G} = (\mu_2 - \mu_1) \mathbf{c}$.

PROPOSIZIONE 1.3 (E. Stagnaro). Sia $\mathcal{M}$ un monoide di ordine $n \geq 2$ di $\mathbf{P}_k^3$ non singolare in codimensione uno e sia $Ax_0 + B = 0$ una sua equazione, con A, B forme di $k[x_1, x_2, x_3]$ di ordine $n-1$ e n rispettivamente. Detta r una retta di $\mathcal{M}$ per $O(1, 0, 0, 0)$, sia $\mathcal{G} = \{G = 0\}$ una superficie di $\mathbf{P}_k^3$ tale che $\mathcal{M} \cdot \mathcal{G} = \mu r$, $\mu \geq 1$. Allora $\bar{G}$, immagine di G nella proiezione canonica $k[x_0, x_1, x_2, x_3] \rightarrow k[x_0, x_1, x_2, x_3]/(Ax_0 + B)$, è prodotto di potenze ad esponente intero delle proiezioni canoniche di fattori irriducibili di A .

Per la dimostrazione si veda [5] pag. 140.

OSSERVAZIONE 1.1. Sia $\mathcal{M} = \{A_1 A_2 x_0 + B = 0\}$ un monoide non singolare in codimensione uno, dove A_1 e A_2 sono forme irriducibili di $k[x_1, x_2, x_3]$ del primo e del secondo ordine rispettivamente. Posto $\mathcal{A}_1 = \{A_1 = 0\}$, $\mathcal{A}_2 = \{A_2 = 0\}$, sia r una delle rette componenti di $\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{M}$. Allora:

$$I(r, \mathcal{M} \cap \mathcal{A}_1) > 2 \Rightarrow I(r, \mathcal{M} \cap \mathcal{A}_2) \leq 2.$$

Infatti: sia $I(r, \mathcal{M} \cap \mathcal{A}_1) > 2$, cioè $\langle A_1 A_2 x_0 + B \rangle_{\mathcal{A}_1} = \langle B \rangle_{\mathcal{A}_1} = \mu_1 r + \mu_2 s$ con $\mu_1 > 2$. Se $I(r, \mathcal{M} \cap \mathcal{A}_2) > 1$, $\mathcal{M}$ e $\mathcal{A}_2$ hanno, lungo r , $\mathcal{A}_1$ come piano tangente e quindi $\langle A_2 \rangle_{\mathcal{A}_1} = 2r$. Pertanto $B = CA_2 + DA_1$, con C forma del secondo ordine che si annulla in tutti i punti di r . Poichè $\mathcal{M}$ è non singolare in codimensione uno, la forma D non deve annullarsi lungo r . Pertanto $I(r, \mathcal{M} \cap \mathcal{A}_2) = I(r, \mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2) = 2$.

OSSERVAZIONE 1.2. Dalla osservazione 1.1 si ottiene come conseguenza che su $\mathcal{M} = \{A_1 A_2 x_0 + B = 0\}$, di rette per O ce ne sono almeno due.

OSSERVAZIONE 1.3. — Sia $\mathcal{M}$ come nell'osservazione 1.1 e sia inoltre $\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2 = \mathbf{r} \cup \mathbf{s}$, ($\mathbf{r}$ e $\mathbf{s}$ rette distinte). Allora:

$$I(\mathbf{r}, \mathcal{M} \cap \mathcal{A}_1) > 1 \Rightarrow I(\mathbf{r}, \mathcal{M} \cap \mathcal{A}_2) = 1.$$

Infatti, se per assurdo $I(\mathbf{r}, \mathcal{M} \cap \mathcal{A}_2) > 1$, allora $\mathcal{A}_1$ dovrebbe essere tangente, lungo $\mathbf{r}$, anche ad $\mathcal{A}_2$ contro l'ipotesi assunta.

PROPOSIZIONE 1.4. Sia $\mathcal{M} = \{Ax_0 + B = 0\}$ un monoide di ordine $n \geq 2$ di $\mathbf{P}_k^3$ non singolare in codimensione 1 e a curve s.i.c.. Se i fattori irriducibili di A sono s , cioè $A = A_1^{p_1} \dots A_s^{p_s}$, allora le rette (distinte) di $\mathcal{M}$ per il punto $(n-1)$ -plo $O(1, 0, 0, 0)$ sono al più in numero di s .

DIMOSTRAZIONE. Sia $\langle A_i \rangle_{\mathcal{M}} = a_{1i} \mathbf{r}_1 + \dots + a_{ki} \mathbf{r}_k$. Poichè $\mathcal{M}$ è a curve s.i.c., esiste una superficie $\mathcal{G}$ tale che $\mathcal{G} \cdot \mathcal{M} = \mu \mathbf{r}_1$. Posto $\mathcal{G} = \{G = 0\}$, dalla proposizione 1.3 si deduce che $\langle G \rangle_{\mathcal{M}} = \langle A_1^{m_1} \dots A_s^{m_s} \rangle_{\mathcal{M}} = \left(\sum_1^s a_{1j} m_j \right) \mathbf{r}_1 + \dots + \left(\sum_1^s a_{kj} m_j \right) \mathbf{r}_k$, con $m_1, \dots, m_s$ interi opportuni e non tutti nulli. Pertanto il rango del sistema:

$$\begin{pmatrix} a_{21} \dots a_{2s} \\ \dots \dots \dots \\ a_{k1} \dots a_{ks} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_1 \\ \dots \\ m_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}$$

deve risultare minore di s . Analoghe considerazioni valgono per le rette $\mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_k$. Pertanto tutte le sottomatrici di:

$$\begin{pmatrix} a_{11} \dots a_{1s} \\ a_{21} \dots a_{2s} \\ \dots \dots \dots \\ a_{k1} \dots a_{ks} \end{pmatrix},$$

ottenute ciascuna cancellandone una riga, devono avere rango minore di s . Se per assurdo $k > s$, una colonna, ad esempio la prima, sarebbe combinazione lineare delle altre secondo gli scalari $\alpha_2, \dots, \alpha_s$. Pertanto $\langle A_1 \rangle_{\mathcal{M}} = \alpha_2 \langle A_2 \rangle_{\mathcal{M}} + \dots + \alpha_s \langle A_s \rangle_{\mathcal{M}}$ e quindi $\langle A_1 \rangle_{\mathcal{M}} = \langle A_2^{\alpha_2} \dots A_s^{\alpha_s} \rangle_{\mathcal{M}}$; seguirebbe, a meno dello scambio degli indici 2, ..., s , $A_1^{p_1} A_2^{p_2} \dots A_r^{p_r} = \alpha A_r^{p_r+1} \dots A_s^{p_s}$, ma ciò è assurdo essendo $k[x_1, x_2, x_3]$ un anello a fattorizzazione unica.

