

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

WALTER STREB

Unterringtheorie-exemplifiziert an Ringen mit Involution

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 70 (1983), p. 109-132

[<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1983__70__109_0>](http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1983__70__109_0)

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1983, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Unterringtheorie-exemplifiziert an Ringen mit Involution.

WALTER STREB (*)

Einleitung.

Sei R ein Ring mit Involution, S bzw. K die Menge seiner symmetrischen bzw. schiefsymmetrischen Elemente und $\bar{S}$ bzw. $\bar{K}$ der von S bzw. K erzeugte Unterring. Herstein [3; pp. 229-239], Lanski [4, 5, 6] und Lee [7] haben die Vererbung von Eigenschaften zwischen R und Unterringen von R untersucht, welche « nahe bei » $\bar{S}$ oder $\bar{K}$ « liegen ». In dieser Note werden wesentlich größere Klassen von Unterringen betrachtet, wobei in Teil I zunächst Klasseneigenschaften erarbeitet werden und in Teil II auf der Grundlage dieser Eigenschaften eine Theorie entwickelt wird, welche im Grundsatz unabhängig vom speziellen Kontext der Ringe mit Involution ist. Wir beginnen mit Definitionen und Notationen und demonstrieren dann deren Umfang an zahlreichen Beispielen und deren Tragfähigkeit durch Entwicklung einer allgemeinen Theorie.

0. Definitionen und Notationen.

Im folgenden sei R stets Ring mit Involution $*$ und Zentrum $Z = Z(R)$. Wir definieren $S = S(R) = \{a \in R \mid a^* = a\}$, $K = K(R) = \{a \in R \mid a^* = -a\}$, $Z_S = Z_S(R) = Z \cap S$ und $Z_K = Z_K(R) = Z \cap K$. Für $*$ -prime Ringe R und additive Untergruppen A von R sei $Q(R) =$

(*) Indirizzo dell'A.: Mathematisches Institut der Universität D - 4300 Essen 1, Universitätsstrasse 3.

$= \{az^{-1} | a \in R, 0 \neq z \in Z_s\}$ und $Q(A) = AZ_s(Q(R))$, falls $Z \neq 0$, und $Q(R) = R$ und $Q(A) = A$, falls $Z = 0$.

Weiterhin bezeichne $P(R)$, $N(R)$, $L(R)$ bzw. $J(R)$ das Primradikal, größte nile Ideal, größte lokalnilpotente Ideal bzw. Jacobsonradikal von R . Mit R' notieren wir stets *-prime *-Bilder von R und für $a \in R$ bzw. $A \subset R$ sei a' bzw. A' das Bild von a bzw. A in R' .

Folgende Terminologie wird verwendet: Eine Aussage gelte für viele R' genau dann, wenn es $R'_i, i \in I$, gibt, so daß $R/P(R)$ subdirektes Produkt der Ringe $R'_i, i \in I$, ist und die Aussage für alle $R'_i, i \in I$, gilt.

Mit der Menge X der Unbestimmten $x_i, x_i^*, 0 < i \in \mathbb{Z}$ bildet man die freie nichtkommutative $\mathbb{Z}$ -Algebra $\mathbb{Z}\{X\}$. Ist $f \in \mathbb{Z}\{X\}$ Identität von R , so notieren wir $f(R) = 0$. S_n bezeichne das n -te Standard-polynom.

Eine Teilmenge A von R heiße *-Untermenge von R , wenn $A^* = \{a^* | a \in A\} \subset A$. Für $A \subset R$ sei $A^\times := A \setminus \{0\}$ und ${}_R A_R$ das von A erzeugte *-Ideal von R . Im folgenden sei stets T *-Unterring von R , $I = I(T)$ das größte in T enthaltene (-) Ideal von R , $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta$ und η der Reihe nach die Aussagen $I(Q(T')) \neq 0$, $I(T') \neq 0$, $I(T')' \neq 0$, $T' \neq 0$, $T' \subset Z(R')$, $0 \neq T' \subset Z(R')$ und « T' enthält ein von null verschiedenes Ideal von $Z_s(R')$ und R' ist PI -Ring », $f \in \mathbb{Z}\{X\}$ multilinear und 1 Koeffizient von f und $F \subset \mathbb{Z}\{X\}$ endlich mit ausschließlich multilinearen Elementen, für die wenigstens ein Koeffizient gleich 1 ist. Für *-Ideale X von R definieren wir $F(X) = \prod_{f \in F} {}_R f(X)_R$, $R_F = \bigcup_{F(R') \neq 0} \ker'$ und ${}_R R = \bigcap_{F(R')=0} \ker'$. Für $\xi_i \in \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta, \eta\}$, $1 \leq i \leq m$, F und $0 <$

$< n \in \mathbb{Z}$ notieren wir: $T \in (R, \xi_1, \dots, \xi_m)$, wenn $\xi_1, \xi_2, \dots$ oder ξ_m für viele R' ; $T \in (R, \xi_1, \dots, \xi_m, F, n)$, wenn $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m$ oder $F(R') = 0$ für alle R' und $(S_{2n}(R') = 0$ für alle R' mit $F(R') = 0)$. Für $U \in \{P, N, L\}$ notieren wir: $T \in (R, U)$, wenn $U(T') = 0$ für alle R' mit $U(R') = 0$; $R \in (R, E)$ bzw. $T \in (R, J)$, wenn T' *-einfach bzw. *-primitiv für alle *-einfachen bzw. *-primitiven R' . Schließlich notieren wir: $T \in (R, i)$, wenn $T \cap X \neq 0$ für alle *-Ideale $X \neq 0$ von R ; $T \in (R, i, F)$, wenn $T \cap X \neq 0$ für alle *-Ideale X von R mit $F(X) \neq 0$; $T \in (R, f)$, wenn $f(R) \subset T$; $T \in (R, f, I)$, wenn $f(R) \subset I(T)$; $T \in (R, z)$, wenn ${}_R \{z\}_R \cap T \neq 0$ für alle $0 \neq z \in Z_s(R)$.

Bei Beschränkung der Untersuchungen auf 2-torsionsfreie Ringe R sei stets stillschweigend $\text{char } R' \neq 2$. Diese Vereinbarung beinhaltet insbesondere eine Anpassung obiger Definitionen: Man ersetzt « R' » durch « R' mit $\text{char } R' \neq 2$ » und für $f \in \mathbb{Z}\{X\}$ « 1 ist Koeffizient von f » durch « 2^* ist Koeffizient von f mit $0 \leq k \in \mathbb{Z}$ ».

Für $a, b \in R$ sei $[a, b] := ab - ba$ und $a \circ b := ab + ba$. Für additive Untergruppen A und B von R sei $[A, B]$ bzw. $A \circ B$ die von den Elementen $[a, b]$ bzw. $a \circ b$ mit $a \in A$ und $b \in B$ erzeugte Untergruppe von R und $(A, B, [,], \circ)$ eine Menge von additiven Untergruppen von R (sogenannten höheren Kommutatoren von A und B) rekursiv definiert wie folgt: $A, B \in (A, B, [,], \circ)$; mit $X, Y \in (A, B, [,], \circ)$ ist $[X, Y]$, $X \circ Y \in (A, B, [,], \circ)$. Um den Aufbau eines Elementes $C \in (A, B, [,], \circ)$ mit den Verknüpfungen $[,]$ und $\circ$ zu erfassen, notieren wir auch genauer $C = f(A, B)$. Analog definiert man weitere Mengen höherer Kommutatoren, etwa $(A, \circ)$, $(A, B, C, [,], \circ)$, ...

