

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

GABRIELE H. GRECO

Operatori di tipo G su reticoli completi

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 72 (1984), p. 277-288

http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1984__72__277_0

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1984, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

Operatori di tipo G su reticoli completi.

GABRIELE H. GRECO (*)

Rispondendo ad una domanda posta da E. De Giorgi, in questo articolo si dimostra che due G -operatori che coincidono sulle funzioni a valori in $\{0, 1\}$ sono pure uguali su ogni funzione a valori in un qualsiasi reticolo completamente distributivo. Questa condizione di completa distributività è anche necessaria affinché valga questo teorema.

Questo teorema, come pure gli altri presenti in questo articolo, poggiano su un teorema di decomposizione (di G -operatori in limitoidi) e sulle proprietà dei limitoidi.

Ricordiamo anzitutto la definizione di $G(A, \mathfrak{L})$ -operatore, introdotta in [1] da E. De Giorgi.

Con A si indica un insieme qualsiasi; mentre \mathfrak{L} è una famiglia arbitraria di reticoli completi. Per ogni $L \in \mathfrak{L}$ il simbolo $\text{adm}(A, L)$ denota l'insieme di tutte le funzioni f tali che il loro dominio $\text{dom } f \subset A$ e il loro insieme dei valori $\text{im } f \subset L$. Allora la definizione di G -operatore, data da E. De Giorgi, è la seguente. Un $G(A, \mathfrak{L})$ -operatore è un operatore g con le seguenti quattro proprietà:

- (i) $\text{dom } g = \{(f, L) : L \in \mathfrak{L}, f \in \text{adm}(A, L)\}$ e $g(f, L) \in \text{adm}(A, L)$
per ogni $(f, L) \in \text{dom } g$,
- (ii) $\forall L_1, L_2 \in \mathfrak{L}, \forall f_1 \in \text{adm}(A, L_1), \forall f_2 \in \text{adm}(A, L_2)$
 $\text{dom } f_1 \subset \text{dom } f_2 \Rightarrow \text{dom } g(f_1, L_1) \subset \text{dom } g(f_2, L_2)$,
 $\text{dom } f_1 = \emptyset \Rightarrow \text{dom } g(f_1, L_1) = \emptyset$,

(*) Indirizzo dell'A.: Dipartimento di Matematica, Università di Trento, 38050 Povo (Trento), Italia.

$$(iii) \quad \forall L \in \mathcal{L}, \forall f_1, f_2 \in \text{adm}(A, L)$$

$$\text{dom } f_1 = \text{dom } f_2, f_1 \leq_L f_2 \Rightarrow g(f_1, L) \leq_L g(f_2, L),$$

$$(iv) \quad \forall L_1, L_2 \in \mathcal{L}, \forall \psi \text{ omomorfismo completo di } L_1 \text{ in } L_2, \forall f \in$$

$$\in \text{adm}(A, L_1) \quad \psi \circ g(f, L_1) = g(\psi \circ f, L_2).$$

I G -limiti, i G -operatori elementari (vedi [1], [2]) e quelli ottenuti da questi per composizione sono tutti G_λ -operatori.

Un $G(A, \mathcal{L})$ -operatore g è detto $G_\lambda(A, \mathcal{L})$ -operatore se vale

$$(\lambda) \quad L \in \mathcal{L}, f \in \text{adm}(A, L) \Rightarrow \text{im } g(f, L) \subset \overline{\text{im } f}^L$$

dove « $\overline{\text{im } f}^L$ » è il più piccolo sottoreticolo chiuso di L contenente « $\text{im } f$ ».

Nulla si sa, a mio avviso, sull'esistenza di operatori di tipo G che non siano operatori di tipo G_λ . Però sotto particolari condizioni concernenti \mathcal{L} (vedi teorema 1.1), ogni $G(A, \mathcal{L})$ -operatore è un $G_\lambda(A, \mathcal{L})$ -operatore. In questi casi vale un teorema di scomposizione di un G -operatore in limitoidi. Ciò è di grande importanza in questa nota, perchè rende possibile trasferire proprietà dei limitoidi ai G -operatori. In questo modo si può dimostrare il teorema presentato all'inizio ed altri teoremi sulla rappresentazione, sulla univocità dell'estensione e sulla semicontinuità di un G -operatore.