PROPOSIZIONE 1.5. — Sia $\mathcal{M} \subset \mathbf{P}_k^3$ un monoide del quarto ordine non singolare in codimensione uno e sia $Ax_0 + B = 0$ una sua equazione.

a) Nell'ipotesi $A = A_0^r$, con A_0 irriducibile e $r = 1$ oppure $r = 3$, $\mathcal{M}$ è a curve s.i.c. se e solo se:

$$\{A_0 = 0\} \cdot \mathcal{M} = \mu r.$$

b) Nell'ipotesi $A = A_1 A_2$, con A_1 forma lineare e A_2 forma irriducibile del secondo ordine, posto $\mathcal{A}_1 = \{A_1 = 0\}$ e $\mathcal{A}_2 = \{A_2 = 0\}$, $\mathcal{M}$ è a curve s.i.c. se e solo se si verifica uno dei seguenti casi:

$$b_1) \mathcal{A}_1 \cdot \mathcal{M} = 4r \text{ e } \mathcal{A}_2 \cdot \mathcal{M} = 8s;$$

$$b_2) \mathcal{A}_1 \cdot \mathcal{M} = 4r \text{ e } \mathcal{A}_2 \cdot \mathcal{M} = r + 7s;$$

$$b_3) \mathcal{A}_1 \cdot \mathcal{M} = 4r \text{ e } \mathcal{A}_2 \cdot \mathcal{M} = 2r + 6s;$$

$$b_4) \mathcal{A}_1 \cdot \mathcal{M} = 3r + s \text{ e } \mathcal{A}_2 \cdot \mathcal{M} = 8s;$$

$$b_5) \mathcal{A}_1 \cdot \mathcal{M} = 3r + s \text{ e } \mathcal{A}_2 \cdot \mathcal{M} = r + 7s;$$

$$b_6) \mathcal{A}_1 \cdot \mathcal{M} = 2r + 2s \text{ e } \mathcal{A}_2 \cdot \mathcal{M} = 8r.$$

c) Nell'ipotesi $A = A_1^2 A_2$, con A_1 e A_2 forme lineari non proporzionali, posto $\mathcal{A}_1$ e $\mathcal{A}_2$ come sopra, $\mathcal{M}$ è a curve s.i.c. se e solo se si verifica uno dei seguenti casi:

$$c_1) \mathcal{A}_1 \cdot \mathcal{M} = 4r \text{ e } \mathcal{A}_2 \cdot \mathcal{M} = 4s;$$

$$c_2) \mathcal{A}_1 \cdot \mathcal{M} = 4r \text{ e } \mathcal{A}_2 \cdot \mathcal{M} = r + 3s;$$

$$c_3) \mathcal{A}_1 \cdot \mathcal{M} = 3r + s \text{ e } \mathcal{A}_2 \cdot \mathcal{M} = 4s;$$

d) Nell'ipotesi $A = A_1 A_2 A_3$, con A_i forme lineari a due a due non proporzionali, posto $\mathcal{A}_1 = \{A_1 = 0\}$, $\mathcal{A}_2 = \{A_2 = 0\}$, $\mathcal{A}_3 = \{A_3 = 0\}$, $\mathcal{M}$ è a curve s.i.c. se e solo se si verifica uno dei seguenti casi:

$$d_1) \mathcal{A}_1 \cdot \mathcal{M} = 4r, \mathcal{A}_2 \cdot \mathcal{M} = 4s, \mathcal{A}_3 \cdot \mathcal{M} = 4t;$$

$$d_2) \mathcal{A}_1 \cdot \mathcal{M} = 4r, \mathcal{A}_2 \cdot \mathcal{M} = 4s, \mathcal{A}_3 \cdot \mathcal{M} = r + s + 2t;$$

$$d_3) \mathcal{A}_1 \cdot \mathcal{M} = 4r, \mathcal{A}_2 \cdot \mathcal{M} = 4s, \mathcal{A}_3 \cdot \mathcal{M} = s + 3t;$$

$$d_4) \mathcal{A}_1 \cdot \mathcal{M} = 4r, \mathcal{A}_2 \cdot \mathcal{M} = r + 3s, \mathcal{A}_3 \cdot \mathcal{M} = s + 3t;$$

$$d_5) \mathcal{A}_1 \cdot \mathcal{M} = 4r, \mathcal{A}_2 \cdot \mathcal{M} = r + 3s, \mathcal{A}_3 \cdot \mathcal{M} = r + 3t;$$

$$d_6) \mathcal{A}_1 \cdot \mathcal{M} = 3r + s, \mathcal{A}_2 \cdot \mathcal{M} = r + 3t, \mathcal{A}_3 \cdot \mathcal{M} = 3s + t.$$

DIMOSTRAZIONE. — Per quanto concerne la necessità si osservi che:

a) nell'ipotesi $A = A_0^*$, detta r una retta di $\mathcal{M}$ per O , se $\{G = 0\} \cdot \mathcal{M} = \lambda r$, dalla prop. 1.3, segue $\bar{G} = \bar{A}_0^*$. Pertanto $\{A_0 = 0\} \cdot \mathcal{M} = \mu r$. In questo caso c'è su $\mathcal{M}$ una sola retta per il punto triplo.

b) Dalla prop. 1.4 e dalla osservazione 1.2 si deduce che le rette su $\mathcal{M}$ per O sono esattamente due. Pertanto se $\mathcal{A}_1 \cdot \mathcal{M} = 4r$ allora $\mathcal{A}_2 \cdot \mathcal{M} = \mu_1 r + \mu_2 s$, con $\mu_1 \leq 2$ (cfr. osservazione 1.1). Sono quindi possibili i casi b_1, b_2, b_3 .

Se $\mathcal{A}_1 \cdot \mathcal{M} = 3r + s$, allora $\mathcal{A}_2 \cdot \mathcal{M} = \mu_1 r + \mu_2 s$, con $\mu_1 \leq 1$ (cfr. osserv. 1.1 e 1.3). Sono pertanto possibili i casi b_4 e b_5 .

Se $\mathcal{A}_1 \cdot \mathcal{M} = 2r + 2s$, dalla osservazione 1.3 si deduce che il solo caso possibile, a meno dello scambio di r e s , è b_6 .

c) Essendo $\mathcal{M}$ non singolare in codimensione uno, si ha che se $I(r, \mathcal{M} \cap \mathcal{A}_i) > 1$, allora $I(r, \mathcal{M} \cap \mathcal{A}_j) \leq 1$. Questo fatto unito alla proposizione 1.4 permette di concludere che le rette di $\mathcal{M}$ per O sono esattamente due. Inoltre se $\mathcal{A}_1 \cdot \mathcal{M} = 4r$, sono possibili i casi c_1 e c_2 .

Se $\mathcal{A}_1 \cdot \mathcal{M} = 3r + s$, poichè $\mathcal{A}_1$ e $\mathcal{A}_2$ non possono avere più di una retta in comune, deve risultare $\mathcal{A}_2 \cdot \mathcal{M} = 4s$, cioè: c_3) $\mathcal{A}_1 \cdot \mathcal{M} = 3r + s$ e $\mathcal{A}_2 \cdot \mathcal{M} = 4s$. Altri casi non sono possibili essendo $\mathcal{M}$ non singolare in codimensione uno.

d) Essendo $\mathcal{M}$ non singolare in codimensione uno, le rette di $\mathcal{M}$ per O sono almeno tre. D'altra parte, dalla prop. 1.4 si deduce che esse sono esattamente tre. Se ciascuno degli $\mathcal{A}_i$ individua su $\mathcal{M}$ una sola retta, si rientra nel caso d_1 .

Qualora solo due dei tre piani individuino una sola retta, e siano ad esempio $\mathcal{A}_1$ e $\mathcal{A}_2$, allora $\mathcal{A}_3 = \mu_1 r + \mu_2 s + \mu_3 t$, con $\mu_1 \leq 1$, $\mu_2 \leq 1$, essendo $\mathcal{M}$ non singolare in condimensione uno. Sono allora possibili i casi d_2 e d_3 .