Für additive Untergruppen A und B von R sei weiterhin $V_A := \{a - a^* | a \in A\}$, $W_A := \{a + a^* | a \in A\}$, $C_B(A) := \{b \in B | [b, A] = 0\}$, $\bar{A}$ der von A erzeugte Unterring und 2A die von a^2 , $a \in A$ erzeugte additive Untergruppe von R . Schließlich sei $R_2 := \{r \in R | 2r = 0\}$.

1. Beispiele.

Die Beispiele werden vorbereitet durch einige Lemmata. Im folgenden sei stets F Körper. Wir definieren zunächst vier F -Algebren $F(x, y, i)$ mit $i \in \{s, t\}$, F -Basis $\{1, x, y, xy\}$ und Involution $*$ von 1. Art durch Angabe der Multiplikationsregeln für x und y und der Bilder x^* und y^* von x und y . Für $\text{char } F = 2$ sei

$$F(x, y, s) \text{ mit } x^2, y^2 \in F^\times, x \circ y = 1, x^* = x \text{ und } y^* = y;$$

$$F(x, y, t) \text{ mit } x^2, y^2 \in F^\times, x \circ y = 1, x^* = x \text{ und } y^* = y + x^{-1}.$$

Für $\text{char } F \neq 2$ sei

$$F(x, y, s) \text{ mit } x^2, y^2 \in F^\times, x \circ y = 0, x^* = -x \text{ und } y^* = -y;$$

$$F(x, y, t) \text{ mit } x^2, y^2 \in F^\times, x \circ y = 0, x^* = x \text{ und } y^* = y.$$

LEMMA 1.1. Sei R $*$ -primer PI -Ring und $Z_s T \subset T$. Dann gilt $I(T) \neq 0$ genau dann, wenn $Q(T) = Q(R)$.

BEWEIS. « $\Rightarrow$ »: $Q(R)$ ist $*$ -einfach und $0 \neq Q(I(T))$ $*$ -Ideal von $Q(R)$, also $Q(T) = Q(R)$.

« $\Leftarrow$ »: R besitzt PI -Klasse n und ein Primideal X , so daß $X \cap X^* = 0$ [8; Definition 1.4.30, p. 30 and Theorem 1.6.27, p. 47]. Sei $g = g_n$ gemäß [8; p. 26]. Es gilt $g(R)^+ \not\subset X \cup X^*$. Wähle $c \in g(R)^+ \setminus$

$\setminus (X \cup X^*)$. Dann ist $c \in Z$ regulär in R . Nach [8; Theorem 1.4.21, p. 28] ist $cR \subset + a_i Z$ mit $a_i \in R$, $1 \leq i \leq n$. Wähle $u \in Z_s$, so daß $a_i u \in T$, $1 \leq i \leq n$. Dann ist $d := uc$ regulär in R und $dR \subset TZ$. Für $Z_s = Z$ ist $TZ \subset T$. O.E. sei $Z_s \subsetneq Z$. Für $v \in Z \setminus Z_s$ und $z \in Z$ gilt $(v - v^*)z = v(z + z^*) - (vz^* + v^*z)$. Also ist $e := (v - v^*)d$ regulär in R und $eR \subset T + Tv$. Wähle $w \in Z_s$, so daß $vw \in T$. Dann ist $f := we$ regulär in R und $fR \subset T$.

Die folgenden Lemmata 1.2-1.12 verifiziert man leicht durch Nachrechnen.

LEMMA 1.2. Sei R einfacher Ring und $S_2(R) = 0$. Dann gilt: (Char $R \neq 2$, $S = R$ und $K = 0$) oder (char $R \neq 2$, $S = \bar{S}$ ist Körper und $\bar{K} = R$) oder (char $R = 2$ und $W_R = 0$ oder $0 \neq W_R = S = \bar{S}$ ist Körper).

LEMMA 1.3. Sei $R := F \times F$ mit Austauschinvolution $*$. Dann gilt: (Char $R \neq 2$, $K = \{(a, -a) | a \in F\}$, $\bar{K} = R$, $S = \{(a, a) | a \in F\}$ und $\bar{S} = S$) oder (char $R = 2$, $W_R = S = \{(a, a) | a \in F\}$ und $\bar{S} = S$).

LEMMA 1.4. Sei char $F \neq 2$ und $R = F(u, v, t)$. Dann gilt:

- (1) $K = Fuv$, $S = F + Fu + Fv$, $[K, S] = Fu + Fv$, $K \circ K = F$; $\bar{K} = F + K$, $\bar{S} = [\bar{K}, \bar{S}] = R$.
- (2) $(K, [,]) = \{K, 0\}$, $(S, \circ) = \{S\}$, $(K, S, [,]) = \{K, S, [K, S], 0\}$ $(K, S, \circ) = \{K, S, F\}$, $(K, S, [,], \circ) = \{K, S, [K, S], F, 0\}$.

LEMMA 1.5. Sei char $F \neq 2$ und $R = F(u, v, s)$. Dann gilt:

- (1) $K = Fu + Fv + Fuv$, $S = F$; $\bar{K} = R$.
- (2) $(K, [,]) = \{K\}$, $(S, \circ) = \{F\}$, $(K, S, [,]) = \{K, F, 0\}$, $(K, S, \circ) = \{K, F\}$, $(K, S, [,], \circ) = \{K, F, 0\}$.

LEMMA 1.6. Sei R einfacher Ring, $F = Z_s \subsetneq Z$, char $F \neq 2$ und $R = F(u, v, s) \otimes_F Z$. Dann gilt:

- (1) $K = Z_K + Fu + Fv + Fuv$, $S = Z_K K$, $[K, K] = Fu + Fv + Fuv$, $[K, S] = Z_K [K, K]$; $\bar{K} = \bar{S} = [\bar{K}, \bar{S}] = R$, $[\bar{K}, \bar{K}] = F + Fu + Fv + Fuv$.
- (2) $(K, [,]) = \{K, [K, K]\}$, $(S, \circ) = \{S\}$, $(K, S, [,]) = \{K, S, [K, K], [K, S]\}$, $(K, S, \circ) = \{K, S\}$, $(K, S, [,], \circ) = \{K, S, [K, K], [K, S], F, Z_K, 0\}$.

LEMMA 1.7. Sei $\text{char } F \neq 2$, $U = F(u, v, s)$ und $R = U \times U^{\circ p}$ mit Austauschinvolution $*$. Dann gilt:

(1) $K = \{(a, -a) | a \in U\}$, $S = \{(a, a) | a \in U\}$, $[K, K] = \{(a, -a) | a \in Fu + Fv + Fuv\}$, $[K, S] = \{(a, a) | a \in Fu + Fv + Fuv\}$, $[K, K] \circ [K, K] = Z_s$, $[K, K] \circ [K, S] = Z_K$; $\bar{K} = \bar{S} = [K, S] = R$, $[K, K] = \{(a, a^s) | a \in U\}$, $\bar{Z}_K = F \times F$.

(2) $(K, [,]) = \{K, [K, K]\}$, $(S, \circ) = \{S\}$, $(K, S, [,]) = \{K, S, [K, K], [K, S]\}$, $(K, S, \circ) = \{K, S\}$, $(K, S, [,], \circ) = \{K, S, [K, K], [K, S], Z_s, Z_K, 0\}$.

