

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

CARLO CASOLO

**Gruppi finiti risolubili in cui tutti i sottogruppi
subnormali hanno difetto al più 2**

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 71 (1984), p. 257-271

[<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1984__71__257_0>](http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1984__71__257_0)

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1984, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Gruppi finiti risolubili in cui tutti i sottogruppi subnormali hanno difetto al più 2.

CARLO CASOLO (*)

1. Introduzione.

Indichiamo con $\mathfrak{B}_n$ la classe dei gruppi i cui sottogruppi subnormali hanno difetto di subnormalità minore o uguale a n .

I gruppi $\mathfrak{B}_1$ (chiamati spesso T -gruppi) sono stati ampiamente studiati; da Best e Taussky [1], Zacher [13] e Gaschütz [3] nel caso finito e da Robinson [10] nel caso infinito. In particolare è stato provato, da Gaschütz nel caso finito e da Robinson in generale, che i gruppi $\mathfrak{B}_1$ risolubili sono metabeliani.

Per quanto riguarda i gruppi nilpotenti, fra i risultati provati da Roseblade in [12] è l'esistenza di una funzione $\sigma(n)$, dipendente solo da n , tale che ogni gruppo nilpotente $\mathfrak{B}_n$ è di classe al più $\sigma(n)$. Stime sufficientemente precise per tale funzione sono note solo per $n = 1$ (in tal caso i gruppi sono quelli, ben noti, di Dedekind e $\sigma(1) = 2$) e per $n = 2$ (Heineken [5] ha provato che $\sigma(2) \leq 4$, anche se non si conoscono gruppi $\mathfrak{B}_2$ nilpotenti di classe esattamente 4).

Alla luce di tali risultati ci si può chiedere se, e per quali valori di n , i gruppi $\mathfrak{B}_n$ risolubili hanno lunghezza derivata limitata da una funzione dipendente da n solamente. Purtroppo una tale limitazione non esiste, in generale, neppure per $n = 2$; infatti Robinson [11] dimostra che il prodotto intrecciato non ristretto iterato:

$$R_i \text{ Wr } (R_{i-1} \text{ Wr } (\dots \text{ Wr } (R_2 \text{ Wr } R_1) \dots))$$

(*) Indirizzo dell'A.: Istituto di Algebra e Geometria dell'Università, Via Belzoni 7, 35131 Padova (Italia).

di t copie isomorfe R_i di un gruppo abeliano non banale e privo di torsione, è un gruppo $\mathfrak{B}_2$ di lunghezza derivata esattamente t .

Tuttavia, se si restringe l'indagine ai gruppi $\mathfrak{B}_2$ risolubili finiti, si ottengono risultati in senso diverso; McCaughan e Stonehewer [9] hanno infatti provato che tali gruppi hanno lunghezza di Fitting al più 5 (migliorando in ciò un precedente e non pubblicato risultato di Camina e Renouf) e lunghezza derivata al più 9. Nel medesimo articolo gli autori osservano che se V è un gruppo abeliano elementare di ordine 9, allora $\text{Hol}(V)$ è un gruppo $\mathfrak{B}_2$ di lunghezza di Fitting 4 e lunghezza derivata 5.

Scopo del presente lavoro è dimostrare che se G è un gruppo $\mathfrak{B}_2$ finito e risolubile, allora G ha, di fatto, lunghezza di Fitting al più 4 e lunghezza derivata al più 5.

Concludiamo questa introduzione ricordando che non è noto il comportamento nè dei gruppi $\mathfrak{B}_2$ risolubili e periodici, in generale, nè dei gruppi finiti risolubili $\mathfrak{B}_n$ con $n \geq 3$.

Le notazioni usate sono quelle del libro di D. Gorenstein « Finite groups »; in particolare quelle relative al lemma 2 fanno riferimento al capitolo 3 di tale volume. Inoltre, se G è un gruppo, indicheremo con $\text{Fit}_i(G)$ l' i -esimo termine della serie di Fitting di G , e con $\gamma_i(G)$ l' i -esimo termine della serie centrale discendente di G . Anche quando non esplicitamente richiamato, tutti i gruppi considerati sono finiti.

2. Preliminari.

LEMMA 1 ⁽¹⁾. *Sia P un p -gruppo, per qualche primo p , e $1 \neq \alpha \in \text{Aut}(P)$ un p' -automorfismo che fissa ogni sottogruppo di $P/\zeta_1(P)$. Allora P è abeliano e α un automorfismo potenza.*

DIM. Se α induce l'identità su $P/\zeta_1(P)$, allora induce l'identità su $P/\Phi(P)$ e quindi è l'automorfismo identico su P , il che è escluso per ipotesi. Pertanto, per un noto risultato di Huppert ([8], Hilfssatz 5); α induce una potenza su $P/\zeta_1(P)$ e questo è abeliano. Osserviamo, in particolare che ciò esclude il caso $p = 2$.

Sia ora P un controesempio minimo; allora $\zeta_1(P) \neq 1$ e P non è

⁽¹⁾ Di questa proprietà, probabilmente ben nota, non ho trovato traccia nella letteratura, la sua validità e dimostrazione mi sono state comunicate da A. Caranti e F. Napolitani.

abeliano (v. la dimostrazione del citato Hilfssatz 5 in [8]), inoltre α induce su P/P' la potenza, poniamo r -esima, con $r \not\equiv 1 \pmod{p}$.

Sia $N = \gamma_3(P) = [P', P]$; se $N \neq 1$, allora per la minimalità di P , P/N è abeliano, il che è contraddittorio; dunque $N = 1$ e P è perciò di classe 2.

Siano ora $x, y \in P$ tali che $z = [x, y] \neq 1$; si ha allora, per opportuni $t, t' \in P' \leq Z(P)$:

$$(\circ) \quad z^\alpha = [x, y]^\alpha = [x^\alpha, y^\alpha] = [x^r t, y^r t'] = [x^r, y^r] = z^r$$

Dunque $L = \Omega_1(\langle z \rangle)$, che è contenuto nel centro di P , è α -invariante; per la scelta di P , P/L è perciò abeliano e quindi $L = P'$.

Poichè $|P'| = p \neq 2$ si ha, per ogni $g, h \in P$: $(gh)^p = g^p h^p [h, g]^{\binom{p}{2}} = g^p h^p$ e quindi $\mathcal{G}_1(P) = \{x^p | x \in P\}$; poichè $z \in \mathcal{G}_1(P)$ (infatti $\mathcal{G}_1(P) \geq P'$) deve essere $z = w^p$ per qualche $w \in P$; pertanto $z^\alpha = (w^p)^\alpha = (w^\alpha)^p = (w^r t)^p$ con $t \in P'$ e quindi, essendo $|P'| = p$ si ha:

$$z^\alpha = (w^r)^p t^p = (w^r)^p = (w^p)^r = z^r.$$

Ciò è compatibile con $(\circ)$ solo se $z = 1$. Contraddizione.