Si consideri ora il caso in cui uno solo dei tre piani, ad esempio $\mathcal{A}_1$, individua su $\mathcal{M}$ una sola retta. Allora $\mathcal{A}_2 \cdot \mathcal{M} = \mu_1 r + \mu_2 s + \mu_3 t$ e $\mathcal{A}_3 \cdot \mathcal{M} = \nu_1 r + \nu_2 s + \nu_3 t$, $\mu_1 \leq 1$, $\nu_1 \leq 1$. Dopo aver osservato che due piani distinti non possono avere più di una retta in comune e che la molteplicità di intersezione di $\mathcal{A}_i$ e $\mathcal{M}$ e di $\mathcal{A}_j$ e $\mathcal{M}$ lungo la stessa retta non può essere maggiore di uno per entrambi, si deduce che gli unici casi possibili sono d_4 e d_5 . Qualora nessuno dei tre piani individui una sola retta su $\mathcal{M}$, ciascuno di essi deve individuarne esattamente due, non potendo due piani distinti avere più di una retta in comune. L'unico caso allora possibile è d_6 .

Per quanto concerne la sufficienza, in virtù della prop. 1.2, basta dimostrare che per ciascun monoide $\mathcal{M}$, corrispondente ai casi elencati, le rette per O sono s.i.c. su $\mathcal{M}$. Ciò risulta ovvio nei casi a, b_1, c_1, d_1 . Per quanto concerne i casi $b_2, b_3, b_4, b_6, c_2, c_3, d_2, d_3, d_4, d_5$, basta osservare che una delle rette è s.i.c. su $\mathcal{M}$ e applicare la prop. 1.1 per dedurre che lo sono anche le rimanenti. Nel caso b_5 si osservi che $\langle A_2^3/A_1 \rangle_{\mathcal{M}} = 20s$. Considerato $\mathcal{M}$ come cono affine di A_k^4 , si indichi con $k[\mathcal{M}]$ l'anello delle coordinate di $\mathcal{M}$ e con $v_{\mathfrak{p}}$ la valutazione del campo dei quozienti dell'anello $k[\mathcal{M}]_{\mathfrak{p}}$, dove $\mathfrak{p}$ è un ideale primo di $k[\mathcal{M}]$ di altezza uno.

Indicate con $\overline{A}_2^3$ e $\overline{A}_1$ le proiezioni canoniche di A_2^3 e A_1 in $k[\mathcal{M}]_{\mathfrak{p}}$, si ha:

$$\begin{aligned} v_{\mathfrak{p}}(\overline{A}_2^3/\overline{A}_1) &= 20 & \text{se } \mathfrak{p} = I(s), \\ v_{\mathfrak{p}}(\overline{A}_2^3/\overline{A}_1) &= 0 & \text{se } \mathfrak{p} \neq I(s). \end{aligned}$$

Essendo $k[\mathcal{M}]$ integralmente chiuso, per il teorema di struttura dei domini noetheriani integralmente chiusi, si ha: $\overline{A}_2^3/\overline{A}_1 \in k[\mathcal{M}]$. Scelto come rappresentante di $\overline{A}_2^3/\overline{A}_1$ un polinomio omogeneo C e indicato con D un suo fattore irriducibile, si ottiene $\langle D \rangle_{\mathcal{M}} = \mu s$, con $\mu \leq 20$; s risulta pertanto s.i.c. di $\mathcal{M}$ e della superficie $\{D = 0\}$. Analogamente, essendo $\langle A_1^7/A_2 \rangle_{\mathcal{M}} = 20r$, si deduce che r è s.i.c. su $\mathcal{M}$. Nel caso d_6 , ragionando come nel caso precedente, si può dedurre che ciascuna retta su $\mathcal{M}$ è s.i.c. osservando che $\langle A_1 A_3^9/A_2^3 \rangle_{\mathcal{M}} = 28s$, $\langle A_2 A_1^9/A_3^3 \rangle_{\mathcal{M}} = 28r$, $\langle A_3 A_2^9/A_1^3 \rangle_{\mathcal{M}} = 28t$.

2. Sull'ordine dell'anello $k[\mathcal{M}]$ di un monoide $\mathcal{M}$ del quarto ordine non singolare in codimensione uno a curve s.i.c.

Sia $\mathcal{M}$ un monoide del quarto ordine di $\mathbb{P}_k^3$ non singolare in codimensione uno (k corpo algebricamente chiuso di caratteristica arbitraria) le cui curve sono s.i.c. su $\mathcal{M}$. Si vuole determinare il minimo intero positivo μ per cui ogni curva algebrica c su $\mathcal{M}$, è, con molteplicità μ , completa intersezione. Tale intero coincide con l'ordine dell'anello $k[\mathcal{M}]$ (cfr., ad esempio [7], pag. 4).

Sia $Ax_0 + B = 0$ una equazione di $\mathcal{M}$, monoide in esame. Le rette $r_1, \dots, r_s$ di $\mathcal{M}$ per il punto triplo sono le componenti dell'intersezione delle due superficie luogo degli zeri di A e di B rispettivamente. Per quanto visto nel paragrafo precedente, $1 \leq s \leq 3$.

PROPOSIZIONE 2.1. — Sia $\mathcal{M}$ come sopra. Indicato con μ_i il minimo intero positivo per cui esiste una superficie $\mathcal{G}_i$ di $\mathbb{P}_k^3$ tale che $\mathcal{M} \cdot \mathcal{G}_i = \mu_i r_i$, allora il minimo intero positivo μ per cui ogni curva algebrica c di $\mathcal{M}$, contratta μ volte, è s.i.c. su $\mathcal{M}$, è:

$$\mu = \text{m.c.m.} \{ \mu_1, \dots, \mu_s \}.$$

DIMOSTRAZIONE. — Dalla prop. 1.2 segue che $\mu \leq \text{m.c.m.} \{ \mu_1, \dots, \mu_s \}$. D'altra parte $\mu \geq \mu_i$ per ogni i ; inoltre μ_i deve dividere μ per ogni i , perchè se fosse $\mu = q\mu_i + q_i$, $0 < q_i < \mu_i$, dal corollario 1.1 seguirebbe che r_i , contratta q_i volte è s.i.c. su $\mathcal{M}$ e ciò è assurdo essendo $q_i < \mu_i$. Segue allora la tesi.

OSSERVAZIONE 2.1. — Nel caso in cui A abbia un solo fattore irriducibile A_0 , come risulta dalla prop. 1.3, la superficie che individua l'unica retta r di $\mathcal{M}$ con molteplicità minima è $\{A_0 = 0\}$.