Ricordiamo la definizione di limitoide, introdotta in [3]. Sia X un insieme non vuoto ed L un reticolo completo. Un *limitoide* è un funzionale $T: L^X \rightarrow L$ verificante le proprietà:

$$(L.1) \quad f_1, f_2 \in L^X, f_1 \leq_L f_2 \Rightarrow T(f_1) \leq_L T(f_2)$$

$$(L.2) \quad T(\psi \circ f) = \psi(T(f)) \quad \forall f \in L^X \text{ e } \forall \psi \text{ omomorfismo completo di } L \text{ in } L$$

$$(L.3) \quad T(f) \in \overline{f(X)}^L \quad \forall f \in L^X.$$

Gli esempi più semplici di limitoidi sono dati dalle nozioni di limite inferiore e limite superiore, presentate in [4] nell'ambito delle funzioni numeriche.

Se f è una funzione da X in L ed \mathcal{B} è una famiglia *non degenera* di sottoinsiemi di X (cioè \mathcal{B} non è vuota e non contiene l'insieme vuoto), allora si definisce il *limite inferiore* e, dualmente, il *limite superiore* di f

lungo \mathfrak{B} nel seguente modo:

$$\liminf_{\mathfrak{B}} f = \bigvee_{B \in \mathfrak{B}} \bigwedge_{x \in B} f(x) \quad e \quad \limsup_{\mathfrak{B}} f = \bigwedge_{B \in \mathfrak{B}} \bigvee_{x \in B} f(x).$$

Più in generale ogni funzione polinomiale di reticolo è un limitoide; in altre parole, ogni funzionale T che opera sulle funzioni tramite un numero finito di \bigwedge e \bigvee è un limitoide. Quindi i Γ -limiti, ibridi o no, di funzioni numeriche o di multifunzioni (vedi [2]) sono limitoidi.

Il teorema di rappresentazione dei limitoidi è in sostanza la « chiave » delle idee (teoremi e loro dimostrazioni) presenti in questa nota.

Teorema di rappresentazione dei limitoidi (vedi [3]). *Sia L un reticolo completamente distributivo e $T: L^X \rightarrow X$ un limitoide. Allora esistono due famiglie $\mathcal{A}, \mathfrak{B}$ non degeneri di sottoinsiemi di X tali che*

$$T(f) = \liminf_{\mathfrak{B}} f = \limsup_{\mathcal{A}} f \quad \forall f \in L^X.$$

1. Su alcune proprietà dei G -operatori.

Ricordiamo anzitutto alcune definizioni e proprietà dei reticoli.

Con $\mathbf{2}$ si denoterà il reticolo composto da due elementi distinti: il massimo 1 ed il minimo 0 . Con i simboli 0_L e 1_L si indicheranno rispettivamente il minimo ed il massimo elemento di un reticolo completo L . Un sottoinsieme L' di un reticolo completo L si dice *sottoreticolo chiuso* di L (si scriverà $L' \triangleleft L$) se per ogni sottoinsieme B non vuoto di L' gli elementi $\bigvee B$ e $\bigwedge B$, calcolati in L , appartengono a L' . Il più piccolo sottoreticolo chiuso di L contenente un suo sottoinsieme C , si indicherà con \bar{C}^L . È evidente che un sottoreticolo chiuso è un reticolo completo rispetto all'ordine indotto. Un'applicazione $\psi: L_1 \rightarrow L_2$ fra due reticoli completi L_1, L_2 si dice *omomorfismo completo* se per ogni sottoinsieme B non vuoto di L_1 risulta $\psi(\bigwedge B) = \bigwedge \psi(B)$ e $\psi(\bigvee B) = \bigvee \psi(B)$.

Un reticolo *completamente distributivo* è un reticolo completo L verificante le proprietà [5]:

$$(D.1) \quad \bigvee_{i \in I} \bigwedge_{j \in A_i} f(i, j) = \bigwedge_{\varphi \in \Phi} \bigvee_{i \in I} f(i, \varphi(i))$$

$$(D.2) \quad \bigwedge_{i \in I} \bigvee_{j \in A_i} f(i, j) = \bigvee_{\varphi \in \Phi} \bigwedge_{i \in I} f(i, \varphi(i))$$

per ogni famiglia $\{A_i\}_{i \in I}$ non vuota di insiemi non vuoti e per ogni funzione f , definita su $\{(i, j) : i \in I, j \in A_i\}$, a valori in L ; Φ è l'insieme di tutte le funzioni φ con dominio I e tali che $\varphi(i) \in A_i$ per $i \in I$.