LEMMA 2. *Sia D un gruppo non abeliano che opera fedelmente sul p -gruppo abeliano elementare $V = V_1 \times V_2$, e irriducibilmente su V_i , $i = 1, 2$. Allora esiste $g \in V$ tale che $\langle g \rangle^D \stackrel{\text{def}}{=} \langle g^x | x \in D \rangle = V$.*

DIM. Considerati V_1 e V_2 come D -moduli su $GF(p)$, distinguiamo due casi.

1) V_1 e V_2 non sono D -isomorfi.

Supponiamo, con eventuali cambiamenti di indici, che $\dim(V_1) \geq \dim(V_2)$. Sia $n = \dim(V_1)$, $1 \neq t \in V_1$, $1 \neq h \in V_2$ e poniamo $g = th$. Poichè V_1 è D -irriducibile esistono $1 = y_1, \dots, y_n$ in D tali che, posto $t_i = t^{y_i}$, $\{t_1, \dots, t_n\}$ è una base di V_1 . Posto $h_i = h^{y_i}$, supponiamo che $\{h_1, \dots, h_n\}$ non sia una base di V_2 ; allora possiamo supporre, dato che $\dim(V_2) \leq n$, $h_n = h_1^{a_1} \dots h_{n-1}^{a_{n-1}}$ per opportuni interi $a_1, \dots, a_{n-1}$.

Chiaramente $\langle g \rangle^D \geq \langle t_i h_i | i = 1, \dots, n \rangle$ e quindi:

$$\langle g \rangle^D \ni \mu = t_n h_n (t_1 h_1)^{-a_1} \dots (t_{n-1} h_{n-1})^{-a_{n-1}} = t_n t_1^{-a_1} \dots t_{n-1}^{-a_{n-1}}$$

ed è $1 \neq \mu \in V_1$; essendo V_1 D -irriducibile, $\langle g \rangle^D \geq V_1$; poichè $g \notin V_1$ e V_2 è D -irriducibile, si ha $\langle g \rangle^D = V_1 \times V_2$.

Supponiamo, quindi, che $\{h_1, \dots, h_n\}$ sia una base di V_2 , la posizione $\psi: t_i \mapsto h_i$ definisce quindi un isomorfismo tra V_1 e V_2 , poichè questi non sono D -isomorfi, esiste $z \in D$ tale che $(^2)$:

$$(\circ) \quad (t_1^z)\psi \neq (t_1\psi)^z = h_1^z.$$

Sia $t_1^z = t_1^{z_1} \dots t_n^{z_n}$; poichè $(t_1^z)\psi = h_1^{z_1} \dots h_n^{z_n}$, è chiaro che $\langle g \rangle^D \ni t_1^z(t_1^z)\psi$, d'altra parte $\langle g \rangle^D \ni (t_1 h_1)^z = t_1^z h_1^z$ e quindi $\langle g \rangle^D \ni (t_1^z h_1^z)^{-1} t_1^z(t_1^z)\psi = (h_1^z)^{-1}(t_1^z)\psi$ che per $(\circ)$ è un elemento non identico di V_2 . Essendo V_2 D -irriducibile si ha perciò $\langle g \rangle^D \supset V_2$ e poichè $g \notin V_2$, si ha ancora $\langle g \rangle^D = V_1 \times V_2$.

2) V_1 e V_2 sono D -isomorfi.

In tal caso $C_D(V_1) = C_D(V_2) = 1$ (poichè D opera fedelmente su V). Per un risultato di Green (v. [4], th. 3.5.6) il numero di sottospazi di V che sono D -isomorfi è, in tal caso:

$$d = q^2 - 1/q - 1 = q + 1 \quad \text{dove } q = |\text{Hom}_D(V_1, V_1)|.$$

Poniamo $H = \text{Hom}_D(V_1, V_1)$ e valutiamo $q = |H|$.

Sia $\Theta: D \rightarrow \text{Hom}(V_1)$ il monomorfismo (moltiplicativo) di D in $\text{Aut}(V_1) \subseteq \text{Hom}(V_1)$; definito da $v(x\Theta) = v^x$, $\forall v \in V, \forall x \in D$.

Allora $H = \{\psi \in \text{Hom}(V_1) | \psi(x\Theta) = (x\Theta)\psi, \forall x \in D\}$.

Poichè V_1 è D -irriducibile, H è un'algebra con divisione di dimensione finita su $GF(p)$, dunque $q = p^r$ per qualche intero r , e, se H^* è il sottogruppo moltiplicativo di H , H^* è ciclico di ordine $p^r - 1$, inoltre $H^* \leq \text{Aut}(V_1)$. Dato $\psi \in H^*$ definiamo $C_{r_1}(\psi) = \{v \in V_1 | v\psi = v\}$; $C_{r_1}(\psi)$ è sottospazio di V_1 , inoltre dati $v \in C_{r_1}(\psi)$ e $x \in D$ si ha:

$$(v(x\Theta))\psi (v\psi)(x\Theta) = v(x\Theta) \quad \text{quindi } v^x = v(x\Theta) \in C_{r_1}(\psi)$$

dunque $C_{r_1}(\psi)$ è D -invariante e perciò $\psi = 1$ oppure $C_{r_1}(\psi) = \{0\}$. Pertanto $C_{r_1}(\psi) = 1$ per ogni $v \in V_1 \setminus \{0\}$ e quindi, poichè $|V_1 \setminus \{0\}| = p^n - 1$ (dove $n = \dim(V_1)$) si ha $p^r - 1 \leq p^n - 1$.

Supponiamo, per assurdo $r = n$, allora $|H^*| = |V_1 \setminus \{0\}|$ e quindi H^* è transitivo sugli elementi di $V_1 \setminus \{0\}$; essendo H^* ciclico, esso coincide con il proprio centralizzante in S_{p^n-1} , il gruppo di permutazioni su $p^n - 1$ oggetti (v. [7], II 3.1), e quindi a maggior ragione in $\text{Aut}(V_1)$;

(2) Si noti che se $(t_1^z)\psi = (t_1\psi)^z$ per ogni z , allora $(t_1^z)\psi = (t_1\psi)^z$ per ogni $z \in D$, e quindi $(t^z)\psi = (t\psi)^z$ per ogni $t \in V_1$ e per ogni $z \in D$.

ma $(D)\Theta \leq C_{\text{Aut}(V)}(H^*)$ e quindi $(D)\Theta \leq H^*$ il che è assurdo perchè $(D)\Theta \cong D$ non è abeliano.