LEMMA 1.8. Sei $\text{char } F = 2$ und $R = F(u, v, i)$ mit $i \in \{s, t\}$. Für $i = s$ bzw. $i = t$ gilt $W_R = F$ bzw. $W_R = Fu$ und $\bar{W}_R = F + Fu$.

LEMMA 1.9. Sei R einfacher Ring, $F := Z_s \subsetneq Z$, $\text{char } F = 2$, $z \in Z \setminus F$ und $R = F(u, v, s) \otimes_F Z$. Dann gilt: $Z = F \oplus Fz$, $W_z = F$, $W_R = F + Fu + Fv + F(uv \otimes (z + z^*) + 1 \otimes z^*)$, $W_R \circ W_R = F + Fu + Fv$, $(W_R \circ W_R) \circ (W_R \circ W_R) = F$; $\bar{W}_R = R$, $\bar{W}_R \circ \bar{W}_R = F(u, v, s)$.

LEMMA 1.10. Sei $\text{char } F = 2$, $U = F(u, v, s)$ und $R = U \times U^{\circ p}$ mit Austauschinvolution $*$. Dann gilt: $W_R = \{(a, a) | a \in U\}$, $W_R \circ W_R = \{(a, a) | a \in F + Fu + Fv\}$, $(W_R \circ W_R) \circ (W_R \circ W_R) = Z_s$; $\bar{W}_R = R$, $\bar{W}_R \circ \bar{W}_R = \{(a, a^s) | a \in U\}$.

LEMMA 1.11. Sei $\text{char } F \neq 2$ und $R = F(u, v, t) \otimes_F F(x, y, s)$. Dann gilt:

(1) $K = Fuv + (F + Fu + Fv)(Fx + Fy + Fxy)$, $S = F + Fu + Fv + Fuv(Fx + Fy + Fxy)$, $[K, S] = Fu + Fv + Fuv(Fx + Fy + Fxy)$, $[K, S] \circ [K, S] = F$; $\bar{K} = \bar{S} = [K, S] = R$.

(2) $(K, [,]) = \{K\}$, $(S, \circ) = \{S\}$, $(K, S, [,]) = \{K, S, [K, S]\}$, $(K, S, \circ) = \{K, S\}$, $(K, S, [,], \circ) = \{K, S, [K, S], F, 0\}$.

LEMMA 1.12. Sei $\text{char } F = 2$ und $R = F(u, v, s) \otimes_F F(x, y, s)$. Dann gilt: $W_R = F + Fu + Fv + Fx + Fy + F(uv + xy)$, $W_R \circ W_R = F + Fu + Fv + Fx + Fy$, $(W_R \circ W_R) \circ (W_R \circ W_R) = F$; $\bar{W}_R = \bar{W}_R \circ \bar{W}_R = R$.

Mit [11; II, V, VI und Lemmata 8(1) und 9(1)] erhält man

LEMMA 1.13. Sei R $*$ -prim. Dann gilt $0 \in (V_R, W_R, [,], \circ)$ genau dann, wenn $Q(R)$ die Voraussetzungen eines der Lemmata 1.2-1.12 erfüllt.

LEMMA 1.14. Sei R $*$ -prim, $A \subset R$, $T := \bar{A}$ und $I(T) = 0$.

(1) Ist $A \in (V_R, W_R, [,], \circ)$, so gilt $S_4(R) = 0$ oder

(*) $0 \in (V_R, W_R, [,], \circ)$ und $T \subset Z$.

(2) Ist $A \in (V_R, W_R, [,],)$, so gilt $S_4(R) = 0$ oder $(\text{char } R = 2 \text{ und } (*))$.

(3) Ist $A \in (V_R, W_R, \circ)$, so gilt $[K, K] = 0$ oder $S \subset Z$ oder $(\text{char } R = 2 \text{ und } (*))$.

(4) Ist $A \in (W_R, \circ)$, so gilt $S \subset Z$ oder $(\text{char } R = 2 \text{ und } (*))$.

BEWEIS. Da $[A, A]$ Lieideal von V_R ist, gilt $0 \in (V_R, W_R, [,], \circ)$ nach [10; Corollary 2, p. 344]. Nach Lemma 1.1 sei o.E. R $*$ -einfach. Mit den Lemmata 1.2-1.13 erhält man alle Behauptungen.

LEMMA 1.15. Sei R halbprim, $A \subset R$ und $T := \bar{A}$.

(1) Ist $A \in (V_R, W_R, [,], \circ)$, R' mit $\text{char } R' \neq 2$ oder $(R_2)' \neq 0$ und $I(T)' = 0$, so gilt $0 \in (V_{R'}, W_{R'}, [,], \circ)$.

(2) Ist $A \in (V_R, W_R, [,],) \cup (V_R, W_R, \circ)$, $\text{char } R' \neq 2$ und $I(T)' = 0$, so gilt $S_4(R') = 0$.

BEW. IS. $L := [A, A]$ ist Lieideal von V_R .

(1) Gilt nach [9; Corollaries 3(2) and 7(2), pp. 483, 484].

(2) Nach [9; Corollary 3(2), p. 483] ist $2JJ_L \subset \bar{L}$, also $J' = 0$ oder $J'_L = 0$. Mit (1) und Lemma 1.13 erhält man nach einfachen Rechnungen die Behauptung.

LEMMA 1.16. Sei R halbprim, $A \subset R$, X $*$ -Ideal von R und $X \cap \circ A = 0$.

(1) Ist $A \in (V_R, W_R, [,], \circ)$, so gilt $S_8(X) = 0$ und $[[V_X, W_X] \circ \circ [V_X, W_X], X] = 0$.

(2) Ist $A \in (V_R, W_R, [,],)$ und $\text{char } R \neq 2$, so gilt $S_4(X) = 0$ und $({}_R[V_X, V_X]_R)({}_R[W_X, X]_R) = 0$.

(3) Ist $A \in (V_R, W_R, \circ)$ und $\text{char } R \neq 2$, so gilt $S_2(X) = 0$ und $V_X = 0$.

(4) Ist $A \in (V_R, [,])$ und $\text{char } R \neq 2$, so gilt $S_4(X) = 0$ und $[V_X, V_X] = 0$.

(5) Ist $A \in (W_R, \circ)$ und $\text{char } R \neq 2$, so gilt $X = 0$.

BEWEIS. Sei genauer $A = f(V_R, W_R)$. Dann gilt $f(V_X, W_X) \subset A \cap X = 0$. Weiterhin ist X halbprimer Ring. Mit den Lemmata 1.2-1.13 erhält man durch Betrachtung von X' (mit $\text{char } X' \neq 2$) die Behauptungen.

LEMMA 1.17. Sei R *-prim, $0 \neq A \in (V_R, W_R, [,], \circ)$ und $T := \bar{A}$. Dann gilt $I(T) \neq 0$ oder $(T \cap Z_S(R) \neq 0$ und R ist PI -Ring).

BEWEIS. Nach Lemma 1.14 (1) sei o.E. $0 \in (V_R, W_R, [,], \circ)$. Mit den Lemmata 1.1-1.13 erhält man die Behauptung.