OSSERVAZIONE 2.2. — Si consideri il caso in cui A si spezza nel prodotto di due fattori irriducibili A_1 e A_2 ; le rette di $\mathcal{M}$ per il punto triplo sono esattamente due: r e s .

a) Se $\mathcal{M} \cdot \{A_i = 0\} = \mu_i r$, per qualche i , allora μ è il minimo intero positivo che compete a r . Indicata infatti con $\mathcal{G} = \{G = 0\}$ una superficie tale che $\mathcal{M} \cdot \mathcal{G} = \mu' r$, dalla prop. 1.3 segue: $\langle G \rangle_{\mathcal{M}} = \langle A_i^{m_i} A_j^{m_j} \rangle_{\mathcal{M}} = m_i \langle A_i \rangle_{\mathcal{M}} + m_j \langle A_j \rangle_{\mathcal{M}} = m_i \mu_i r + m_j \mu_j r + m_j \nu_j s$. Pertanto $m_j \nu_j = 0$; non potendo essere $\nu_j = 0$, segue $m_j = 0$. Allora $\mu' = \mu m_i \geq \mu$.

b) Se r non è s.i.c. su $\mathcal{M}$ con nessuno degli A_i , posto $\langle A_i \rangle_{\mathcal{M}} = \lambda_i r + \mu_i s$ e $\langle A_j \rangle_{\mathcal{M}} = \lambda_j r + \mu_j s$, dove $\mu_i \mu_j \neq 0$, $\mu_i < \mu_j$, allora il minimo intero positivo che compete a r soddisfa:

$$\mu \geq |\lambda_i \mu_j - \lambda_j \mu_i| / \mu_i.$$

Indicata infatti con $\mathcal{G} = \{G = 0\}$ una superficie tale che $\mathcal{G} \cdot \mathcal{M} = \mu' r$, dalla prop. 1.3 si ottiene: $\langle G \rangle_{\mathcal{M}} = \langle A_i^{m_i} A_j^{m_j} \rangle_{\mathcal{M}} = (m_i \lambda_i + m_j \lambda_j) r + (m_i \mu_i + m_j \mu_j) s$. Allora $m_i \mu_i + m_j \mu_j = 0$ e quindi $\mu' = m_j (\lambda_j \mu_i - \lambda_i \mu_j) / \mu_i$. Da $\mu' > 0$ e $|m_j| \geq 1$ segue la tesi.

OSSERVAZIONE 2.3. Nel caso in cui A è prodotto di tre fattori irriducibili le rette di $\mathcal{M}$ per il punto triplo O sono tre. Indicata con r una di tali rette, se $\mathcal{M} \cdot \{A_i = 0\} = \mu_i r$, per qualche i , con considerazioni analoghe a quelle esposte nei casi precedenti si deduce che μ è l'intero positivo che compete a r . Qualora non sia s.i.c. su $\mathcal{M}$ con

alcuno dei piani $\{A_i = 0\}$, pur essendo possibile determinare una formula che comprenda tutti i casi che rientrano in questa situazione, risulta tuttavia più agevole determinare l'intero corrispondente a r caso per caso.

3. Classificazione dei monoidi non singolari in codimensione uno di $\mathbf{P}_k^3$, a curve sottoinsieme intersezione completa.

In questo paragrafo vengono determinate, a meno di isomorfismi lineari di $\mathbf{P}_k^3$ (brevemente i.l.), k campo algebricamente chiuso di caratteristica diversa da 2 e 3, le equazioni dei monoidi $\mathcal{M}$ non singolari in codimensione uno le cui curve sono s.i.c. su $\mathcal{M}$. A meno di isomorfismi lineari è sempre possibile supporre che il punto triplo di $\mathcal{M}$ coincida con $O(1, 0, 0, 0)$; pertanto le equazioni dei monoidi in esame sono del tipo: $Ax_0 + B = 0$, con A e B forme del terzo e quarto ordine di $\mathfrak{V}'$. La classificazione viene condotta prendendo in esame le varie situazioni che si possono presentare in relazione ad A .

3.1. — Sia A una forma irriducibile del terzo ordine. Essendo $\mathcal{M}$ a curve s.i.c., come precisato nella dimostrazione della proposizione 1.5, su $\mathcal{M}$ c'è una sola retta r per O ed inoltre $\{A = 0\} \cdot \mathcal{M} = 12r$. Indicata con $\mathbf{a}$ la curva $\{A = 0\}$ del piano proiettivo $\pi: \{x_0 = 0\}$, con $\mathbf{b}$ la curva di π luogo degli zeri di B e con P l'intersezione di r con π , deve risultare

$$(o) \quad \mathbf{b} \cap \mathbf{a} = P.$$

Si esaminino separatamente i casi in cui $\mathbf{a}$ è ellittica o nodata da quello in cui è cuspidata.

3.1.a. Sia $\mathbf{a}$ ellittica o nodata. P allora può essere:

- a_1) un flesso di $\mathbf{a}$;
- a_2) un punto il cui tangenziale è un flesso;
- a_3) un punto il cui tangenziale ha per tangenziale un flesso;
- a_4) il nodo di $\mathbf{a}$ nel caso in cui $\mathbf{a}$ sia nodata.

Infatti: sia $\mathbf{a}$ una cubica ellittica, P un suo punto e B una forma del quarto ordine tale che $\langle B \rangle_{\mathbf{a}} = 12P$. Se P non è un flesso di $\mathbf{a}$,

indicata con $\{T = 0\}$ la tangente in P alla $\mathbf{a}$, risulta: $\langle T \rangle_{\mathbf{a}} = 2P + Q$. Pertanto $\langle T^2/B \rangle_{\mathbf{a}} = 6Q$. Il teorema di struttura sui domini neotheriani integralmente chiusi assicura l'esistenza di una forma D tale che $\langle D \rangle_{\mathbf{a}} = 6Q$ (si confronti l'ultima parte della dimostrazione della proposizione 1.5). Pertanto se Q non è flesso di $\mathbf{a}$, cioè se P non è un punto il cui tangenziale è un flesso, detta $\{U = 0\}$ la tangente in Q alla $\mathbf{a}$, risulta: $\langle U \rangle_{\mathbf{a}} = 2Q + R$. Ragionando come sopra si deduce che esiste una forma (lineare) L tale che $\langle L \rangle_{\mathbf{a}} = 3R$. R pertanto è un flesso di $\mathbf{a}$.

Nel caso in cui $\mathbf{a}$ sia nodata, si può applicare il procedimento sopra esposto alla parte affine $\mathbf{c}$ ottenuta intersecando $\mathbf{a}$ con l'aperto di $\mathbf{P}_k^2$ complementare di una delle due tangenti nel punto doppio e dimostrare, anche in questo caso, che tra i polinomi tali che $\langle D \rangle_{\mathbf{a}} = 6Q$ e $\langle L \rangle_{\mathbf{a}} = 3R$ ce ne sono due di grado due e uno rispettivamente.

Caso a_1 . Supposto, come possibile a meno di i.l., che P sia il punto $(1, 0, 0)$ e che $\mathbf{a}$ sia rappresentata nella forma di Weierstrass:

$$x_1^2 x_3 + x_2(x_2 + x_3)(x_2 + tx_3) = 0, \quad t \neq 0,$$

dalla (o) si deduce che $B = \lambda x_3^4 + CA$, $\lambda \in k$, $\lambda \neq 0$ e C forma lineare di $\mathfrak{U}'$. I monoidi, a curve s.i.c., in questo caso sono pertanto l.i. alle superficie della famiglia:

$$1 \quad [x_1^2 x_3 + x_2(x_2 + x_3)(x_2 + tx_3)]x_0 + x_3^4 = 0, \quad t \neq 0.$$

La superficie $\mathcal{M}(1)$, ottenuta ponendo $t = 1$, non è l.i. a nessun'altra superficie della famiglia essendo questo l'unico caso in cui $\mathbf{a}$ risulta nodata, mentre $\mathcal{M}(t)$, $t \neq 0, 1$, è l.i. alle superficie $\mathcal{M}(t')$ dove $t' = 1/t$, $1 - t$, $1/(1 - t)$, $t/(t - 1)$, $(t - 1)/t$.