Dunque $|H| = p^r$ con $r < n$ e quindi d , il numero dei sottospazi di V che sono D -invarianti è $d = p^r + 1$. Siano $K_1, \dots, K_d$ tali sottospazi, essi hanno tutti dimensione n e intersezione a due a due banale, quindi:

$$\left| \bigcup_{i=1}^d K_i \right| = d(p^n - 1) + 1 = (p^r + 1)(p^n - 1) + 1 < (p^n + 1)(p^n - 1) + 1 = p^{2n} = |V|.$$

Ma allora esiste $g \in V$ tale che $g \notin K_i$ per ogni $i = 1, \dots, d$ e perciò, poichè $\langle g \rangle^D$ è D -invariante, $\langle g \rangle^D = V$.

Il lemma che segue è un'ovvia generalizzazione di un enunciato di Hobby [6], in un lavoro sui gruppi in cui il normalizzante di ogni sottogruppo è normale.

LEMMA 3. *Sia G un gruppo finito, $x \in G$. Se $\langle x \rangle \triangleleft \langle x \rangle^G$ allora $\langle x \rangle^G$ è nilpotente di classe al più 2; se inoltre $|x| = p$, per qualche primo p , $\langle x \rangle^G$ è abeliano elementare.*

LEMMA 4. *Sia P un p -gruppo, p un primo, e D un p' -gruppo che opera su P in modo tale che, posto $G = PD$ sia $\langle g \rangle \triangleleft \langle g \rangle^G$ per ogni $g \in P$. Allora se $x \in D'$ opera come una potenza su $P/\Phi(P)$, x opera come una potenza su P . In particolare se x non opera trivialmente allora P è abeliano.*

DIM. Se x induce l'identità su $P/\Phi(P)$, allora x è l'identità su P . Supponiamo quindi che x non induca l'identità su $P/\Phi(P)$, allora per il lemma 1, è sufficiente provare che $\Phi(P) = \mathcal{C}_1(P)$; cioè che $P/\mathcal{C}_1(P)$ è abeliano. Procedendo per induzione su $|P|$, possiamo supporre $\mathcal{C}_1(P) = 1$; e quindi P ha esponente p e, per il lemma 3, $\langle g \rangle^G$ è abeliano elementare per ogni $g \in P$.

Sia $\bar{P} = P/\Phi(P) = V_1/\Phi(P) \times \dots \times V_n/\Phi(P) = \bar{V}_1 \times \dots \times \bar{V}_n$ la riduzione di $\bar{P}$ in fattori D -irriducibili. Ovviamente $P = V_1 \dots V_n$.

Sia $n = 1$ e si consideri $g \in P \setminus \Phi(P)$; $\langle g \rangle^G \Phi(P)$ è D -invariante, quindi $\langle g \rangle^G \Phi(P) = P$, perciò $\langle g \rangle^G = P$ e P è abeliano elementare.

Sia dunque $n > 1$; se proviamo che tutti i prodotti $V_i V_j$ sono abeliani, resta provato che P stesso è abeliano.

Sia $\tilde{D} = D/C_D(V_i V_j)$; $\tilde{D}$ non è abeliano perchè, se così fosse: $C_D(V_i V_j) > D' > \langle x \rangle$ mentre x induce una potenza non identica su

$\bar{V}_i \times \bar{V}_j$. Per il lemma 2, esiste dunque $\bar{g} \in \bar{V}_i \times \bar{V}_j$ tale che $\langle \bar{g} \rangle^a = \bar{V}_i \times \bar{V}_j$, cioè $\langle g\Phi(P) \rangle^a = \bar{V}_i \times \bar{V}_j$ e quindi $\langle g \rangle^a \Phi(P) = V_i V_j$. Ora $\Phi(V_i V_j)$ car $V_i V_j \triangleleft G$ e perciò $\Phi(V_i V_j) \triangleleft G$. Se $\Phi(V_i V_j) = 1$, allora $V_i V_j$ è abeliano. Altrimenti, per ipotesi induttiva, x induce una potenza non identica su $P/\Phi(V_i V_j)$ che risulta perciò abeliano, e quindi $\Phi(V_i V_j) = \Phi(P)$; pertanto $V_i V_j = \Phi(P) \langle g \rangle^a = \Phi(V_i V_j) \langle g \rangle^a$; ciò implica $V_i V_j = \langle g \rangle^a$ e quindi che $V_i V_j$ è abeliano elementare.

L'ultima affermazione discende da Hilfssatz 5 in [8].

Riportiamo ora alcune conseguenze di questo lemma che saranno utili nella prossima sezione.

COROLLARIO 1. *Sia $G = PD$, con P un p -sottogruppo normale di G e D un p' -gruppo tali che $\langle g \rangle \triangleleft \langle g \rangle^a$ per ogni $g \in P$; e sia $x \in D' \cap Z(D)$ con $|x| = q$ e $q|p-1$. Allora P è generato dall'insieme degli elementi $g \in P$ tali che $g^x = g^n$ per qualche intero n . Inoltre se λ è un intero, $1 \leq \lambda \leq p-1$ e $\lambda^a \equiv 1 \pmod{p}$, allora $P_\lambda = \{g \in P | g^x = g^n \text{ con } n \equiv \lambda \pmod{p}\}$ è un sottogruppo D -invariante di P . Se $\lambda \neq 1$, P_λ è abeliano.*

DM. Dimostriamo la prima parte per induzione su $|P|$. Se $P/\Phi(P)$ non è D -irriducibile (per l'azione di coniugio di D su P) esistono, per Maschke, $\Phi(P) < H, K \triangleleft G$ tali che $HK = P$; per ipotesi induttiva H e K sono generati da elementi il cui coniugato tramite x è una loro potenza e quindi lo stesso vale per P . Sia quindi $P/\Phi(P)$ D -irriducibile; poichè $q|p-1$, il campo $GF(p)$ contiene tutte le radici q -esime dell'unità e quindi contiene le radici caratteristiche di x ; poichè $x \in Z(D)$ e D opera irriducibilmente su $P/\Phi(P)$ (v. [4], lemma 2.2.1) x è uno scalare (una potenza) su $P/\Phi(P)$ e quindi, per il lemma 4, è un automorfismo potenza su P .

Siano ora λ e P_λ come da ipotesi e sia $T = P_\lambda$; siano poi $g \in P_\lambda$ e $y \in D$, poichè $x \in Z(D)$ si ha: $(g^y)^x = g^{xy} = (g^n)^y = (g^y)^n$ con $n \equiv \lambda \pmod{p}$, e quindi T è D -invariante; chiaramente poi x induce la potenza λ -esima su $T/\Phi(T)$ e dunque, per il lemma 4, x induce un automorfismo potenza su T e per ogni $h \in T$ è $h^x = h^n$ con $n \equiv \lambda \pmod{p}$, quindi $T \subseteq P_\lambda$ e perciò $T = P$.

Per rendere più lineari successive dimostrazioni conviene evidenziare un caso particolare.