Sei $M_1 := (V_R, W_R, [,], \circ)$, $M_2 := (V_R, W_R, [,])$, $M_3 := (V_R, W_R, \circ)$, $M_4 := (V_R, [,])$ und $M_5 := (W_R, \circ)$. Für $1 \leq i \leq 5$ notieren wir: $T \in T_i(R)$, wenn es $A \in M_i$ gibt, so daß $A \subset T$. Sei

$$\begin{aligned} \tilde{T}_1(R) &:= \{T = \bar{A} | A \in M_1\}, & \tilde{T}_3(R) &:= \{T | K \supset A \subset T \subset \bar{K}, A \in M_3\}, \\ \tilde{T}_4(R) &:= \{T | A \subset T \subset \bar{K}, A \in M_4\}, & \tilde{T}_5(R) &:= \{T | A \subset T \subset \bar{S}, A \in M_5\}. \end{aligned}$$

Sei weiterhin $f_1 := [[x_1 - x_1^*, x_2 + x_2^*] \circ [x_3 - x_3^*, x_4 + x_4^*], x_5]$, $f_2 := [x_1 - x_1^*, x_2 - x_2^*]$, $f_3 := [x_1 + x_1^*, x_2]$, $f_4 := x_1 - x_1^*$, $f_5 := x_1$.

Mit den Lemmata 1.13-1.16 erhält man

BEISPIEL 1.18. Sei R halbprim.

(1) $T_1(R) \in (R, \beta, \{f_1\}) \cap (R, i, \{f_1\})$.

(2) Ist R 2-torsionsfrei, so gilt:

$$\begin{aligned} T_1(R) &\subset (R, \gamma, \{f_1\}) \cap (R, i, \{f_1\}); \\ T_2(R) &\subset (R, \gamma, 2) \cap (R, \gamma, \eta, \{f_2, f_3\}) \cap (R, i, \{f_2, f_3\}); \\ T_3(R) &\subset (R, \gamma, 2) \cap (R, \beta, \{f_2, f_3\}) \cap (R, \gamma, \eta, \{f_4\}) \cap (R, i, \{f_4\}); \\ T_4(R) &\subset (R, \gamma, 2) \cap (R, \gamma, \eta, \{f_2\}) \cap (R, i, \{f_2\}); \\ T_5(R) &\subset (R, \gamma, 2) \cap (R, \beta, \{f_3\}) \cap (R, \gamma, \eta, \{f_5\}) \cap (R, i, \{f_5\}). \end{aligned}$$

BEISPIEL 1.19. Sei R $*$ -einfach, $F := Z_s$ und $T \in \tilde{T}_1(R)$. Dann gibt es $u, v, w \in K$ mit $u^2, v^2, w^2 \in Z_s^\times$ und $u \circ v = 0$, falls $\text{char } R \neq 2$, bzw. $u \circ v = 1$, falls $\text{char } R = 2$, so daß $T \in \{0, F, Z, R\}$ oder $(T = \bar{K} = F[w] \text{ und } C_R(T) = T)$ oder $(T = [\bar{K}, \bar{K}] = F \oplus Fu \oplus Fv \oplus Fuv \text{ und } TZ = R)$. Insbesondere ist T und $C_R(T)$ $*$ -einfach.

BEWEIS. O.E. sei $T \notin \{0, F, Z, R\}$. Nach Lemma 1.14 (1) ist $S_4(R) = 0$. Mit den Lemmata 1.2-1.13 erhält man die Behauptung.

Ähnlich verifiziert man die folgenden Beispiele 1.20-1.22.

BEISPIEL 1.20. Sei R $*$ -einfach, $\text{char } R \neq 2$ und $T \in \tilde{T}_3(R)$. Dann gibt es $w \in K$ mit $w^2 \in Z_s^\times$, so daß $T \in \{0, R\}$ oder $(T = \bar{K} = Z_s[w] \text{ und } ({}_R T) = T)$. Insbesondere ist T und $C_R(T)$ $*$ -einfach.

BEISPIEL 1.21. Sei R $*$ -einfach, $\text{char } R \neq 2$ und $T \in \tilde{T}_5(R)$. Dann gilt $T \in \{Z_s = S, R\}$. Insbesondere ist T und $C_R(T)$ $*$ -einfach.

BEISPIEL 1.22. Sei R $*$ -einfach, $\text{char } R \neq 2$, $F := Z_s$ und $T \in \tilde{T}_4(R)$. Dann gibt es $u, v, w \in K$ mit $u^2, v^2, w^2 \in F^\times$ und $u \circ v = 0$, so daß $T \subset Z = R$ oder $T = R$ oder $(T \subset \bar{K} = F[w] \text{ und } C_R(T) \in \{T, R\})$ oder $(T = F \oplus Fu \oplus Fv \oplus Fuv \text{ und } TZ = R)$. Insbesondere ist T und $C_R(T)$ $*$ -prim.

BEISPIEL 1.23. (1) Sei der Reihe nach $0 \in M_i, i = 1, \dots, 5$. Dann gibt es $0 < k \in \mathbb{Z}$, so daß $S_8^k(R) = 0 = f_1^k(R)$ bzw. $2^k S_4^k(R) = 0$ bzw. $2^k S_4^k(R) = 0 = 2^k f_4^k(R)$ bzw. $2^k S_4^k(R) = 0 = 2^k f_2^k(R)$ bzw. $2^k f_5^k(R) = 0$.

(2) Sei $A \in (V_R, W_R, [,], \circ)$ und $T := \bar{A}$. Dann gibt es $0 < k \in \mathbb{Z}$, so daß $2S_8^k(R) \subset I(T)$. Insbesondere ist $T \in (R, 2S_8^k, I)$.

(3) Sei $A \in (V_R, W_R, [,]) \cup (V_R, W_R, \circ)$ und $T := \bar{A}$. Dann gibt es $0 < k \in \mathbb{Z}$, so daß $2^{k+1} S_4^k(R) \subset I(T)$. Insbesondere ist $T \in (R, 2^{k+1} S_4^k, I)$.

BEWEIS. (1) Gilt nach Lemma 1.16 und [8; Proposition 1.6.38, p. 49].

(2) Sei $L = [A, A]$ und $X = \{r \in R \mid 2r \in I(T)\}$. Nach [9; Corollary 3 (2), p. 483] ist $JJ_L \subset X$, also $0 \in (V_{R/X}, W_{R/X}, [,], \circ)$. Mit (1) erhält man die Behauptung.

(3) Erhält man ähnlich wie (2) mit den Lemmata 1.13 und 1.11.

Im folgenden seien M, L, N und A additive Untergruppen von K oder S mit $M \in (V_R, W_R, [,], \circ)$, $[L, M] \subset L$ oder $L \circ M \subset L$, $N \in (L, [,])$.

$], \circ), [A, N] \subset A$ oder $A \circ N \subset A$ und $T := \bar{A}$. Wir notieren $A \in A_6(R)$, wenn $M \in (V_R, [,])$, $A \subset L \subset K$, $[L, M] \subset L$ und $[A, L] \subset A$ gilt, und $A \in A_7(R)$, wenn $M \in (W_R, \circ)$, $A \subset L \subset S$, $L \circ M \subset L$ und $A \circ L \subset A$ gilt.

Mit den Lemmata 1.2-1.7 verifiziert man unmittelbar

LEMMA 1.24. Sei R *-einfach, $F := Z_S$, $\text{char } R \neq 2$, $S_4(R) = 0$, $FA \subset A$ und $FL \subset L$. Dann gilt: $[K, K] = 0$, $S \subset Z$, $M \subset Z$, $N \subset Z$ oder $A \in (K, S, [,], \circ)$; $A_6(R) = \{K, [K, K], Z_K, 0\}$; $A_7(R) = \{S, 0\}$.