Sono reticoli completamente distributivi la retta estesa $\bar{\mathbf{R}}$ e, più in generale, le catene complete e i sottoreticoli chiusi di prodotti diretti di catene complete [5].

L'insieme $\mathcal{F}(X)$ delle parti di un insieme X è, quindi, un reticolo completamente distributivo. È noto che ogni reticolo *booleano e completamente distributivo* è isomorfo a $\mathcal{F}(X)$ per qualche X [5].

Ogni reticolo completamente distributivo è brouweriano e dualmente brouweriano. Si ricorda che un reticolo completo L è *brouweriano* se e solo se per ogni $c \in L$ l'applicazione ψ_c di L in L , definita $\psi_c(x) = c \wedge x$, è un omomorfismo completo [5].

Le proprietà dei $G(A, \mathcal{L})$ -operatori sono strettamente connesse con la ricchezza di \mathcal{L} . Nel seguito la famiglia di reticoli \mathcal{L} sarà soggetta a verificare qualcuna delle seguenti condizioni:

($\mathcal{L}.1$) $2 \in \mathcal{L}$ ed ogni $L \in \mathcal{L}$ è un reticolo completamente distributivo

($\mathcal{L}.1'$) ogni $L \in \mathcal{L}$ è o isomorfo alla retta estesa $\bar{\mathbf{R}}$ o un reticolo booleano completamente distributivo o un reticolo distributivo finito

($\mathcal{L}.2$) ogni $L \in \mathcal{L}$ è un reticolo completamente distributivo

($\mathcal{L}.3$) ogni $L \in \mathcal{L}$ è brouweriano e dualmente brouweriano

($\mathcal{L}.4$) $L \in \mathcal{L}, L' \triangleleft L \Rightarrow L' \in \mathcal{L}$.

Queste condizioni sono legate tra di loro dalle seguenti implicazioni.

$$\begin{array}{ccc}
 (\mathcal{L}.1) & \Rightarrow & \\
 & & (\mathcal{L}.2) \Rightarrow (\mathcal{L}.3) \\
 (\mathcal{L}.1') & \nearrow &
 \end{array}$$

TEOREMA 1.1. *Sia \mathcal{L} una famiglia di reticoli verificante una delle tre condizioni: ($\mathcal{L}.1$), ($\mathcal{L}.1'$), ($\mathcal{L}.4$). Allora ogni $G(A, \mathcal{L})$ -operatore è un $G_\lambda(A, \mathcal{L})$ -operatore.*

TEOREMA 1.2. *Se \mathcal{L} verifica ($\mathcal{L}.2$), allora ogni $G(A, \mathcal{L})$ -operatore g*

tale che

$$(\lambda') \quad \forall L \in \mathfrak{L}, \forall f \in \text{adm}(A, L)$$

$$\text{im } f \subset \{0_L, 1_L\} \Rightarrow \text{im } g(f, L) \subset \{0_L, 1_L\},$$

è un $G_\lambda(A, \mathfrak{L})$ -operatore.

TEOREMA 1.3. *Se \mathfrak{L} verifica (L.2), allora un $G(A, \mathfrak{L})$ -operatore g verifica:*

$$(*) \quad \forall L \in \mathfrak{L}, \forall f_1, f_2 \in \text{adm}(A, L), \forall c \in L$$

$$f_1 \leq_L f_2 \Rightarrow g((f_1 \vee c) \wedge f_2, L) = (g(f_1, L) \vee c) \wedge g(f_2, L).$$

TEOREMA 1.4. *Se \mathfrak{L} verifica (L.3), allora ogni $G(A, \mathfrak{L})$ -operatore g soddisfa:*

$$(iv'') \quad \forall L \in \mathfrak{L}, \forall f \in \text{adm}(A, L), \forall c \in L$$

$$g(f, L) \wedge c = g(f \wedge c, L) \quad e \quad g(f, L) \vee c = g(f \vee c, L).$$