COROLLARIO 2. *Nelle stesse ipotesi del corollario precedente, sia $p \neq 2$ e $|x| = 2$. Allora $[P, \langle x \rangle] = \{g \in P | g^x = g^{-1}\}$; in particolare $[P, \langle x \rangle]$ è abeliano.*

DIM. Poichè $|x| = 2$ è $[g, x]^x = [g, x]^{-1}$ per ogni $g \in P$, d'altra parte se $g^x = g^{-1}$ allora $[g, x] = g^{-1}g^x = g^{-2}$ ed essendo $p \neq 2$, si ha $g \in [P, \langle x \rangle]$. Dunque $[P, \langle x \rangle] = \langle I \rangle$ dove $I = \{g \in P | g^x = g^{-1}\}$, ma $I = P_{p-1}$ è sottogruppo di P e quindi $[P, \langle x \rangle] = I$.

LEMMA 5. *Nelle stesse ipotesi e notazioni del corollario 1, sia $p \neq 2$. Allora $\Omega_1(P_\lambda)$ normalizza ogni sottogruppo di P_μ con $\mu \neq \lambda$. Se $\lambda \neq 1$ allora $\Omega_1(P_\lambda) \leq Z(P)$.*

DIM. Siano $\lambda \neq \mu$ interi compresi tra 1 e $p-1$, $g \in \Omega_1(P_\lambda)$ e $h \in P_\mu$; allora $g^x = g^\lambda$ e $h^x = h^n$ con $n \equiv \mu \pmod{p}$; proviamo che g normalizza $\langle h \rangle$, resta così dimostrato che $\Omega_1(P_\lambda)$ normalizza ogni sottogruppo di P_μ . Consideriamo $\langle gh \rangle^g$. $\langle gh \rangle^g \ni g^r h^r$ per ogni intero r , infatti per $r=1$ la cosa è banale, supposta vera per $r-1$ si ha: $\langle gh \rangle^g \ni gh(g^{r-1}h^{r-1})^h = g^r h^r$; inoltre $\langle gh \rangle^g \ni (gh)^x = g^\lambda h^n$ e quindi $\langle gh \rangle^g \ni g^n h^n h^{-n} g^{-\lambda} = g^{n-\lambda}$, poichè g ha ordine p e $n \not\equiv \lambda \pmod{p}$ si ha $g \in \langle gh \rangle^g$; ma per ipotesi $\langle gh \rangle \triangleleft \langle gh \rangle^g$ e quindi g normalizza $\langle gh \rangle$.

Ora $H = \langle g, gh \rangle = \langle g, h \rangle$ è un p -gruppo con massimale ciclico $\langle gh \rangle$, essendo $p \neq 2$, si ha: $(gh)^p = g^p h^p = h^p$ e dunque $|h| = |hg|$, pertanto $\langle h \rangle$ è massimale in H e quindi g normalizza $\langle h \rangle$.

Ciò prova la prima asserzione.

Supponiamo ora $\lambda \neq 1$; poichè $g \in \Omega_1(P_\lambda)$ opera per coniugazione come un automorfismo potenza su P_μ , $\mu \neq \lambda$, sul quale x opera come una potenza omogenea, si ha $[g, x] \in C_G(P_\mu)$; ma $[g, x] = g^{-1}g^x = g^{\lambda-1}$, essendo $\lambda \neq 1$ è quindi $g \in C_G(P_\mu)$, pertanto $\Omega_1(P_\lambda) \leq C_P(P_\mu)$ per $\mu \neq \lambda$. D'altra parte, essendo $\lambda \neq 1$, P_λ è abeliano. Poichè l'unione dei P_v , $1 \leq v \leq p-1$ genera P si ottiene allora $\Omega_1(P_\lambda) \leq Z(P)$.

3. Gruppi $\mathfrak{B}_2$ risolubili.

Osserviamo, innanzi tutto, che ogni quoziente e ogni sottogruppo subnormale di un gruppo $\mathfrak{B}_n$ è anch'esso $\mathfrak{B}_n$. (Gaschütz [3] prova inoltre che se G è $\mathfrak{B}_1$ finito risolubile, allora ogni suo sottogruppo è $\mathfrak{B}_1$; un risultato analogo non vale però per i gruppi $\mathfrak{B}_2$; infatti il gruppo generale lineare $GL(2, 3)$ è $\mathfrak{B}_2$ mentre i suoi 2-sottogruppi di Sylow sono diedrali di ordine 16, e non sono $\mathfrak{B}_2$, vedi anche [9]).

Enunciamo ora, per comodità, due noti risultati sui gruppi $\mathfrak{B}_2$ dei quali faremo ampio uso nel seguito.

TEOREMA 1 (Heineken [5]). *Se tutti i sottogruppi ciclici del gruppo G sono subnormali di difetto al più 2, allora $\gamma_5(G) = \gamma_4(G)^3 = 1$.*

Dal fatto, ben noto, che $G^{(n)} \leq \gamma_{2^n}(G)$ segue immediatamente che un gruppo $\mathfrak{B}_2$ nilpotente N ha lunghezza derivata al più 2 se $3 \nmid |N|$, al più 3 altrimenti. Questa particolarità legata al primo 3 ci costringerà a trattare dei casi particolari. Abbiamo già osservato che non è noto se 4 sia la migliore limitazione della classe dei gruppi $\mathfrak{B}_2$ nilpotenti; in effetti non si sa se esistono 3-gruppi $\mathfrak{B}_2$ di classe esattamente 4.

TEOREMA 2 (McCaughan e Stonehewer [9]). *Sia G un gruppo finito risolubile $\mathfrak{B}_2$, allora tutti i fattori principali di G evitati da $\text{Fit}(G)$ sono di rango al più 2.*

Di questo teorema, oltre a utilizzare direttamente l'enunciato, faremo ripetutamente uso di una argomentazione contenuta nella dimostrazione originale, che, per comodità, riportiamo nel lemma che segue.

LEMMA 6. *Sia G un gruppo finito $\mathfrak{B}_2$, P un p -sottogruppo normale di G , x un p' -elemento di G tale che $\langle x \rangle P \triangleleft \triangleleft G$ e $[P, \langle x \rangle] \cap C_P(x) = 1$, e sia M un p' -sottogruppo di $\langle x \rangle^G$ contenente x ; allora M normalizza ogni sottogruppo di $C_P(x)$.*

DIM. Sia $D \leq C_P(x)$; poichè x è un p' -elemento e $P \triangleleft G$ si ha: $[P, \langle x \rangle] C_P(x) = P$ (v. [4], th. 5.3.5.) e quindi:

$$\langle x \rangle [P, \langle x \rangle] D \triangleleft \triangleleft P \langle x \rangle \triangleleft \triangleleft G,$$

essendo G un gruppo $\mathfrak{B}_2$ si ha $\langle x \rangle [P, \langle x \rangle] D \triangleleft (\langle x \rangle [P, \langle x \rangle] D)^G$, in particolare $\langle x \rangle^G$, e quindi M , normalizza $\langle x \rangle [P, \langle x \rangle] D$. D'altra parte $\langle x \rangle P \triangleleft \triangleleft G$ e $M \leq \langle x \rangle^G$, dunque M normalizza $\langle x \rangle P$, da ciò segue che M normalizza $\langle x \rangle P \cap M = \langle x \rangle (P \cap M) = \langle x \rangle$, e dunque anche $C_P(x)$. Ma allora M normalizza:

$$C_P(x) \cap \langle x \rangle [P, \langle x \rangle] D = D(C_P(x) \cap \langle x \rangle [P, \langle x \rangle]) = D$$

dato che $C_P(x) \cap [P, \langle x \rangle] = 1$. Come si voleva.