Caso a_2 . Si supponga P coincidente con il punto $(0, 0, 1)$ e $\mathbf{a}$ rappresentata come nel caso a_1 . Poichè $[x_1^2 + (t + 1)x_2^2 + tx_2x_3 = 0] \cap \mathbf{a} = P$, dalla (o) si deduce che $B = \lambda[x_1^2 + (t + 1)x_2^2 + tx_2x_3]^2 + CA$ con $\lambda \in k$, $\lambda \neq 0$, C forma lineare di $\mathfrak{U}'$. I monoidi in questo caso sono pertanto l.i. alle superficie della famiglia:

$$2 \quad [x_1^2 x_3 + x_2(x_2 + x_3)(x_2 + tx_3)]x_0 + [x_1^2 + (t + 1)x_2^2 + tx_2x_3]^2 = 0, \\ t \neq 0.$$

In tale famiglia si riconoscono l.i. le superficie $\mathcal{M}(t)$ e $\mathcal{M}(1/t)$.

Caso a_3 . Si supponga P coincidente con il punto $(i\sqrt{t}(1+\sqrt{t}), \sqrt{t}, 1)$ e $\mathbf{a}$ rappresentata come nel caso a_1). La tangente alla $\mathbf{a}$ nel punto P è allora $\{x_1 + \alpha x_2 = 0\}$, con $\alpha = -i(1 + \sqrt{t})$. Indicati con $C = x_2^2 + (t+1)x_2x_3 + tx_3^2$ e con

$$Q = C[(t+1-15\alpha^2)x_1^2 - tC + 6\alpha(t+1)x_1x_2 + 6t\alpha x_1x_3] - \\ - x_1^4 - 6\alpha x_1^3x_2 + 20\alpha^3 x_1^2x_3 + 15\alpha^4 x_1^2x_2x_3 + 6\alpha^5 x_1x_2^2x_3 + \alpha^6 x_2^3x_3,$$

la curva $q = \{Q = 0\}$ è tale che $q \cap a = P$. Dalla (o) si deduce che $B = \lambda Q + DA$, $\lambda \in k$, $\lambda \neq 0$ e D forma lineare di $\mathfrak{U}'$. I monoidi in questo caso sono l.i. alle superficie della famiglia:

$$3 \quad [x_1^2x_3 + x_2(x_2 + x_3)(x_2 + tx_3)]x_0 + Q = 0, \quad t \neq 0$$

dove Q è il polinomio sopra indicato. In tale famiglia la superficie $\mathcal{M}(t)$, ottenuta in corrispondenza del valore t del parametro, non è l.i. a nessun'altra superficie della famiglia stessa.

Caso a_4 . Si esamini ora il caso in cui $\mathbf{a}$ è nodata e P coincide con il nodo di $\mathbf{a}$. A meno di i.l. è possibile supporre $\mathbf{a}$ rappresentata da: $x_1x_2x_3 - x_1^3 - x_2^3 = 0$. In questo caso P coincide con il punto $(0, 0, 1)$. Ricordando che $\mathcal{M}$ è non singolare in codimensione uno, i polinomi B tali che l'intersezione di $\mathbf{a}$ e della curva luogo degli zeri di B è P , a meno dello scambio di x_1 con x_2 , sono quelli del tipo: $B = \lambda(2x_1^4 + x_1x_2^3 + x_2^2x_3^2 - x_1x_3^3) + CA$, $\lambda \in k$, $\lambda \neq 0$ e C forma lineare di $\mathfrak{U}'$. Le superficie in questo caso sono l.i. alla:

$$4 \quad (x_1x_2x_3 - x_1^3 - x_2^3)x_0 + 2x_1^4 + x_1x_2^3 + x_2^2x_3^2 - x_1x_3^3 = 0.$$

3.1.b. Nel caso in cui $\mathbf{a}$ sia cuspidata può essere rappresentata, a meno di i.l., da $x_1x_2^2 - x_3^3 = 0$. Dalla (o), dalla nota 5 di [6] pag. 171, e dal fatto che $\mathcal{M}$ è non singolare lungo $\mathbf{r}$, si deduce che P deve coincidere con il flesso $(0, 1, 0)$ di $\mathbf{a}$ e che $B = \lambda x_1^4 + CA$, $\lambda \in k$, $\lambda \neq 0$, C forma lineare di $\mathfrak{U}'$. Le superficie in questo caso sono pertanto l.i. alla:

$$5 \quad (x_1x_2^2 - x_3^3)x_0 + x_1^4 = 0.$$

Come risulta dalla proposizione 2.1 e dalla osservazione 2.1, l'ordine dell'anello $k[\mathcal{M}]$, per tutte le superficie $\mathcal{M}$ di 3.1, è $\mu = 12$.

3.2. Sia $A = A_1 A_2$ con A_1 forma lineare e A_2 forma irriducibile del secondo ordine. Come risulta dalla proposizione 1.5, le rette di $\mathcal{M}$ per O sono due: r e s . Indicata con a_1 la retta $\{A_1 = 0\}$ di $\pi = \{x_0 = 0\}$, con a_2 la conica $\{A_2 = 0\}$ di π e con R e S i punti intersezione di r e s con π , si esaminino i vari casi corrispondenti a quelli indicati nella proposizione 1.5, *b*).

Caso b_1 . Sia $\langle B \rangle_{a_1} = 4R$ e $\langle B \rangle_{a_2} = 8S$. Qualora la tangente in S alla a_2 passi per R , a meno di i.l., si può supporre $A_1 = x_1$, $A_2 = ax_1x_2 + x_3(bx_2 + cx_3)$, $R(0, 0, 1)$, $S(1, 0, 0)$. Dall'ipotesi $\langle B \rangle_{a_2} = 8S$, segue $B = \lambda x_2^4 + A_2 C$, $\lambda \in k$, $\lambda \neq 0$, C forma di $\mathfrak{U}'$ di grado due. Deve risultare inoltre $\langle B \rangle_{a_1} = 4R$; pertanto $C = Lx_1$, con L forma lineare di $\mathfrak{U}'$. Le superficie di questo caso sono pertanto l.i. alle: $x_1(ax_1x_2 + bx_2x_3 + cx_3^2)x_0 + \lambda x_2^4 + Lx_1(ax_1x_2 + bx_2x_3 + cx_3^2) = 0$. Tali superficie si possono ridurre, a meno di i.l., alla:

$$6 \quad x_1(x_1x_2 + x_3^2)x_0 + x_2^4 = 0,$$

oppure alla:

$$7 \quad x_1(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3^2)x_0 + x_2^4 = 0.$$

Qualora la tangente in S alla a_2 non passi per R , a meno di i.l., si può supporre $A = x_1$, $A_2 = x_1x_2 + (x_2 + x_3)(x_2 + ax_3)$, $a \in k$, $a \neq 0$, $R(0, 1, 0)$ e $S(1, 0, 0)$. Ragionando come sopra, si deduce che a può assumere soltanto i valori $-1, i, -i$ e che le superficie in questione sono l.i. a una tra le:

$$8 \quad (x_1x_2 + x_2^2 - x_3^2)(x_1x_0 - x_2^2 - x_3^2) + x_2^4 = 0,$$

$$9 \quad [x_1x_2 + (x_2 + x_3)(x_2 + ix_3)][x_1x_0 - (x_2 - x_3)(x_2 - ix_3)] + x_2^4 = 0,$$

$$10 \quad [x_1x_2 + (x_2 + x_3)(x_2 - ix_3)][x_1x_0 - (x_2 - x_3)(x_2 + ix_3)] + x_2^4 = 0.$$

Come risulta dalla osservazione 2.2, *a*) e dalla proposizione 2.1, per le superficie del caso b_1 l'ordine dell'anello $k[\mathcal{M}]$ è $\mu = 8$.