Questi teoremi permettono di definire in maniera diversa, ma equivalente, gli operatori di tipo G . Ricordiamo che un operatore g è detto $G'(A, \mathfrak{L})$ -operatore, se verifica (i), (ii), (iii) e

$$(iv') \quad \forall L \in \mathfrak{L}, \forall f \in \text{adm}(A, L), \forall c \in L$$

$$f = c \Rightarrow g(f, L) = c.$$

PROPOSIZIONE 1.5. *Sia \mathfrak{L} una famiglia di reticoli completi con la proprietà (L.1) o con la (L.1'). Allora le seguenti condizioni sono equivalenti:*

(1.1) g è un $G(A, \mathfrak{L})$ -operatore

(1.2) g verifica (i), (ii), (iii), (iv'') e (λ')

(1.3) g verifica (i), (ii), (iv'), (λ') e $(*)$

(1.4) g è un $G_\lambda(A, \mathfrak{L})$ -operatore.

OSSERVAZIONE 1.6. A proposito del teorema 1.4, l'ipotesi (L.3) è essenziale. Infatti se (L.3) non valesse, si potrebbe facilmente determinare un insieme A in modo che esista un $G(A, \mathcal{L})$ -operatore senza la (iv"). ■

OSSERVAZIONE 1.7. Operatori con le proprietà (i), (ii), (*), detti *fuzzy integrali*, sono facilmente descrivibili tramite funzioni d'insieme monotone, qualora sia verificata (L.2) (vedi [6]). Questi abbracciano la nozione già nota di fuzzy integrale di una funzione numerica. Alcuni fuzzy integrali sono ottenibili a partire da un $G(A, \mathcal{L})$ -operatore g nel seguente modo. Si scelga una funzione $f_L \in \text{adm}(A, L)$, una per ogni $L \in \mathcal{L}$. Allora l'operatore g_0 , definito da $g_0(f, L) = g(f \wedge f_L, L)$ per ogni $(f, L) \in \text{dom } g$, verifica (i), (ii), (iii), (*), ma, in generale, non soddisfa (iv). Infine si osserva che mediante i fuzzy integrali si può verificare l'indipendenza della proprietà (λ') dalle (i), (ii), (iii), (iv") (vedi (1.2) della proposizione precedente). ■

2. Teorema di scomposizione di un G -operatore in limitoidi.

Sia g un $G'(A, \mathcal{L})$ -operatore. Allora in virtù di (ii), esiste una funzione $\gamma_0: \mathcal{F}(A) \rightarrow \mathcal{F}(A)$, detta *funzione leader* di g , tale che

$$(2.1) \quad \text{dom } g(f, L) = \gamma_0(\text{dom } f) \quad \forall (f, L) \in \text{dom } g.$$

Poichè in opportune ipotesi, viste nel paragrafo precedente, un operatore di tipo G è un operatore di tipo G_λ , dalla definizione di limitoide segue il

TEOREMA DI SCOMPOSIZIONE. *Sia g un $G(A, \mathcal{L})$ -operatore e sia \mathcal{L} una famiglia di reticoli verificante almeno una delle tre proprietà: (L.1), (L.1'), (L.4). Allora per ogni $X \subset A$, per ogni $y \in \gamma_0(X)$ e per ogni $L \in \mathcal{L}$ il funzionale $g_{x,L,v}: L^X \rightarrow L$ definito da*

$$(2.2) \quad g_{x,L,v}(f) = g(f, L)(y)$$

è un limitoide.

OSSERVAZIONE 2.1. L'insieme $G'(A, \mathcal{L}, \gamma)$ dei $G'(A, \mathcal{L})$ -operatori, aventi una stessa funzione leader γ , si atteggia in maniera naturale ad insieme ordinato. Più dettagliatamente rispetto alla relazione

d'ordine « $g_1 \leq g_2$ », definita da « $g_1(f, L) \leq_L g_2(f, L)$ per ogni $(f, L) \in \text{dom } g_1$ », l'insieme $G'(A, \mathcal{L}, \gamma)$ è un reticolo completo. Inoltre risulta che

$$G_\lambda(A, \mathcal{L}, \gamma) \triangleleft G(A, \mathcal{L}, \gamma) \triangleleft G'(A, \mathcal{L}, \gamma).$$

Se ogni $L \in \mathcal{L}$ è completamente distributivo, allora ognuno di questi tre reticoli di operatori è completamente distributivo; e, viceversa, se uno dei tre è completamente distributivo, anche ogni $L \in \mathcal{L}$ lo è.