LEMMA 7. *Sia $G = PQ$ un gruppo $\mathfrak{B}_2$, con $P \triangleleft G$ un p -gruppo, p primo, e Q un q -gruppo, q un primo diverso da p . Se $q \nmid p-1$ allora $Q/C_Q(P)$ è abeliano.*

DIM. Osserviamo, innanzi tutto che, per ogni primo $p, q \neq p$ e $q \nmid p-1$ implicano $q \neq 2$. Procediamo quindi per induzione su $|G|$.

Sia $\Phi(P) \neq 1$, $\bar{G} = G/\Phi(P)$, $\bar{Q} = Q\Phi(P)/\Phi(P)$ e $\bar{P} = P/\Phi(P)$, poichè $\bar{G}$ è un gruppo $\mathfrak{B}_2$ si ha per ipotesi induttiva $\bar{Q}/C_{\bar{Q}}(\bar{P})$ abeliano. Ma essendo Q un p' -gruppo $C_{\bar{Q}}(\bar{P}) = C_Q(P)\Phi(P)/\Phi(P)$ e quindi $Q/C_Q(P) \cong \bar{Q}/C_{\bar{Q}}(\bar{P})$ è abeliano. Possiamo quindi supporre $\Phi(P) = 1$, cioè P abeliano elementare.

Supponiamo che esista $1 \neq H < P$ con $H \triangleleft G$. Allora, per Maschke, esiste un complemento K di H in P , con $K \triangleleft G$.

Ora $G/K = PQ/K = KHQ/K \cong QH/QH \cap K = QH$ e, analogamente, $G/H \cong QK$. Essendo isomorfi a quozienti di G , QH e QK sono gruppi $\mathfrak{B}_2$ e dunque, per ipotesi induttiva, si ha:

$$C_Q(H) \geq Q' \quad \text{e} \quad C_Q(K) \geq Q' \quad \text{quindi} \quad C_Q(P) = C_Q(H) \cap C_Q(K) \geq Q'.$$

Rimane solo il caso in cui P è normale minimo in G .

Sia $x \in Q$ tale che $C = C_P(x) \neq 1$. Essendo P abeliano si ha: $C \cap [P, \langle x \rangle] = 1$. Dato che $\langle x \rangle P \triangleleft \triangleleft G$ si ha, per il lemma 6, che $\langle x \rangle^q$ normalizza ogni sottogruppo di C e pertanto opera per coniugazione come un gruppo di automorfismi potenza su C ; poichè $q \nmid p-1$ ciò può avvenire solo se $\langle x \rangle^q$ centralizza C ; quindi $C = C_P(\langle x \rangle^q)$ e $C \triangleleft G$. Essendo $C \neq 1$ e P normale minimo deve essere $C = P$ e quindi $x \in C_Q(P)$. Pertanto $Q/C_Q(P)$ opera come un gruppo di automorfismi privi di punti fissi su P , essendo $q \neq 2$ si conclude che $Q/C_Q(P)$ è ciclico.

COROLLARIO 3. *Sia G un gruppo $\mathfrak{B}_2$ con $\text{Fit}(G)$ un p -gruppo, per qualche primo p ; allora i q -sottogruppi di Sylow di $\text{Fit}_2(G)$ con $q \neq p$ e $q \nmid p-1$ sono abeliani.*

DIM. Sia Q un q -sottogruppo di Sylow di $\text{Fit}_2(G)$, $q \neq p$, allora $Q \text{ Fit}(G) \triangleleft G$, quindi $Q \text{ Fit}(G)$ è $\mathfrak{B}_2$ e si applica il lemma precedente, tenendo conto che $C_Q(\text{Fit}(G)) = 1$.

La dimostrazione del prossimo lemma ricalca quella data da McCaughan e Stonehewer del risultato da noi riportato come teorema 2.

LEMMA 8. *Sia G un gruppo $\mathfrak{B}_2$ finito risolubile, $\text{Fit}(G) = P$ un p -gruppo per qualche primo p ; allora i q -fattori principali di G con $q \nmid p-1$ che giacciono tra P e $\text{Fit}_2(G)$ sono ciclici.*

DIM. Possiamo supporre P abeliano elementare, infatti è ben noto che:

$$\text{Fit}(G/\Phi(P)) = \text{Fit}(G)/\Phi(P) = P/\Phi(P).$$

Procediamo per assurdo; sia M/N un q -fattore principale di G , $q \nmid p-1$, con $P \leq N < M \leq \text{Fit}_2(G)$ e $|M|$ minimo per essere M/N non ciclico. Chiaramente $M/P < Q/P$ dove Q/P è il q -sottogruppo di Sylow di $\text{Fit}_2(G)/P$.

Sia $x \in M \setminus N$, allora $P\langle x \rangle^G = M$, infatti sussiste il G -isomorfismo: $M/N = P\langle x \rangle^G N/N \cong P\langle x \rangle^G / (P\langle x \rangle^G \cap N)$ e, per la minimalità di M , è $M = P\langle x \rangle^G$.

Usiamo ora il soprassegno per indicare elementi e sottogruppi modulo P . Per il corollario 3, $\bar{M}$ è abeliano e quindi l'applicazione $\bar{x} \mapsto \bar{x}^a$ induce un G -isomorfismo di $\bar{M}/\Omega_1(\bar{M})$ su $\Phi(\bar{M})$. Per il teorema di Jordan-Hölder e la minimalità di M , è $\Omega_1(\bar{M}) = \bar{M}$, cioè $\bar{M} = M/P$ è abeliano elementare. Sia M_1 un complemento di P in M , $N_1 = N \cap M_1$ e sia infine M_0 un complemento di N_1 in M_1 ; $M_0 \cong M/N$ è un gruppo abeliano non ciclico che opera fedelmente su P , si ha quindi $P = \prod_{1 \neq x \in M_0} C_P(x)$ (o) e, per ogni $x \in M_0$ si ha $[P, \langle x \rangle] \cap C_P(x) = 1$; inoltre, per quanto precedentemente osservato, $\langle x \rangle^G P = M$, chiaramente quindi $M_1 \leq \langle x \rangle^G$, e per il lemma 6, M_1 opera come un gruppo di automorfismi potenza sul p -gruppo abeliano elementare $C_P(x)$. Poichè $q \nmid p-1$ allora M_1 centralizza $C_P(x)$; ma questo avviene per ogni $x \in M_0$ e quindi, per (o), M_1 centralizza P . Assurdo.