LEMMA 1.25. Sei $\text{char } F \neq 2$, $R = F(u, v, t) \otimes_F F(x, y, s)$, $FA \subset A$ und $FL \subset L$. Dann gilt: $M \not\subset Z$, $N \not\subset Z$ oder $A \in (K, S, [,], \circ)$; $A_6(R) = \{K, 0\}$; $A_7(R) = \{S, 0\}$.

BEWEIS. Für alle $a, b, c \in R$ gilt

$$(*) \quad [a, [b, c]] = (a \circ b) \circ c - (a \circ c) \circ b = [[a, b], c] - [[a, c], b].$$

O.E. sei $M \subset Z$ und $N \subset Z$. Nach (*), Lemma 1.11 und [10; Corollary 2, p. 344 and Theorem 9, p. 348] ist $[L, K] \subset L$, also $L \in (K, S, [,], \circ)$, somit $A \in (K, S, [,], \circ)$. Die übrigen Behauptungen erhält man unmittelbar mit Lemma 1.11.

Leichte Rechnungen erbringen

LEMMA 1.26. Sei $\text{char } F \neq 2$, $R = F(u, v, s) \otimes_F F(x, y, s)$, $FA \subset A$, $FL \subset L$, $L_1 := Fu + Fv + Fuv$ und $L_2 := Fx + Fy + Fxy$. Dann gilt:

$$(1) \quad K = L_1 + L_2, \quad S = F + L_1 L_2, \quad [K, S] = L_1 L_2; \quad \bar{K} = \bar{S} = [\bar{K}, \bar{S}] = R.$$

$$(2) \quad (K, [,]) = \{K\}, (S, \circ) = \{S\}, (K, S, [,]) = \{K, S, [K, S]\}, (K, S, \circ) = \{K, S\}, (K, S, [,], \circ) = \{K, S, [K, S]\}.$$

$$(3) \quad L \in \{L_1, L_2, F, 0\} \text{ oder } A \in (K, S, [,], \circ) \cup \{L_1, L_2, F, 0\}; \quad A_6(R) = \{K, L_1, L_2, 0\}; \quad A_7(R) = \{S, 0\}.$$

Eine Inspektion des Beweises von [11; Hauptsatz] erbringt

LEMMA 1.27. Sei R halbprim.

(1) Sei R' mit $\text{char } R' \neq 2$ oder $(R_2)' \neq 0$. Dann gilt: $I(T)' \neq 0$, $A' \subset Z(R')$, $L' \subset Z(R')$, $S_4(R') = 0$, ($\text{char } R' = 2$ und $S_8(R') = 0$) oder ($\text{char } R' \neq 2$ und $Q(R') \in \{R_r, R_s, R_i\}$, wobei $R_r = M_3(F)$ mit $\text{char } F = 3$ und Transposition * und $R_i = F(u, v, s) \otimes_F F(x, y, i)$ für $i \in \{s, t\}$).

(2) Sei $A \subset L$ oder $L \in (V_R, W_R, [,], \circ)$. Dann gilt $T \in (R, \beta, \varepsilon, 4)$.

(3) Sei $\text{char } R \neq 2$ und $A \subset L$ oder $L \in (V_R, W_R, [,], \circ)$. Dann gilt $T \in (R, \gamma, \varepsilon, 4)$.

LEMMA 1.28. Sei R *-einfach, $F := Z_S$, $\text{char } F \neq 2$, $FA \subset A$ und $FL \subset L$.

(1) Sei $\dim_F M > 1$ und $\dim_F N > 3$. Dann gibt es $u, v \in K$ mit $u^2, v^2 \in F^\times$ und $u \circ v = 0$, so daß $T \in \{R, F + Fu + Fv + Fuv, F, 0\}$. Insbesondere ist T und $C_R(T)$ *-einfach und $Z(T) \subset Z(R)$.

(2) Sei $A \in A_6(R)$. Dann gibt es $u, v, w \in K$ mit $u^2, v^2, w^2 \in F^\times$ und $u \circ v = 0$, so daß $T \in \{R, \bar{K} = F + Fw, F + Fu + Fv + Fuv, 0\}$. Insbesondere ist T und $C_R(T)$ *-einfach und $[Z(T), K(R)] = 0$.

(3) Sei $A \in A_7(R)$. Dann gilt $T \in \{R, F, 0\}$. Insbesondere ist T und $C_R(T)$ *-einfach und $Z(T) \subset Z(R)$.

BEWEIS. O.E. sei $T \neq R$ und $T \notin Z$. Nach Lemma 1.27 (1) ist $S_4(R) = 0$ oder $R \in \{R_r, R_s, R_t\}$. Mit den Lemmata 1.24-1.26 und Beispiel 1.19 erhält man die Behauptungen.

LEMMA 1.29. Sei $U \in \{P, N, L\}$ und $U(T) = T$. Dann gilt:

(1) $T^4_R[L, R]_R \subset U(R)$.

Sei nun R 2-torsionsfrei, $M \in (V_R, W_R, [,], \circ) \cup (V_R, W_R, \circ)$ und $N = L$. Dann gilt:

(2) $T^3_R[L, R]_R + [T, T]_R[L, L]_R \subset U(R)$.

(3) Für $L \subset K$ ist $[T, T]_R[L, R]_R \subset U(R)$.

(4) Ist R 3-torsionsfrei oder $L \cup A \subset K$ oder ($M \subset S$ und $A \subset K$) oder $M \cup L \subset S$, so gilt $T^2_R[L, R]_R \subset U(R)$.

(5) Für ($M \in (V_R, [,], \circ)$ und $A \subset L \subset K$) oder ($M \in (W_R, \circ)$ und $A \subset L \subset S$) gilt $T \subset U(R)$.

(6) Ist (R 3-torsionsfrei, $L \subset S$ und $A \subset K$) oder ($M \in (W_R, \circ)$ und $L \cup A \subset S$) oder ($M \cup L \subset S$ und $A \subset K$), so gilt $T_R[L, R]_R \subset U(R)$.

(7) Ist (R 3-torsionsfrei und $A \subset K$) oder (R 3-torsionsfrei und $L \subset K$) oder ($M \subset S$ und $A \subset K$) oder $L \cup A \subset K$, so ist $T_R[L \circ L, R]_R \subset U(R)$.

(8) Ist $L \circ M \subset L$ bzw. $A \subset L$, so kann man in (1-4, 6) ${}_R[L, R]_R$ durch ${}_R L_R[M, R]$ ersetzen bzw. in (1-4, 6) ${}_R[L, R]_R$ und ${}_R[L, L]_R$ ersatzlos streichen und in (7) $T_R[L \circ L, R]_R$ durch T^2 ersetzen.

BEWEIS. (1-7) O.E. sei $U(R) = 0$, also $I(T) = 0$. Betrachte R' mit $\text{char } R' \neq 2$ oder $(R_s)' \neq 0$. Mit $A' \subset Z(R')$ ist $A' = 0$. O.E. sei $A' \not\subset Z(R')$ und $L' \not\subset Z(R')$.

(1) Nach Lemma 1.27 (1) ist $S_8(R') = 0$, also $(T^4)' = 0$ [8; Proposition 1.3.30, p. 20].