Caso b_2 . Le superficie in questo caso risultano l.i. alla:

$$11 \quad (x_2x_3 + x_3^2 + x_1x_2)(x_1x_0 - x_2^2 + x_2x_3 - x_3^2) + x_2^3x_3 = 0.$$

Come risulta dalla osservazione 2.2 *a*) e *b*), i minimi μ_r e μ_s che competono a r e a s soddisfano: $\mu_r = 4$ e $\mu_s \geq 28$. D'altra parte $\langle A_2^4/A_1 \rangle_{\mathcal{M}} =$

$= 28s$. Pertanto, sfruttando la proposizione 2.1, si deduce che l'ordine dell'anello $k[\mathcal{M}]$ è in questo caso $\mu = 28$.

Caso b_3). Le superficie di questo caso sono tutte l.i. alla:

$$\mathbf{12} \quad (x_1x_2 + x_3^2)(x_1x_0 + x_3^2) + x_1x_2^3 = 0.$$

L'ordine dell'anello $k[\mathcal{M}]$ è in questo caso $\mu = 12$.

Caso b_4). Le superficie sono tutte l.i. alla:

$$\mathbf{13} \quad (x_2x_3 + x_1^3)(x_1x_0 + x_2^2 + 3x_2x_3 + 3x_3^2) + x_3^4 = 0.$$

A tale superficie corrisponde $\mu = 24$.

Caso b_5). In questo caso le superficie risultano l.i. alla:

$$\mathbf{14} \quad (x_1^2 + x_2x_3)(x_1x_0 + x_2^2) + x_1x_3^3 = 0.$$

A tale superficie corrisponde $\mu = 20$.

Caso b_6). Le superficie sono tutte l.i. alla:

$$\mathbf{15} \quad (x_1x_3 + x_2^2)(x_1x_0 + x_3^2) + x_1^4 = 0.$$

Tale superficie è 8-fattoriale.

3.3. Sia $A = A_1^3A_2$, con A_1 e A_2 forme lineari non proporzionali; si analizzino i vari casi corrispondenti a quelli della proposizione 1.5.

Caso c_1). Ciascuna superficie che rientri in questo caso risulta l.i. a una tra le superficie della famiglia: $x_1^2x_2x_0 + tx_3^4 + a_{22}x_1x_2^3 + a_{23}x_1x_2^2x_3 + a_{33}x_1x_2x_3^2 = 0$, con $a_{22} \neq 0$ essendo $\mathcal{M}$ non singolare in codimensione uno. Ciascuna di esse risulta l.i. a una tra:

$$\mathbf{16} \quad x_1^2x_2x_0 + x_3^4 + x_1x_2^3 = 0;$$

$$\mathbf{17} \quad x_1^2x_2x_0 + x_3^4 + x_1x_2^3 + x_1x_2x_3^2 = 0;$$

$$\mathbf{18} \quad x_1^2x_2x_0 + x_3^4 + x_1x_2^3 + x_1x_2^2x_3 + tx_1x_2x_3^2 = 0.$$

La superficie $\mathcal{M}(t)$, ottenuta in **18** in corrispondenza al valore t del

parametro, non risulta l.i. nè alle superficie **16** o **17** nè ad alcuna altra superficie della famiglia stessa. A tali superficie corrisponde $\mu = 4$.

Caso c_2). Le superficie di questo caso risultano l.i. ad una tra le:

$$\begin{aligned} \mathbf{19} \quad & x_1^2 x_2 x_0 + x_2^4 + x_1 x_3^3 = 0; \\ \mathbf{20} \quad & x_1^2 x_2 x_0 + x_2^4 + x_1 x_3^3 + x_1 x_2^3 x_3 = 0; \\ \mathbf{21} \quad & x_1^2 x_2 x_0 + x_2^4 + x_1 x_3^3 + x_1 x_2^3 + t x_1 x_2^2 x_3 = 0. \end{aligned}$$

Nella famiglia **21** la superficie $\mathcal{M}(t)$, è l.i. alle superficie $\mathcal{M}(\varepsilon t)$, dove $\varepsilon^3 = 1$. Inoltre l'intero che corrisponde alle superficie **19**, **20**, **21** è $\mu = 12$.

Caso c_3). Le superficie risultano l.i. ad una tra le:

$$\mathbf{22} \quad x_1^2 x_2 x_0 + x_3^3 x_2 + x_1^4 + x_1 x_2^3 + t x_1 x_2^2 x_3 = 0.$$

La superficie $\mathcal{M}(t)$ risulta l.i. alle superficie $\mathcal{M}(t')$ qualora $t' = t \varepsilon' \varepsilon^{\frac{1}{3}}$ con $\varepsilon^3 = 1$, $\varepsilon'^3 = 1$. Tali superficie sono 12-fattoriali.

3.4. Sia $A = A_1 A_2 A_3$, con A_i forme lineari a due a due non proporzionali; si esaminino i vari casi che si presentano in conformità con la proposizione 1.5.

Caso d_1). Le superficie di questo caso risultano l.i. alla:

$$\mathbf{23} \quad x_1 x_2 (x_1 + x_2) x_0 + x_3^4 = 0,$$

oppure a una tra le:

$$\begin{aligned} \mathbf{24} \quad & x_1 x_2 x_3 x_0 + (x_2 + x_3)^4 + (x_1 + x_3)^4 + \\ & + (x_1 + \varepsilon x_2)^4 - x_1^4 - x_2^4 - x_3^4 = 0, \quad \varepsilon^4 = 1, \end{aligned}$$

a seconda che i tre piani $\{A_1 = 0\}$, $\{A_2 = 0\}$ e $\{A_3 = 0\}$ formino o no un fascio. Le superficie **24** non sono a due a due l.i. e risultano 4-fattoriali come la **23**.