L'assumere che i q -fattori siano contenuti in $\text{Fit}_2(G)$ serve, in realtà, solo per facilitare la dimostrazione; più avanti (teorema 3) sarà chiaro che tutti i q -fattori principali con $q \nmid p-1$ evitati da P sono ciclici.

Prima di proseguire ricordiamo che se H è un gruppo finito, $\text{Fit}(H)$ coincide con l'intersezione dei centralizzanti dei fattori principali di H . È ovvio che, qualora $\text{Fit}(H)$ sia noto è sufficiente considerare i fattori principali in esso contenuti; in particolare $H/\text{Fit}(H)$ è un prodotto subdiretto di gruppi di automorfismi dei fattori principali di H contenuti in $\text{Fit}(H)$.

LEMMA 9. *Sia G un gruppo $\mathfrak{B}_2$ finito risolubile; allora il quoziente $\text{Fit}_3(G)/\text{Fit}_2(G)$ è abeliano.*

DIM. (Dove scriviamo $F_i = \text{Fit}_i(G)$ e $F = F_1$).

Per quanto sopra ricordato e per il teorema 2, F_3/F_2 è un prodotto subdiretto di gruppi lineari nilpotenti di grado al più 2; per un fatto ben noto (vedi p. es. Dixon [2], th. 1.4.B) tali gruppi sono abeliani o hanno 2-componente non identica; pertanto F_3/F_2 è abeliano se e solo se tale è il suo 2-sottogruppo di Sylow.

Sia G un controesempio minimo, allora $G = Q$ dove Q/F_2 è il 2-sottogruppo di Sylow di F_3/F_2 (infatti, essendo $Q \triangleleft G$, Q è $\mathfrak{B}_2$ ed è $F_2 = \text{Fit}_2(Q)$). Supponiamo che G abbia due sottogruppi normali minimi distinti M_1 ed M_2 , e siano $L_i/M_i = \text{Fit}_2(G/M_i)$, $i = 1, 2$; per la scelta di G , i quozienti G/L_i sono abeliani, ma facilmente si verifica che $L_1 \cap L_2 = F_2$ e quindi che G/F_2 è abeliano, contro la scelta di G . Dunque G ha un unico sottogruppo normale minimo e, in particolare, F è un p -gruppo per qualche primo p .

Poichè $\text{Fit}(G/\Phi(F)) = F/\Phi(F)$ la minimalità di G comporta $\Phi(F) = 1$ e quindi F è abeliano elementare. Chiaramente F_2/F è un p' -gruppo; osserviamo poi che F non è un 2-gruppo, perchè, se così fosse, per il lemma 8 tutti i fattori principali di G/F sarebbero ciclici e quindi G/F_2 abeliano. Pertanto G/F è un p' -gruppo. Per Maschke F si decompone allora nel prodotto diretto di sottogruppi normali minimi di G , poichè G ha un unico sottogruppo normale minimo, questo coincide con F .

Sia K un complemento di F in G , H il 2'-sottogruppo di $\text{Fit}(K)$ (chiaramente $H \neq 1$) e D un 2-sottogruppo di Sylow di K . Ovviamente $HD = K$ e $\bar{D} = D/C_D(H) \cong K/\text{Fit}(K) \cong G/F_2$ non è abeliano. Scelto $\bar{x} = xC_D(H)$, $x \in K$ un elemento di $\bar{D}' \cap Z(\bar{D})$ con $|\bar{x}| = 2$; essendo K un gruppo $\mathfrak{B}_2$, per il corollario 2⁽³⁾, $\bar{x}$ opera per coniugazione come l'inversione su $[\bar{H}, \langle \bar{x} \rangle]$ dove $\bar{H} = HC_D(H)$ e quindi x opera come l'inversione su $T = [H, \langle x \rangle]$; inoltre dato che $\bar{x} \in Z(\bar{D})$, T è D -invariante, ma notoriamente $T \triangleleft H$ e quindi $T \triangleleft HD = K$; ovviamente $T \neq 1$. Sia V sottogruppo normale minimo di K contenuto in T . È $\text{rg}(V) > 1$, perchè se $\text{rg}(V) = 1$ allora $D/C_D(V)$ è abeliano, quindi: $C_D(V) \geq D'C_D(H) \geq \langle x \rangle$ contro il fatto che x induce l'inversione su V .

Ora, poichè $(|V|, |F|) = 1$ e V non è ciclico, esiste $g \in V$ tale che $C = C_F(g) \neq 1$. È $C_V(C) < V$, perchè se fosse $C_V(C) = V$ allora $C = C_F(V)$ e quindi $C \triangleleft G$ e, poichè F è normale minimo, $C = F$ il che è assurdo dato che $C_G(F) = F$.

Ora $\langle g \rangle F \triangleleft \triangleleft G$ poichè V è normale minimo in K ; V è un p' -sottogruppo di $\langle g \rangle^G$, essendo poi F abeliano si ha $[F, \langle x \rangle] \cap C = 1$ e dunque, per il lemma 6, V opera come un gruppo di automorfismi potenza su C ; poichè questi sono centrali nel gruppo degli automorfismi di C e chiaramente C è normalizzato da x , si ha $[V, x] \leq C_V(C) < V$. Contraddizione, perchè essendo x l'inversione su V , si ha $[V, x] = V$.

(³) Il corollario 2 è stato provato per H un p -gruppo, $p \neq 2$; ma è chiaro che nulla cambia se H è un 2'-gruppo nilpotente.

TEOREMA 3. *Sia G un gruppo $\mathfrak{B}_2$ finito risolubile; allora $G/\text{Fit}_2(G)$ è supersolubile e metabeliano. In particolare G ha lunghezza di Fitting al più 4.*

DIM. Poichè, per il lemma 9, $\text{Fit}_3(G)/\text{Fit}_2(G)$ è abeliano, è sufficiente provare che i fattori principali di G giacenti tra $\text{Fit}_2(G)$ e $\text{Fit}_3(G)$ sono tutti ciclici.

Ora $\text{Fit}_2(G) = \cap C_G(R/S)$ al variare di R/S tra i fattori principali di G tali che $S \geq \text{Fit}(G)$, quindi, per il teorema 2, fattori di rango al più 2. Osserviamo che se H è un sottogruppo di $GL(2, p)$ e N è sottogruppo normale abeliano di H , allora i fattori principali di H contenuti in N sono ciclici. Infatti, posto $S = SL(2, p)$ è $N \cap S \triangleleft H$; inoltre $N/(N \cap S) \cong NS/S$ è ciclico e d'altra parte $N \cap S$ è un sottogruppo abeliano di S e dal teorema 2.8.3 in [4], segue subito che $N \cap S$ è ciclico, per Jordan-Hölder si conclude.