(2-7) Nach Übergang zu $Q(R')$ sei o.E. R *-einfach, $S_4(R) = 0$ oder $R \in \{R_r, R_s, R_t\}$ gemäß Lemma 1.27 (1), $F := Z_s(R)$, $FL \subset L$ und $FA \subset A$. Nach den Lemmata 1.11 und 1.25 ist $R \neq R_t$. Betrachte zunächst R_s : Nach Lemma 1.26 und (*) aus dem Beweis von Lemma 1.25 ist $M \not\subset Z(R)$, $L \in \{L_1, L_2\}$ und $[A, L] \subset A$. O.E. sei $L = L_1$. Dann gibt es einen F -Untermodul B von L_2 , so daß $A \in \{B, L_1 B\}$. Betrachte nun R mit $S_4(R) = 0$: Nach den Lemmata 1.6, 1.7 und 1.24 ist $[V_R, V_R] = 0$ oder $W_R \subset Z(R)$. Betrachte schließlich R_r : Es ist $M \in \{V_R, W_R, [V_R, W_R]\}$ und $L \subset S$ mit $[L, L] = 0$ oder $A \subset S$ mit $[A, A] = 0$. Die einzelnen Behauptungen verifiziert man jetzt leicht mit den Lemmata 1.4, 1.5 und 1.26.

Ähnlich verifiziert man

LEMMA 1.30. (1) Es gilt $S_8(J(T))_R[L, R]_R \subset J(R)$. Sei nun φ Körper, R φ -Algebra und T φ -Unteralgebra von R .

(2) Sei X bzw. Y das größte φ -algebraische (*) Ideal von R bzw. T . Dann gilt: $S_8(Y)_R[L, R]_R \subset X$.

(3) Sei X bzw. Y das größte φ -lokalendliche (*) Ideal von R bzw. T . Dann gilt: $S_8(Y)_R[L, R]_R \subset X$.

2. Allgemeine Theorie.

Man verifiziert unmittelbar

LEMMA 2.1. Sei R *-prim.

(1) Mit $Q(T)$ ist auch T *-prim bzw. prim.

(2) Sei $TZ_s \subset T$. Mit T ist auch $Q(T)$ *-prim bzw. prim.

(3) Sei $T \subset Z$. Dann ist T *-prim und $N(T) = 0$.

(4) Sei $Z_s \cap T \neq 0$. Ist 1 Einselement von T , so ist 1 Einselement von R .

(5) Ist 1 Einselement von T , so ist 1 Einselement von $Q(T)$.

LEMMA 2.2. Sei R *-prim und $I = I(T) \neq 0$. Dann gilt:

(1) T ist *-prim. Mit R ist auch T prim, *-primitiv bzw. primitiv und umgekehrt.

(2) Für $U \in \{N, L, J\}$ gilt $U(R) = 0$ genau dann, wenn $U(T) = 0$.

(3) Ist 1 Einselement von T , so ist 1 Einselement von R .

(4) Ist R *-einfach, so gilt $T = R$. Ist T *-einfach bzw. einfach, so ist T kleinstes *-Ideal bzw. Ideal von R . Ist T *-einfach mit 1, so ist $T = R$.

(5) $C_R(T) = Z(R)$.

(6) Sei $f \in \mathbb{Z}\{X\}$. Dann gilt $f(T) = 0$ genau dann, wenn $f(R) = 0$.

BEWEIS. Zu (1) beachte man [7; Lemma 14 and 24, pp. 136, 139]. (2-5) sind trivial. (6) zeigt man mit [3; Lemma 1.1.5 and Corollary, pp. 6 and 40].

LEMMA 2.3. Sei $f \in \mathbb{Z}\{X\}$.

(1) Sei $P(R) = 0$. Ist $f(P(T')) = 0$ für viele R' , so ist $f(P(T)) = 0$.

(2) Sei $N(R) = 0$. Dann gibt es viele R' mit folgender Eigenschaft: Es gibt ein nichtnilpotentes Element r' von R' , so daß jedes von null verschiedene *-Ideal von R' eine Potenz von r' enthält.

Ist $f(N(T')) = 0$ für viele derartige R' , so ist $f(N(T)) = 0$.

(3) Sei $J(R) = 0$. Ist $f(J(T')) = 0$ für viele *-primitive R' , so ist $f(J(T)) = 0$.

BEWEIS. Man beachte $U(T)' \subset U(T')$ für alle $U \in \{P, N, J\}$ und [2; Lemma 2.2.3, Proof, p. 53].

LEMMA 2.4. (1) Für $U \in \{P, N, L\}$ und $T \in (R, U)$ gilt $U(T) = U(R) \cap T$.

(2) Für $T \in (R, J)$ gilt $J(T) \subset J(R) \cap T$.

(3) Für $T \in (R, \alpha, \varepsilon)$ gilt $P(T) = P(R) \cap T$.

(4) Sei $P(R) = 0$ und $T \in (R, \alpha, \zeta) \cup (R, \alpha, \eta)$. Ist 1 Einselement von T , so ist 1 Einselement von R .

(5) Sei $P(R) = 0$. Für $T \in (R, \alpha)$ ist $C_R(T) \subset Z(R)$.

(6) Sei $P(R) = 0$, $T \in (R, \alpha)$ und $f \in \mathbb{Z}\{X\}$. Mit $f(T) = 0$ ist auch $f(R) = 0$.

(7) Sei $P(R) = 0$ und $T \in (R, \gamma, \varepsilon)$. Ist $T(*-)$ einfach, so ist T minimales $(*-)$ Ideal von R oder $T \subset Z(R)$.

(8) Sei $P(R) = 0$ und $T \in (R, \gamma, \zeta)$. Ist T $*$ -einfach mit Einselement 1, so ist $T = R$ oder $T \subset Z(R)$.

(9) Sei $P(R) = 0$ und $T \in (R, \gamma)$. Ist T $(*-)$ einfach, so ist T minimales $(*-)$ Ideal von R .

(10) Sei $P(R) = 0$ und $T \in (R, \gamma)$. Ist T $*$ -einfach mit 1, so ist $T = R$.

(11) Sei $T \in (R, \gamma, \varepsilon)$ und $U \in \{N, L\}$. Ist $U(R) = P(R)$, so gilt $U(T) \subset P(R)$.

(12) Sei $T \in (R, \gamma)$ und $U \in \{N, L, J\}$. Dann gilt $U(T) \subset P(R)$ genau dann, wenn $U(R) = P(R)$.

(13) Sei $T \in (R, \gamma, \varepsilon)$. Mit R ist T $*$ -prim.

(14) Sei $P(R) = 0$ und $T \in (R, \gamma)$. Mit T ist R $*$ -prim.

BEWEIS. (1, 2) sind trivial. Mit den folgenden Aussagen über die gemäß Voraussetzung gegebenen «vielen R' » erhält man unmittelbar die Behauptungen.

(3) Nach den Lemmata 2.1 (1-3) und 2.2 (1) ist T' $*$ -prim.

(4) Nach den Lemmata 2.1 (4, 5) und 2.2 (3) ist 1' Einselement von R' .

(5) Es ist $[C_R(T)', I(Q(T'))] \subset [C_{R'}(T'), Q(T')] = 0$, also $[C_R(T), R']' = 0$.

(6) Es gilt $f(R') = 0$ nach den Lemmata 2.1 (2) und 2.2 (6).

(7) Ist $T' \subset Z(R')$ für viele R' , so gilt $T \subset Z(R)$. Anderenfalls gibt es R' mit $I(T)' \neq 0$. Dann ist $0 \neq I(T) = T$ minimales $(*-)$ Ideal von R .

Man erhält (8) mit (4, 7) und (9, 10) ähnlich wie (7, 8).