Caso d_2). Si ottengono superficie l.i. alla:

$$\mathbf{25} \quad x_1 x_2 x_3 x_0 + x_3^4 + x_1 x_2 (x_1 + x_2)^2 = 0.$$

Per determinare l'intero positivo che corrisponde a tale superficie, si determini innanzi tutto il minimo intero corrispondente alla retta $\mathbf{t}$. Indicata con $\mathcal{G} = \{G = 0\}$ una superficie tale che $\mathcal{G} \cdot \mathcal{M} = \mu' \mathbf{t}$, dalla proposizione 1.3 segue $\langle G \rangle_{\mathcal{M}} = A_1^{m_1} A_2^{m_2} A_3^{m_3} = 4m_1 \mathbf{r} + 4m_2 \mathbf{s} + m_3(\mathbf{r} + \mathbf{s} + 2\mathbf{t}) = (4m_1 + m_3)\mathbf{r} + (4m_2 + m_3)\mathbf{s} + 2m_3\mathbf{t}$. Pertanto $4m_1 + m_3 = 4m_2 + m_3 = 0$ e quindi $m_3 = -4m_1$. Si deduce così che $m_1 < 0$, che $\langle G \rangle_{\mathcal{M}} = -8m_1 \mathbf{t}$ e che $\mu' \geq 8$. D'altra parte $\langle A_3^4 / (A_1 A_2) \rangle_{\mathcal{M}} = 8\mathbf{t}$. Si conclude così che il minimo intero μ' per cui $\mathbf{t}$ è, con molteplicità μ' , completa intersezione su $\mathcal{M}$, è $\mu' = 8$. Dalla osservazione 2.3 e dalla proposizione 2.1 si deduce che $\mu = 8$ è l'intero che corrisponde alla superficie 25.

Caso d_3). Si ottengono superficie l.i. alla:

$$26 \quad x_1 x_2 x_3 x_0 + (x_2 + x_3)^4 + x_2(x_1 + x_2)^3 - x_2^4 = 0$$

che risulta 12-fattoriale.

Caso d_4). Si ottengono superficie l.i. alla:

$$27 \quad x_1 x_2 x_3 x_0 + x_2(x_1 + x_2)^3 + x_1 x_3^3 = 0$$

che risulta 36-fattoriale.

Caso d_5). Si ottengono superficie l.i. alla:

$$28 \quad x_1 x_2 (x_1 + x_2) x_0 + x_2 x_1^3 + x_3^3 (x_1 + x_2) = 0;$$

essa risulta 12-fattoriale.

Caso d_6). Si ottengono superficie l.i. alla:

$$29 \quad x_1 x_2 x_3 x_0 + x_1^3 x_2 + x_1 x_3^3 + x_2^3 x_3 = 0;$$

tale superficie è 28-fattoriale.

3.5. Sia $A = A_1^3$, con A_1 forma lineare. In questo caso c'è su $\mathcal{M}$ una sola retta per O . Le superficie in questo caso sono l.i. ad una tra le:

$$30 \quad x_1^3 x_0 + x_2^4 + x_1 x_3^3 = 0;$$

$$31 \quad x_1^3 x_0 + x_2^4 + x_1^2 x_2 x_3 + x_1 x_3^3 = 0;$$

$$\mathbf{32} \quad x_1^3 x_0 + x_2^4 + x_1^2 x_2^2 + t x_1^2 x_2 x_3 + x_1 x_3^3 = 0;$$

$$\mathbf{33} \quad x_1^3 x_0 + x_2^4 + \alpha x_1^2 x_2^2 + \beta x_1^2 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_3^2 + x_1 x_3^3 = 0.$$

Nella famiglia **32** le superficie $\mathcal{M}(t)$ e $\mathcal{M}(t')$ corrispondenti ai valori t e t' del parametro, sono l.i. se $t' = \pm \varepsilon t$ dove $\varepsilon^3 = 1$. Nella famiglia **33** $\mathcal{M}(\alpha, \beta)$ è l.i. alla $\mathcal{M}(\alpha', \beta')$ se $\alpha' = \alpha - (2/3)\beta - 2/213$, $\beta' = -\beta - 2/71$. Tutte le superficie relative a questo caso sono 4-fattoriali.

NOTA. Si vuole qui illustrare, con un esempio, come sia possibile, assegnata una curva $\mathbf{c}$ sopra un monoide $\mathcal{M}$ a curve s.i.c., determinare una superficie $\mathcal{G}$ tale che $\mathcal{M} \cap \mathcal{G} = \mathbf{c}$.

Sia $\mathcal{M}$ la superficie **27**: $\{x_1 x_2 x_3 x_0 + x_2(x_1 + x_2)^3 + x_1 x_3^3 = 0\}$ e $\mathbf{c} \subset \mathcal{M}$ la conica: $\{x_2 x_0 + x_3^2 = x_1 + x_2 = 0\}$. Indicato con Γ : $\{x_1 + x_2 = 0\}$ il cono che da $O(1, 0, 0, 0)$ proietta $\mathbf{c}$, si ha: $\Gamma \cdot \mathcal{M} = \mathbf{c} + \mathbf{r} + \mathbf{t}$, dove $\mathbf{r} = \{x_1 = x_2 = 0\}$ e $\mathbf{t} = \{x_3 = x_1 + x_2 = 0\}$. La conica $\mathbf{c}$, contata al più 36 volte, è su $\mathcal{M}$ completa intersezione. Poichè $\langle (x_1 + x_2)^{18} x_2^2 / (x_1^5 x_3^6) \rangle_{\mathcal{M}} = 18\mathbf{c}$, per questa curva esiste una superficie $\mathcal{G}$ tale che $\mathcal{M} \cdot \mathcal{G} = 18\mathbf{c}$.

Indicati con $A = x_2 x_0 + x_3^2$ e $B = x_1 + x_2$, nel campo dei quozienti di $k[\mathcal{M}]$ valgono le seguenti relazioni:

$$(o) \quad \bar{x}_2 \bar{B}^3 = -\bar{x}_1 \bar{x}_3 \bar{A}$$

$$(oo) \quad \bar{B}^4 = \bar{x}_1 \bar{B}^3 + \bar{x}_2 \bar{B}^3 = \bar{x}_1 (\bar{B}^3 - \bar{x}_3 \bar{A})$$

$$(ooo) \quad \bar{A} \bar{B}^3 = \bar{x}_3 (\bar{x}_3 \bar{B}^3 - \bar{x}_1 \bar{x}_0 \bar{A})$$

Pertanto

$$\begin{aligned} \frac{(\bar{x}_1 + \bar{x}_2)^{18} \bar{x}_2^2}{\bar{x}_1^5 \bar{x}_3^6} &= \frac{\bar{A}^2 (\bar{B}^3 - \bar{x}_3 \bar{A})^3}{\bar{x}_3^4} = \bar{B}^3 (\bar{B}^3 - \bar{x}_3 \bar{A})^2 + \bar{x}_3 \bar{A} \bar{B}^6 + \\ &+ 2\bar{B}^3 (\bar{x}_0 \bar{B} + \bar{x}_3^2) (\bar{A}^2 - \bar{x}_3 \bar{B}^3 + \bar{x}_1 \bar{x}_0 \bar{A}) - 2\bar{x}_0 \bar{x}_3 \bar{B} \bar{A}^3 - \bar{x}_3^3 \bar{A}^3 + \\ &+ \bar{x}_0^2 \bar{A} \bar{B}^5 - \bar{x}_0^2 \bar{x}_3 \bar{A}^2 \bar{B}^2 - \bar{x}_0^2 \bar{A} (\bar{x}_3 \bar{B}^3 - \bar{x}_1 \bar{x}_0 \bar{A}). \end{aligned}$$

Indicato con G il polinomio: $B^3(B^3 - x_3 A)^2 + \dots - x_0^3 A(x_3 B^3 - x_1 x_0 A)$, si ha: $\{G = 0\} \cdot \mathcal{M} = 18\mathbf{c}$.