Torniamo al nostro caso e procediamo per assurdo: sia M/N fattore principale di G , $\text{Fit}_2(G) \leq N < M < \text{Fit}_3(G)$ con $|M|$ minimo perchè M/N non sia ciclico. Senz'altro esiste un fattore principale di G , R/S con $S \geq \text{Fit}(G)$ tale che $M \not\leq C = C_G(R/S)$ e quindi $C \cap M < M$. Ora: $(M \cap C)N/N \cong M \cap C/(N \cap C)$; poichè $(M \cap C)N \triangleleft G$ e $N < (M \cap C)N < M$, la minimalità di M comporta $(M \cap C)N = N$ e perciò $MC/NC \cong M/(M \cap NC) = M/(M \cap C)N = M/N$. Ora, MC/NC è fattore principale di G/C , ma G/C è un gruppo lineare di grado al più 2 e MC/C è abeliano (dato che, essendo $M < \text{Fit}_3(G)$, $M/\text{Fit}_2(G)$ è abeliano), dunque, per quanto osservato $MC/NC \cong M/N$ è ciclico. Contraddizione.

LEMMA 10. *Sia G un gruppo finito $\mathfrak{B}_2$ metanilpotente. Se i 3-sottogruppi di Sylow di G sono al più metabeliani, allora $G^{(3)} = 1$; altrimenti $G^{(4)} = 1$.*

DIM. Supponiamo che i 3-sottogruppi di Sylow di G siano al più metabeliani e procediamo per induzione su $|G|$; possiamo quindi supporre che $P = \text{Fit}(G)$ sia un p -gruppo per qualche primo p , e che G possieda un solo sottogruppo normale minimo.

Allora $G = PD$ con $D \cong G/P$ un p' -gruppo nilpotente e $C_D(P) = 1$. Se D è abeliano allora per il teorema 1 e per l'ipotesi sui 3-Sylow di G si ha $G^{(3)} = 1$. Ciò comprende, per il corollario 3, il caso $p = 2$. Sia dunque $p \neq 2$ e D non abeliano, allora, ancora per il corollario 3, possiamo scegliere $x \in D' \cap Z(D)$ tale che $|x| = q$ e $q|p - 1$, q un primo. Al variare di λ intero, $1 \leq \lambda \leq p - 1$ e $\lambda^q \equiv 1 \pmod{p}$ siano: $P_\lambda = \{g \in P | g^x = g^\lambda \text{ con } n \equiv \lambda \pmod{p}\}$.

Per il corollario 1, i P_λ sono sottogruppi D -invarianti di P . Inoltre, per il lemma 5, se $\lambda \neq 1$ allora $\Omega_1(P_\lambda) \leq Z(P)$ e dunque $\Omega_1(P_\lambda) \triangleleft G$. Ovviamente $\Omega_1(P_\lambda) \cap \Omega_1(P_\mu) = 1$ se $\lambda \neq \mu$, e poichè supponiamo che G abbia un unico sottogruppo normale minimo, deve essere $P_\lambda \neq 1$ per un solo valore $\lambda \neq 1$. Chiamiamo T tale P_λ . Ci siamo quindi ridotti al caso $P = TC$ con $C = P_1 = C_P(x)$, $T \triangleleft G$, T abeliano sul quale x opera come una potenza non identica. (Ovviamente quindi $C \cap T = 1$). Ancora per il lemma 5, $\Omega_1(C)$ opera per coniugazione come un gruppo di automorfismi potenza di T ; essendo quest'ultimo abeliano si ha che $\Omega_1(C)/C_{\Omega_1(C)}(T)$ è ciclico. Supponiamo $L = C_{\Omega_1(C)}(T) \neq 1$, essendo $L \triangleleft C$ si ha allora $R = L \cap Z(C) \neq 1$; ma allora $R = \Omega_1(Z(P\langle x \rangle)) \triangleleft G$ dato che $R \text{ car } P\langle x \rangle \triangleleft G$, inoltre $R \cap T = 1$, contro l'ipotesi che G abbia un solo sottogruppo normale minimo. Quindi $L = 1$ e $\Omega_1(C)$ è ciclico, essendo $p \neq 2$ si conclude che C è ciclico.

Consideriamo ora il quoziente G/T ; poichè $P/T \cong C$ è ciclico, $G'T/T$ centralizza P/T ; in particolare $D'T/T$ centralizza P/T ; poichè per l'ipotesi sui 3-sottogruppi di G e per il teorema 1, D' è abeliano ed è $D'T/T \cap P/T = 1$ si ha che $D'P/T = G'P/T$ è abeliano e quindi $G^{(2)} \leq T$. Essendo T abeliano si ha finalmente $G^{(3)} = 1$.

Con argomenti del tutto analoghi si prova che $G^{(4)} = 1$, senza alcuna ipotesi sui 3-sottogruppi di G .

Il teorema 3 e il lemma 10 consentono di concludere immediatamente che se G è un gruppo finito risolubile $\mathfrak{B}_2$ e $3 \nmid |\text{Fit}_2(G)|$ allora $G^{(5)} = 1$; la dimostrazione dello stesso risultato nel caso generale ci obbliga ad ulteriori osservazioni.

LEMMA 11. *Se G è un gruppo finito risolubile $\mathfrak{B}_2$, allora il quoziente $G/\text{Fit}(G)$ ha lunghezza derivata al più 4.*

DIM. Proviamo infatti che se H è un gruppo $\mathfrak{B}_2$ coi fattori principali di rango al più 2 e $H/\text{Fit}(H)$ è supersolubile e metabeliano (tale è per i teoremi 2 e 3 il quoziente $G/\text{Fit}(G)$ se G è $\mathfrak{B}_2$ risolubile) allora $H^{(4)} = 1$.

Dato che tutte le ipotesi sono ereditate dai quozienti, procedendo per induzione si può supporre che $\text{Fit}(H)$ sia un p -gruppo per qualche primo p .

Se $p \neq 3$ allora $(\text{Fit}(H))^{(2)} = 1$ per il teorema 1, ed essendo $H/\text{Fit}(H)$ metabeliano si ha $H^{(4)} = 1$.

Se $p = 3$, poichè i fattori principali di H sono di rango al più 2, $H/\text{Fit}(H)$ si immerge nel prodotto diretto di sottogruppi di $GL(2, 3)$ e quindi, dovendo essere un 3'-gruppo, $\text{Fit}_2(H)/\text{Fit}(H)$ è un 2-gruppo;

poichè $H/\text{Fit}(H)$ è supersolubile si ha allora $H = \text{Fit}_2(H)$ e quindi, per il lemma 10, $H^{(4)} = 1$.

Siamo ora in grado di dimostrare il risultato principale.