(11) Für $T' \subset Z(R')$ ist $U(T)' \subset U(T') = 0$. Sei $I(T)' \neq 0$. Es gilt $I(T)U(R) \subset U(T)$ und $I(T)U(T)I(T) \subset U(R)$. Also ist $U(T)' = 0$ genau dann, wenn $U(R)' = 0$.

(12) Erhält man ähnlich wie (11).

(13) Ist $T' \subset Z(R')$ für viele R' , so ist $T \subset Z(R)$, also T *-prim nach Lemma 2.1 (3). Anderenfalls gibt es R' mit $I(T)' \neq 0$. Dann ist $I(T) \neq 0$, also T *-prim nach Lemma 2.2 (1).

(14) Seien X und Y *-Ideale von R mit $XY = 0$. Dann ist $I(T)XI(T)I(T)YI(T) = 0$, also $I(T)XI(T) = 0$ oder $I(T)YI(T) = 0$, O.E. sei $I(T)XI(T) = 0$. Dann gilt $I(T)'X'I(T)' = 0$, also $X' = 0$.

LEMMA 2.5. (1) Für $T \in (R, \alpha, \varepsilon, F, n)$ gilt $P(T)^n \subset P(R)$, $F({}_R P(T)_R) \subset P(R)$ und $S_{2n}({}_R P(T)_R) \subset P(R)$.

(2) Für $T \in (R, \alpha, \varepsilon, F, n) \cap (R, \beta, \varepsilon, m)$ gilt

$$N(T)^n \subset N(R), \quad F({}_R N(T)_R) \subset N(R) \quad \text{und} \quad S_{2n}({}_R N(T)_R) \subset N(R).$$

(3) Für $T \in (R, \alpha, \varepsilon, F, n) \cap (R, \gamma, \varepsilon, m)$ gilt

$$L(T)^n \subset L(R), \quad F({}_R L(T)_R) \subset L(R) \quad \text{und} \quad S_{2n}({}_R L(T)_R) \subset L(R).$$

(4) Für $T \in (R, \beta, F, n)$ gilt $F({}_R J(T)_R) \subset J(R)$ und $S_{2n}({}_R J(T)_R) \subset J(R)$.

(5) Sei $T \in (R, \gamma, n)$, $U \in \{N, L\}$ und $U(T) \subset P(R)$. Dann gilt $U(R) = P(R)$.

(6) Sei $T \in (R, \gamma, F, n)$ und $J(T) \subset P(R)$. Dann gilt $F(J(R)) \subset P(R)$ und $S_{2n}(J(R)) \subset P(R)$.

(7) Sei $P(R) = 0$ und $T \in (R, \alpha, n)$. Dann gilt $S_{2n}(C_R(T)) = 0$ und $N(C_R(T))^n = 0$.

(8) Sei $P(R) = 0$, $T \in (R, \alpha, n)$ und $S_{2k}(T) = 0$. Dann ist

$$S_{\max(2k, 2n)}(R) = 0.$$

(9) Sei $T \in (R, \alpha, \zeta, F, n) \cup (R, \alpha, \eta, F, n)$ und $P(T) = T$. Dann gilt $F(R) \subset P(R)$ und $S_{2n}(R) \subset P(R)$.

(10) Sei $T \in ((R, \alpha, \zeta, F, n) \cap (R, \beta, \zeta, m)) \cup ((R, \alpha, \eta, F, n) \cap (R, \beta, \eta, m))$ und $N(T) = T$. Dann gilt $F(R) \subset N(R)$ und $S_{2n}(R) \subset N(R)$.

(11) Sei $T \in ((R, \alpha, \zeta, F, n) \cap (R, \gamma, \zeta, m)) \cup ((R, \alpha, \eta, F, n) \cap (R, \gamma, \eta, m))$ und $L(T) = T$. Dann gilt $F(R) \subset L(R)$ und $S_{2n}(R) \subset L(R)$.

(12) Sei $T \in (R, \beta, F, n)$ und $J(T) = T$. Dann gilt $F(R) \subset J(R)$ und $S_{2n}(R) \subset J(R)$.

(13) Sei φ Körper, R φ -Algebra, X größtes φ -algebraisches bzw. φ -lokalendliches $(*)$ -Ideal von R und $T \in (R, \gamma, F, n)$ φ -algebraische bzw. φ -lokalendliche φ -Unteralgebra von R . Dann gilt $F(R) \subset X$ und $S_{2n}(R) \subset X$.

BEWEIS. (1) Sei zunächst $F(R') \neq 0$. Nach den Lemmata 2.1 (1-3) und 2.2 (1) ist T' $*$ -prim, also $P(T)' \subset P(T') = 0$. Sei nun $F(R') = 0$. Dann ist $S_{2n}({}_R P(T')'_R) = 0$ und $(P(T'))^n = 0$ nach

(*) [8; Proposition 1.3.30, p. 20].

(2) Betrachte R' gemäß Lemma 2.3 (2). Für $I(T') \neq 0$ oder $T' \subset Z(R')$ ist $N(T)' \subset N(T') = 0$ nach den Lemmata 2.2 (2) und 2.1 (3). Sei nun $S_{2m}(R') = 0$ und $I(Q(T')) \neq 0$. Nach den Lemmata 2.1 (1, 2) und 2.2 (1) ist T' $*$ -prim, also $N(T)' \subset N(T') = 0$ nach [8; Theorem 1.6.27, p. 47]. Mit $F(R') = 0$ ist $S_{2n}({}_R N(T')'_R) = 0$ und $(N(T'))^n = 0$ nach (*).

(3) Betrachte R' mit $L(R)' = 0$. Für $I(T)' \neq 0$ ist

$$I(T)'L(T)'I(T)' \subset L(R)' = 0,$$

also $L(T)' = 0$. Für $T' \subset Z(R')$ ist $L(T)' \subset L(T') = 0$ nach Lemma 2.1 (3). Für $S_{2m}(R') = 0$ verfolgt man den Beweis von (2).

(4) Sei R' $*$ -primitiv. Für $I(T') \neq 0$ ist $J(T)' \subset J(T') = 0$ nach Lemma 2.2 (1). Mit $F(R') = 0$ ist $S_{2n}({}_R J(T')'_R) = 0$.

(5) Es ist $I(T)U(R) \subset U(T) \subset P(R)$, also $I(T)'U(R)' = 0$, somit $U(R)' = 0$ oder $S_{2n}(R') = 0$, demnach $(U(R'))^n = 0$ nach (*), schließlich $U(R)' = 0$.

(6) Erhält man ähnlich wie (5).

(7) Es ist $[C_R(T)', I(Q(T'))] \subset [C_{R'}(T'), Q(T')] = 0$, also $C_R(T)' \subset Z(R')$, insbesondere $N(C_R(T))' = 0$ nach Lemma 2.1 (3), oder $S_{2n}(R') = 0$, somit $S_{2n}(C_R(T)') = 0$ und $(N(C_R(T)))'^n = 0$ nach (*).

(8) Für $I(Q(T')) \neq 0$ ist $S_{2k}(R') = 0$ nach den Lemmata 2.1 (2) und 2.2 (6). Anderenfalls ist $S_{2n}(R') = 0$.

(9) Zunächst ist $Z(R') \cap T' = 0$. Für $I(Q(T')) \neq 0$ wäre T' *-prim nach den Lemmata 2.1 (1, 2) und 2.2 (1), also $T' = 0$, Widerspruch. Mit $F(R') = 0$ ist auch $S_{2n}(R') = 0$.