Se \mathcal{L} è una famiglia autoduale (cioè per ogni $L \in \mathcal{L}$ esiste un reticolo $L' \in \mathcal{L}$ antiisomorfo ad L), allora $G_\lambda(A, \mathcal{L}, \gamma)$ e $G(A, \mathcal{L}, \gamma)$ sono autoduali. Più precisamente per ogni operatore $g \in G(A, \mathcal{L}, \gamma)$ (oppure, $\in G_\lambda(A, \mathcal{L}, \gamma)$) esiste un unico operatore $g^d \in G(A, \mathcal{L}, \gamma)$ (oppure $\in G_\lambda(A, \mathcal{L}, \gamma)$), detto *il duale* di g , tale che

$$(2.3) \quad \forall L, L' \in \mathcal{L}, \forall \varphi \text{ antiomorfismo completo di } L \text{ in } L', \forall f \in \text{adm}(A, L) \quad g(\varphi \circ f, L') = \varphi \circ g^d(f, L);$$

ed inoltre questa applicazione che associa ad ogni operatore g il suo duale g^d è un'involuzione, cioè $g^{dd} = g$, $(\bigwedge_i g_i)^d = \bigvee_i g_i^d$, $(\bigvee_i g_i)^d = \bigwedge_i g_i^d$. ■

3. Teoremi di univocità e di rappresentazione di un G -operatore.

In risposta ad un quesito del prof. E. De Giorgi si ha il seguente

TEOREMA 3.1. *Sia \mathcal{L} una famiglia di reticoli verificante (L.1). Per ogni coppia g_1, g_2 di $G(A, \mathcal{L})$ -operatori*

$$(3.1) \quad \text{se } g_1(f, \mathbf{2}) = g_2(f, \mathbf{2}) \text{ per ogni } f \in \text{adm}(A, \mathbf{2}), \text{ allora } g_1 = g_2.$$

Da questo teorema segue

TEOREMA DI RAPPRESENTAZIONE. *Sia \mathcal{L} una famiglia di reticoli verificante (L.1) e sia g un $G(A, \mathcal{L})$ -operatore. Allora per ogni $X \subset A$ ed $y \in \gamma_\sigma(X)$ esiste una famiglia non degenera $\mathcal{M}_X(y)$ di sottoinsiemi di X tale che:*

$$(3.2) \quad L \in \mathcal{L}, f \in \text{adm}(A, L), \text{ dom } f = X \Rightarrow g(f, L)(y) = L\text{-liminf}_{\mathcal{M}_X(y)} f$$

dove con « L -liminf » si intende che il limite inferiore è calcolato in L .

OSSERVAZIONE 3.2. L'ipotesi di completa distributività, presente nel teorema 3.1 è essenziale per la validità di tale teorema. Nel senso che, se \mathcal{L} contenesse un reticolo L_0 che non sia completamente distributivo, per ogni insieme A_0 con cardinalità maggiore di quella di L_0 esisterebbero due $G(A_0, \mathcal{L})$ -operatori g_1, g_2 per i quali la (3.1) non vale. ■

OSSERVAZIONE 3.3. Il teorema 3.1 e quello di rappresentazione continuano a valere, mutatis mutandis, nel caso che la condizione (L.1) si sostituisca con la (L.1'). Questo in un certo senso giustifica il fatto che in una prima formulazione del teorema di rappresentazione dei limitoidi di funzioni numeriche (vedi [4]), non è richiesto che i limitoidi in gioco verifichino la (L.3). ■

OSSERVAZIONE 3.4. Il teorema 3.1 si può interpretare come un teorema sull'univocità dell'estensione di un $G(A, \{\mathbf{2}\})$ -operatore. In altre parole se g_0 è un $G(A, \{\mathbf{2}\})$ -operatore ed \mathcal{L} contiene $\mathbf{2}$, esiste almeno un $G(A, \mathcal{L})$ -operatore che estende g_0 . Quindi indicati con g_0^- e g_0^+ , rispettivamente, il più piccolo e il più grande $G(A, \mathcal{L})$ -operatore fra quelli che estendono g_0 (questi due operatori sono nel reticolo completo $G(A, \mathcal{L}, \gamma_{g_0})$; vedi osservazione 2.1), il teorema 3.1 dice che le estensioni g_0^-, g_0^+ coincidono sulle coppie (f, L) per ogni reticolo L che sia completamente distributivo; mentre l'osservazione 3.2 afferma che le suddette estensioni di g_0 possono non coincidere quando L fallisce d'essere completamente distributivo. Osserviamo che proprio il poter esplicitare gli operatori g_0^-, g_0^+ , nel caso che valga (L.3), chiarisce la necessità della completa distributività per la validità del teorema 3.1. ■