TEOREMA 4. *Sia G un gruppo finito risolubile $\mathfrak{B}_2$, allora G ha lunghezza derivata al più 5.*

DIM. Per induzione su $|G|$. Supponiamo quindi che $\text{Fit}(G) = P$ sia un p -gruppo, per qualche primo p .

Se $p \neq 3$, sia $R = G^{(2)}$. Per il teorema 3, R è metanilpotente, inoltre per il lemma 11, $R^{(2)} = G^{(4)} \leq \text{Fit}(G)$, dunque gli eventuali 3-sottogruppi di R sono al più metabeliani. Si ha allora, per il lemma 10, $G^{(5)} = R^{(3)} = 1$.

Sia dunque $p = 3$. Sia D un 2-sottogruppo di Sylow di G e $\bar{D} = DP/P$ (ovviamente $\bar{D} \cong D$), sia inoltre $\bar{F}_2 = \text{Fit}_2(G)/P = \text{Fit}(G/P)$.

Supponiamo D non abeliano. Per il lemma 8, i $2'$ -fattori principali di G/P contenuti in $\bar{F}_2$ sono ciclici, quindi $\bar{D}'$ centralizza il $2'$ -sottogruppo di Hall $\bar{Q}$ di $\bar{F}_2$, in particolare $Z(\bar{D}) \cap \bar{D}'$ centralizza $\bar{F}_2 \leq \leq \bar{Q}\bar{D}$, ciò implica $Z(\bar{D}) \cap \bar{D}' \leq \bar{F}_2$. Sia $x \in Z(D) \cap D'$, $|x| = 2$, allora $\bar{x} = xP \in \bar{F}_2$ e quindi $\langle \bar{x} \rangle \triangleleft \triangleleft \bar{G}$, cioè $\langle x \rangle P \triangleleft \triangleleft G$.

Sia $M/P = \bar{M} = \langle \bar{x} \rangle^{\bar{g}} = \langle x \rangle^g P/P$, $\bar{M}$ è un 2-gruppo abeliano elementare per il lemma 3, dato che $|\bar{x}| = 2$; sia $M_0 = M \cap D$. Poichè $x \in Z(D) \cap D'$, per il corollario 2, x opera per coniugazione come l'inversione su $[P, \langle x \rangle] \neq 1$; pertanto $P = [P, \langle x \rangle]C_P(x)$ con $[P, \langle x \rangle] \cap \cap C_P(x) = 1$; dato che, chiaramente, $M_0 \leq \langle x \rangle^g$, il lemma 6 consente allora di concludere che M_0 opera per coniugazione come un gruppo di automorfismi potenza su $C_P(x)$.

Poichè $[P, \langle x \rangle]$ è abeliano, se tale è anche $C_P(x)$, allora P è metabeliano e quindi, per il lemma 10, $\text{Fit}_2(G)^{(3)} = 1$; per il teorema 3, si ha perciò $G^{(5)} = 1$.

Se $C_P(x)$ non è abeliano allora è centralizzato da M_0 ; in tal caso $[P, \langle x \rangle]$ è il residuo nilpotente di $M = PM_0 \triangleleft G$ e quindi $[P, \langle x \rangle] \triangleleft G$.

Si procede quindi come nella dimostrazione del lemma 10, il supporre, com'è lecito, che G possieda un solo sottogruppo normale minimo comporta allora $C_P(x)$ ciclico, mentre esso era supposto non abeliano.

Rimane il caso in cui D è abeliano.

Sia A/B un 2-fattore principale di G/P . Se A/B è ciclico allora $G = C_G(A/B)$, altrimenti, per il teorema 2, $\text{rg}(A/B) = 2$ e $G/C_G(A/B)$ si immerge in $GL(2, 2) \cong S_3$; ma i 2-sottogruppi di Sylow di G/P sono per assunzione abeliani (essendo P un $2'$ -sottogruppo, essi sono in-

fatti isomorfi a D) quindi $G/C_G(A/B)$ è un $2'$ -gruppo, pertanto esso è banale oppure ciclico di ordine 3. In ogni caso $C_G(A/B) \geq G'$; poichè ciò avviene per tutti i $2'$ -fattori principali di G/P (che, in virtù del lemma 8 e del teorema 3, sono ciclici), si ha: $G' \leq \cap C_G(V/U)$ al variare di V/U tra i fattori principali di G/P e quindi $G' \leq \text{Fit}_2(G)$. Poichè, per il lemma 10, $(\text{Fit}_2(G))^{(4)} = 1$ si ottiene, in conclusione, $G^{(5)} = 1$.

Nota. Mentre questo articolo era in fase di stampa è apparso su Arch. Math., **40** (1983), pp. 193-199, l'articolo di S. K. MAHDAVIANARY: *A special class of three-Engel groups*. In esso, in particolare, si conclude la dimostrazione che se N è un gruppo $\mathfrak{B}_2$ nilpotente allora $\gamma_4(N) = 1$. Ciò semplifica nella maniera ovvia la dimostrazione del teorema 4 e rende a tal scopo superfluo il lemma 11, così come osservato prima del suo enunciato.

BIBLIOGRAFIA

- [1] E. BEST - O. TAUSKY, *A class of groups*, Proc. Roy. Irish. Acad. Sect. A., **47** (1942), pp. 55-62.
- [2] J. D. DIXON, *The structure of linear groups*, London, 1971.
- [3] W. GASCHÜTZ, *Gruppen in denen das Normalteilersein transitiv ist*, J. Reine Ang. Math., **198** (1957), pp. 87-92.
- [4] D. GORENSTEIN, *Finite groups*, New York, 1968.
- [5] H. HEINEKEN, *A class of three-Engel groups*, J. Algebra, **17** (1971), pp. 341-345.
- [6] C. HOBBY, *Finite groups with normal normalizers*, Can. J. Math., **20** (1968), pp. 1256-1260.
- [7] B. HUPPERT, *Endliche gruppen*, Berlin, 1967.
- [8] B. HUPPERT, *Zur Sylowstruktur auflösbarer gruppen*, Arch. Math., **12** (1961), pp. 161-169.
- [9] D. J. MCCAUGHAN - S. E. STONEHEWER, *Finite soluble groups whose subnormal subgroups have defect at most two*, Arch. Math., **35** (1980), pp. 56-60.
- [10] D. J. S. ROBINSON, *Groups in which normality is a transitive relation*, Proc. Camb. Phil. Soc., **60** (1964), pp. 21-38.
- [11] D. J. S. ROBINSON, *Wreath products and indices of subnormality*, Proc. London Math. Soc., **17** (1967), pp. 157-270.
- [12] J. E. ROSEBLADE, *On groups in which every subgroup is subnormal*, J. Algebra, **2** (1965), pp. 402-412.
- [13] G. ZACHER, *Caratterizzazione dei t -gruppi finiti risolubili*, Ricerche Matematiche, **1** (1952), pp. 287-294.

Manoscritto pervenuto in redazione il 20 gennaio 1983.