4. Monoidi di ordine quattro di $\mathbb{P}_C^3$ singolari in codimensione uno.

Una superficie $\mathcal{M}$ irriducibile di ordine n di $\mathbb{P}_C^3$ con un punto P_0 ($n-1$)-plo è singolare in codimensione uno se e solo se una delle rette uscenti dal punto P_0 è luogo di punti singolari.

I monoidi $\mathcal{M}$ di $\mathbb{P}_C^3$ di ordine quattro con una retta luogo di punti tripli non sono a curve s.i.c.. Tali superficie infatti sono rigate; se per assurdo per ogni curva $\mathbf{c}$ di $\mathcal{M}$ e quindi per ogni retta, esistesse una superficie $\mathcal{G}$ tale che $\mathcal{M} \cap \mathcal{G} = \mathbf{c}$, una qualunque sezione piana irriducibile risulterebbe a punti s.i.c. Essendo tale curva singolare, ciò sarebbe in contrasto con la proposizione 11 di [6].

Le superficie su cui è possibile determinare due curve prive di punti comuni non sono, come si deduce da una osservazione di D. Gallarati [3] pag. 246, a curve s.i.c. È questo il caso della « generica » superficie del quarto ordine con una retta luogo di punti doppi, essendo possibile individuare su di essa due rette sghembe, cfr. [1], libro I, cap. VII. Esistono tuttavia particolari superficie di questo tipo che non contengono rette sghembe e altre che non contengono rette diverse da quella doppia: ne è un esempio la superficie $\{x_1x_0^2x_3 + x_3^4 + x_0^4 + x_0x_3x_2^2 + x_0x_3^3 = 0\}$. Per i monoidi di ordine quattro con una retta doppia a cui non è possibile applicare l'osservazione menzionata, si possono formulare altri criteri che, almeno in molti casi, permettono di escludere che si tratti di superficie a curve s.i.c.

a) Sia $\mathcal{M}$ un monoide e $\mathbf{c}$ una sua curva che sia singolare e tale che per ogni suo punto P esista una curva g su $\mathcal{M}$ tale che $g \cap \mathbf{c} = P$. Allora $\mathcal{M}$ non può essere a curve s.i.c.

Infatti se $\mathcal{M}$ fosse a curve s.i.c., la curva $\mathbf{c}$ risulterebbe a punti s.i.c. e ciò sarebbe in contrasto con la proposizione 11 di [6]. Come esempio si consideri la superficie $\mathcal{M}: \{x_1x_2x_3x_0 + x_0^4 + x_2^2x_3^2 = 0\}$. Le sole rette di $\mathcal{M}$ sono le due rette doppie: $\{x_0 = x_3 = 0\}$ e $\{x_0 = x_2 = 0\}$. Si supponga, per assurdo, che $\mathcal{M}$ sia a curve s.i.c.; allora anche la parte affine $\mathcal{M}_a: \{x_2x_3x_0 + x_0^4 + x_2^2x_3^2 = 0\} = \mathcal{M} \cap \{x_1 \neq 0\}$ lo sarebbe. Indicata con $\mathbf{c}$ la curva $\{x_3x_0 + x_0^4 + x_3^2 = x_2 - 1 = 0\} \subset \mathcal{M}_a$, sia Γ_t il cono del fascio $\{x_3 = tx_0^2\}$ che passa per un punto P di $\mathbf{c}$. La curva $g = \{tx_2 + x_0 + t^2x_2^2x_0 = x_3 - tx_0^2 = 0\}$, che assieme alla retta $\{x_3 = x_0 = 0\}$ costituisce l'intersezione di Γ_t e $\mathcal{M}_a$, ha in comune con $\mathbf{c}$ il solo punto P . $\mathbf{c}$ sarebbe allora a punti s.i.c. in contrasto con la proposizione 12 di [6]. Il monoide considerato non è pertanto a curve s.i.c.

b) Un monoide $\mathcal{M}$ singolare in codimensione uno che, in un opportuno aperto affine, è isomorfo a una superficie cubica $\mathcal{F}$ singolare in codimensione uno non può essere a curve s.i.c.

Infatti se $\mathcal{M}$ lo fosse lo sarebbe anche $\mathcal{F}$, in contrasto con [2], proposizione 6.1. Si consideri ad esempio la superficie $\mathcal{M}: \{x_1(x_0x_2x_3 - x_0^3 - x_3^3) + x_0^3x_3 = 0\}$. Le rette di $\mathcal{M}$ sono: $\{x_0 = x_3 = 0\}$, $\{x_0 = x_1 = 0\}$, $\{x_1 = x_3 = 0\}$. La parte affine $\mathcal{M}_a = \{x_0x_2x_3 - x_0^3 - x_3^3 + x_0^3x_3 = 0\} = \mathcal{M} \cap \{x_1 \neq 0\}$ risulta isomorfa, tramite $(x_0, x_2, x_3) \rightarrow (x_0, x_2 - x_0^2, x_3)$, alla superficie $\mathcal{G}_a = \{x_0x_2x_3 - x_0^3 - x_3^3 = 0\}$ che, essendo singolare in codimensione uno, non è a curve s.i.c.

L'esistenza su $\mathcal{M}$ di curve prive di punti comuni e i criteri a) e b) esposti sono sufficienti per stabilire che i monoidi con tre rette doppie uscenti dal punto triplo (superficie di Steiner) e quelli con due rette doppie non sono a curve s.i.c.

L'analisi dei monoidi con una sola retta doppia non è completa, perchè in alcuni casi non è ancora possibile stabilire se i criteri esposti sono sufficienti ad escludere che le superficie godano della proprietà in esame.

Le tecniche esposte, in particolare quelle che fanno riferimento ai teoremi 11 e 12 di [6], sono valide quando k è un corpo di caratteristica zero e più che numerabile. Nel caso in cui k sia un campo arbitrario di caratteristica diversa da zero, esistono esempi di monoidi che, pur essendo singolari in codimensione uno, sono a curve sottoinsieme intersezione completa. Tali esempi mi sono stati comunicati da P. C. Craighero.

BIBLIOGRAFIA

- [1] F. CONFORTO, *Le superficie razionali*, Zanichelli, Bologna, 1939.
- [2] P. C. CRAIGHERO - R. GATTAZZO - M. C. RONCONI, *Superficie cubiche di A_C^3 a curve sottoinsieme intersezione completa*, Ann. di Mat. Pura e Appl., Serie IV, Tomo CXXIX (1981).
- [3] D. GALLARATI, *Problemi di completa interferenza in geometria algebrica*, Rend. Sem. Fac. Sc. Univ. Cagliari, **46** (3-4) (1976), pp. 242-270.
- [4] D. GALLARATI, *Ricerche sul contatto di superficie algebriche lungo curve*, Acad. Roy. de Belgique, Cl. de Sc., Mém., Tome XXXII, F. 3.
- [5] E. STAGNARO, *Le superficie cubiche di P^3 a curve sottoinsieme intersezione completa*, Atti Acc. Ligure Sc. Let., **31** (1974), pp. 138-148.

- [6] E. STAGNARO, *Su alcune generalizzazioni della nozione di dominio fattoriale*, Ann. Univ. Ferrara, **19** (1974), pp. 157-179.
- [7] U. STORCH, *Fastfactorielle Ringe*, Schriftenreihe des Math. Inst. Münster, **36** (1967), pp. 1-42.

Manoscritto pervenuto in redazione il 7 marzo 1983.