Un raffinamento del teorema 3.1 nasce dalla soluzione di questo problema: « Fissati $\mathbf{H} \subset \text{adm}(A, \mathbf{2})$, \mathcal{L} con la proprietà (L.1) ed $L \in \mathcal{L}$, determinare le funzioni $f \in \text{adm}(A, L)$ tali che

(3.3) *per ogni coppia g_1, g_2 di $G(A, \mathcal{L})$ -operatori*

$$g_{1|\mathbf{H}} = g_{2|\mathbf{H}} \Rightarrow g_1(f, L) = g_2(f, L).$$

TEOREMA 3.5. *Sia \mathcal{L} con la proprietà (L.1). Allora vale la (3.3) se e solo se (f, L) è \mathbf{H} -misurabile.*

Per ogni $X \subset A$, si ponga

$$\mathbf{H}_X = \{\{x \in X : h(x) = 1\} : h \in \mathbf{H} \text{ e } X = \text{dom } h\} \cup \{\emptyset, X\}.$$

Una coppia (f, L) , dove $f \in \text{adm}(A, L)$, è detta **H-misurabile** se e solo se

$$(3.4) \quad \forall a, b \in L \text{ con } a \leq b, \exists H \in \mathbf{H}_{\text{dom}}, \text{ tale che } \{f \geq a\} \subset H \subset \{f \leq b\}.$$

Questa nozione di misurabilità rispetto ad una famiglia di insiemi è studiata in [7] nell'ambito delle funzioni a valori in un reticolo completo. Alcune proprietà viste in [7] possono servire a dimostrare il teorema precedente.

4. Semicontinuità dei G -operatori.

Su ogni reticolo completo la topologia, che ha come prebase di chiusi la famiglia degli intervalli chiusi, è compatta (vedi *interval topology* in [5]). D'altro canto se il reticolo è completamente distributivo, questa topologia è di Hausdorff. Quindi su ogni reticolo completamente distributivo L esiste un'unica uniformità U_L che induce l'*interval topology*.

Ora sia $\{f_j\}_{j \in J}$ una famiglia di funzioni definite su un insieme X e a valori in un reticolo L completamente distributivo; e siano f un'altra funzione da X in L ed \mathcal{F} un filtro su J . Si dirà che $\{(f_j, L)\}_j$ converge uniformemente verso (f, L) (lungo il filtro \mathcal{F}), se $\{f_j\}_j$ converge uniformemente verso f rispetto a U_L (lungo \mathcal{F}).

TEOREMA DI CONTINUITÀ. *Sia \mathcal{L} una famiglia di reticoli verificante una delle due proprietà: ($\mathcal{L}.1$), ($\mathcal{L}.1'$); e sia g un $G(A, \mathcal{L})$ -operatore. Se $L \in \mathcal{L}$, $f \in \text{adm}(A, L)$, $\{f_j\}_{j \in J} \subset \text{adm}(A, L)$, \mathcal{F} è un filtro su J , e $\text{dom } f = \text{dom } f_j$ per ogni j , allora:*

$$(4.1) \quad \{(f_j, L)\}_j \text{ converge unifor. a } (f, L) \Rightarrow g(f, L) = \lim_{j, \mathcal{F}} g(f_j, L)$$

dove il « $\lim_{j, \mathcal{F}}$ » è effettuato rispetto all'*interval topology*.

Questo teorema dipende dalla seguente caratterizzazione della convergenza uniforme. Si è dimostrato in [8] che $\{f_j\}_j \subset L^X$ converge

uniformemente verso f (lungo \mathcal{F}) rispetto a U_L se e solo se valgono:

$$(4.2) \quad \bigwedge f(B) \leq \liminf_{i, \mathcal{F}} \bigwedge f_i(B) \quad \forall B \subset X \quad (\text{subconvergenza uniforme})$$

$$(4.3) \quad \bigvee f(B) \geq \limsup_{i, \mathcal{F}} \bigvee f_i(B) \quad \forall B \subset X \quad (\text{superconvergenza uniforme}).$$

OSSERVAZIONE 4.1. Nelle stesse ipotesi del teorema precedente valgono

$$(4.4) \quad \{(f_i, L)\}_i, \text{ subconverge unifor. a } (f, L) \Rightarrow g(f, L) \leq \liminf_{i, \mathcal{F}} g(f_i, L)$$

$$(4.5) \quad \{(f_i, L)\}_i, \text{ superconverge unifor. a } (f, L) \Rightarrow g(f, L) \geq \\ \geq \limsup_{i, \mathcal{F}} g(f_i, L). \quad \blacksquare$$

5. Un teorema di isomorfismo fra $G(A, \mathbf{2})$ -operatori e $G(A, \mathcal{L})$ -operatori.

L'insieme $G(A, \mathcal{L})$ di tutti i $G(A, \mathcal{L})$ -operatori è un insieme parzialmente ordinato dalla relazione d'ordine « \leq », definita da « $g_1 \leq g_2$ se e solo se $\forall L \in \mathcal{L}, \forall f \in \text{adm}(A, L)$ si ha $\text{dom } g_1(f, L) = \text{dom } g_2(f, L)$ e $g_1(f, L) \leq_L g_2(f, L)$ ».

Ogni funzione $\gamma: \mathcal{F}(A) \rightarrow \mathcal{F}(A)$ crescente (cioè $\gamma(B) \subset \gamma(C)$ per $B \subset C \subset A$) è la funzione leader di qualche $G(A, \mathcal{L})$ -operatore; e viceversa. Perciò ognuna di queste funzioni γ sarà detta *funzione leader su A* .

Si è osservato nel § 2 ed, in particolare, nell'osservazione 2.1 che

$$G(A, \mathcal{L}) = \bigcup_{\gamma} G(A, \mathcal{L}, \gamma)$$

dove γ percorre le funzioni leader su A . Ed inoltre si è visto che ogni $G(A, \mathcal{L}, \gamma)$ è un reticolo completo rispetto alla relazione d'ordine indotta da $G(A, \mathcal{L})$; e si può notare che due operatori con funzioni leader distinte non sono confrontabili.

Ora sia g un $G(A, \mathbf{2})$ -operatore e sia $\mathbf{2} \in \mathcal{L}$; si indichi con g^- il minimo fra i $G(A, \mathcal{L})$ -operatori che estendono g (vedi osservazione 3.4).

TEOREMA DI ISOMORFISMO. — Se \mathcal{L} verifica (L.1), l'applicazione $g \mapsto g^-$ è un isomorfismo d'ordine di $G(A, \mathbf{2})$ su $G(A, \mathcal{L})$ che induce un isomorfismo completo di $G(A, \mathbf{2}, \gamma)$ su $G(A, \mathcal{L}, \gamma)$ per ogni funzione leader γ di A .

Siano g_1, g_2 due $G(A, \mathcal{L})$ -operatori. Il prodotto $g_1 g_2$ è il $G(A, \mathcal{L})$ -operatore definito da $(g_1 g_2)(f, L) = g_1(g_2(f, L), L)$.

TEOREMA SUL PRODOTTO DI DUE G -OPERATORI. *Se \mathcal{L} verifica (L.1) e g_1, g_2 sono due $G(A, \mathbf{2})$ -operatori, allora $(g_1 g_2)^- = g_1^- g_2^-$.*

Si può osservare che il teorema 3.1 (sull'univocità dell'estensione di un $G(A, \mathbf{2})$ -operatore), il teorema di rappresentazione dei G -operatori ed infine il teorema di isomorfismo ed il teorema sul prodotto di due G -operatori costituiscono i molteplici aspetti della completa distributività dei reticoli; nel senso che si può dimostrare che la completa distributività non solo è sufficiente ma anche necessaria affinché uno qualsiasi dei suddetti teoremi valga.

6. G -operatori polinomiali.

I G -operatori sono ottenibili mediante il prodotto di G -operatori elementari? Ricordiamo che questi operatori elementari sono definiti in [1], [2].

La risposta è negativa. Diamo un esempio.

ESEMPIO 6.1. Sia M_5 il reticolo composto da 5 elementi distinti; il minimo 0 , il massimo 1 ed altri tre elementi a, b, c tali che $a \vee b = 1$, $a \vee c = 1$, $b \vee c = 1$, $a \wedge b = 0$, $a \wedge c = 0$, $b \wedge c = 0$. Sia A un insieme contenente almeno due elementi distinti x_0 e y_0 ; e sia $\gamma: \mathcal{F}(A) \rightarrow \mathcal{F}(A)$ definita da $\gamma(A) = A$ e $\gamma(B) = \emptyset$ per ogni $B \neq A$. Si ponga $\mathcal{L} = \{\mathbf{R}, M_5\}$. Si definisca l'operatore g_0 con funzione leader γ nel seguente modo: « $\forall L \in \mathcal{L}$, $\forall f \in \text{adm}(A, L)$ si pone $g_0(f, L) =$ funzione vuota, se $\text{dom } f \neq A$; altrimenti si pone $g_0(f, L) = f(x_0)$ (risp. $= f(y_0)$), se $L = M_5$ (risp. $L = \mathbf{R}$) ».

Questo operatore g_0 è un $G(A, \mathcal{L})$ -operatore che non è ottenibile mediante il prodotto di G -operatori elementari, perchè ogni prodotto di G -operatori elementari è un G -operatore polinomiale, mentre g_0 non lo è.

Diamo la definizione di G -operatore polinomiale. Se X è un insieme non vuoto un *polinomio in X* è un'espressione formale contenente i simboli x e i simboli \wedge, \vee che è definita da: « (1) ogni $x (\in X)$ è un polinomio in X ; (2) se I è un insieme non vuoto e P_i è un polinomio in X per ogni $i \in I$, allora $\bigwedge_{i \in I} P_i$ e $\bigvee_{i \in I} P_i$ sono polinomi in X ». Un $G(A, \mathcal{L})$ -operatore g è detto *polinomiale*, se $\forall X \subset A$, $\forall \gamma \in \gamma_\sigma(X)$ esiste un poli-

nomio $P_{x,\nu}$ in X tale che $g(f, L)(y) = P_{x,\nu}(f, L)$ per ogni $L \in \mathcal{L}$ ed $f \in \text{adm}(A, L)$ con $\text{dom } f = X$; $P_{x,\nu}(f, L)$ indica l'elemento di L ottenuto assegnando ad ogni simbolo x il valore $f(x)$ ed eseguendo le operazioni \wedge, \vee in L .

Notiamo che qualunque sia il $G(A, \mathcal{L})$ -operatore polinomiale g e qualunque sia $\mathcal{L}' \supset \mathcal{L}$ esiste sempre un $G(A, \mathcal{L}')$ -operatore che estende g . Non è chiaro se questa proprietà di estendibilità valga solo per i G -operatori polinomiali.

Si osserva pure che l'insieme $G_\nu(A, \mathcal{L}, \gamma)$ dei $G(A, \mathcal{L})$ -operatori polinomiali, aventi una stessa guida γ , è un sottoreticolo chiuso di $G_\lambda(A, \mathcal{L}, \gamma)$. Ogni $G(A, \mathbf{2})$ -operatore è polinomiale; più in generale $G_\nu(A, \mathcal{L}) = G(A, \mathcal{L})$ per ogni famiglia di reticoli \mathcal{L} verificante (E.1).

BIBLIOGRAFIA

- [1] E. DE GIORGI, *Generalized limits in calculus of variations*, Topics in Functional Analysis 1980-81, Quaderno della Sc. Nor. Sup. Pisa (1982).
- [2] E. DE GIORGI - T. FRANZONI, *Una presentazione sintetica dei limiti generalizzati*, Port. Math. (1982), to appear.
- [3] G. H. GRECO, *Limitoidi e reticoli completi*, Ann. Univ. Ferrara, **29** (1983), pp. 153-164.
- [4] G. H. GRECO, *Limites et fonctions d'ensembles*, Rend. Sem. Mat. Padova (1982), to appear.
- [5] G. BIRKHOFF, *Lattice Theory*, Am. Math. Soc. Coll. Publ., Providence (1973).
- [6] G. H. GRECO, *Fuzzy integrals and fuzzy measures with their values in complete lattices* J. Math. An. Appl. to appear.
- [7] G. H. GRECO, *On mesurability of functions valued in completely distributive lattices* (1983), to appear.
- [8] G. H. GRECO, *Uniform order-convergence for complete lattices*, Proc. Am. Math. Soc. **90** (1984), pp. 657-658.

Manoscritto pervenuto in redazione il 9 settembre 1983.