(10) Sei R' gemäß Lemma 2.3 (2). Zunächst ist $Z(R') \cap T' = 0$. Für $I(T') \neq 0$ wäre $T' = N(T') = 0$ nach Lemma 2.2 (2), Widerspruch. Somit ist $S_{2m}(R') = 0$. Für $I(Q(T')) \neq 0$ wäre T' *-prim nach den Lemmata 2.1 (1, 2) und 2.2 (1), also $T' = N(T') = 0$ nach [8; Theorem 1.6.27, p. 47], Widerspruch. Mit $F(R') = 0$ ist $S_{2n}(R') = 0$.

(11) Sei R' mit $L(R)' = 0$. Zunächst ist $Z(R') \cap T' = 0$. Für $I(T)' \neq 0$ wäre $I(T)'T'I(T)' \subset L(R)' = 0$, also $T' = 0$, Widerspruch. Somit ist $S_{2m}(R') = 0$ und man verfolgt den Beweis von (10).

(12) Sei R' *-primitiv. Für $I(T') \neq 0$ wäre $T' = J(T') = 0$ nach Lemma 2.2 (2), Widerspruch. Mit $F(R') = 0$ ist $S_{2n}(R') = 0$.

(13) Betrachte R' mit $X' = 0$. Für $I(T)' \neq 0$ wäre $I(T)'T'I(T)' \subset X' = 0$, also $T' = 0$, Widerspruch. Mit $F(R') = 0$ ist $S_{2n}(R') = 0$.

LEMMA 2.6. Sei R halbprim und $F \subset \mathbb{Z}\{X\}$. Dann gilt:

- (1) $F(R_F) = 0$.
- (2) Ist X *-Ideal von R mit $F(X) = 0$, so gilt $X \subset R_F$.
- (3) $(R/R_F)_F = 0$.
- (4) Ist R *-prim, so gilt $R_F \in \{0, R\}$.
- (5) Sei $R^\vee := R/R_F$, $\xi_i \in \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta, \eta\}$, $1 \leq i \leq m$, und $T \in (R, \xi_1, \dots, \xi_m, F)$. Dann gilt $T^\vee \in (R, \xi_1, \dots, \xi_m)$.
- (6) Ist $T \in (\alpha, F)$ halbprim, so gilt $T_F = T \cap R_F$, also $T^\vee = T/T_F$:

BEWEIS. (1) gilt wegen $_FR \cap R_F = 0$ und $F(R) \subset _FR$.

(2) Sei R' mit $X' \neq 0$. Nach Lemma 1.2 (6) ist $F(R') = 0$. Also ist $X \subset R_F$.

(3, 4, 5) sind trivial.

(6) Sei R' mit $F(R') \neq 0$. Einerseits ist $I(Q(T'))(T_F)'I(Q(T')) \subset Q((T_F)')$. Andererseits ist nach (1) $F(T_F) = 0$, also $F(Q((T_F)')) = 0$. Nach den Lemmata 1.1 (1, 2) und 1.2 (6) ist $I(Q(T'))(T_F)'I(Q(T')) = 0$, also $(T_F)' = 0$. Insgesamt gilt $T_F \subset T \cap R_F$. Nach (1) ist $F(T \cap R_F) \subset F(R_F) = 0$, also nach (2) $T \cap R_F \subset T_F$.

LEMMA 2.7. Sei R halbprim.

(1) Sei $T \in (R, i)$. Mit T ist R *-prim.

(2) Sei $T \in (R, i)$. Besitzt T ein kleinstes *-Ideal $X \neq 0$, so ist ${}_R X_R$ kleinstes *-Ideal von R .

(3) Sei $T \in (R, i)$. Ist T *-einfach und 1 Einselement von T und R , so ist R *-einfach.

(4) Sei $T \in (R, f)$. Dann ist $T \in (R, i, \{f\})$.

(5) Sei $T \in (R, i, \{f\})$ und $R' = R/R_{(f)}$. Dann ist $T' \in (R', i)$.

(6) Sei $T \in (R, i, f) \cap (R, z)$. Dann ist $T \in (R, i)$.

BEWEIS. (1, 2, 3) sind trivial. (4) gilt wegen $f(X) \subset T \cap X$.

(5) gilt nach Lemma 2.6 (2, 3).

(6) Sei $0 \neq X$ *-Ideal von R mit $f(X) = 0$. Nach [3; Lemmas 1.1.5 und 5.1.5, pp. 6, 195, and Corollary, p. 40] ist $Z_S(R) \cap X \neq 0$. Wähle $0 \neq z \in Z_S(R) \cap X$. Dann ist $0 \neq {}_R \{z\}_R \cap T \subset X \cap T$.

LEMMA 2.8. (1) $(R, \beta, \varepsilon, F, n) \cap (R, P) \subset (R, N)$.

(2) $(R, \beta, F, n) \cap (R, E) \subset (R, J)$.

(3) Sei R *-prim und $T \in (R, \beta, \eta, F, n)$. Ist T *-einfach, so ist T kleinstes *-Ideal von R , R *-einfach oder $F(R) = 0$. Ist T *-primitiv, so ist R *-primitiv oder $F(R) = 0$.

(4) Sei R *-prim. Dann gilt $(R, f) \cap (R, \beta, \eta, F, n) \subset (R, i, F)$.

BEWEIS. (1) Für $I(T') \neq 0$ oder $T' \subset Z(R')$ ist $N(T') = 0$ nach den Lemmata 2.1 (3) und 2.2 (2). Für $S_{2n}(R') = 0$ ist $N(T') = 0$ nach [8; Theorem 1.6.27, p. 47].

(2) Sei R' *-primitiv. Für $I(T') \neq 0$ ist T' *-primitiv nach Lemma 2.2 (1). Für $S_{2n}(R') = 0$ ist R' *-einfach, also T' *-einfach, somit T' *-primitiv.

(3) Sei zunächst T *-einfach. Ist $I(T) \neq 0$, so ist T kleinstes *-Ideal von R . O.E. sei $I(T) = 0$ und $F(R) \neq 0$. Dann gibt es $0 \neq z \in Z_s(R)$, so daß $zZ_s(R) \subset T$, und ist R PI -Ring. Demnach ist $Z_s(T)$ Körper und das Einselement 1 von T auch Einselement von R . Wegen $Z_s(R) = zZ_s(R) \subset Z_s(T)$ ist $Z_s(R)$ Körper, also R *-einfach nach [3; Corollary, p. 40].

Sei nun T *-primitiv. Ist $I(T) \neq 0$, so ist R *-primitiv nach Lemma 2.2 (1). Nun verfolgt man den Beweis von (3).

(4) Sei $0 \neq X$ *-Ideal von R . Mit $I(T) \neq 0$ ist $0 \neq XI(T) \subset X \cap T$. O.E. sei $I(T) = 0$ und $F(R) \neq 0$. Dann gibt es $0 \neq z \in Z_s(R)$, so daß $zZ_s(R) \subset T$. Angenommen es gilt $X \cap T = 0$. Dann ist $f(X) \subset X \cap T = 0$, also $Z_s(R) \cap X \neq 0$ nach [3; Lemmas 1.1.5 and 5.1.5, pp. 6, 195 and Corollary, p. 40], somit $0 \neq z(Z_s(R) \cap X) \subset T \cap X$, Widerspruch.

Für $A \subset R$ sei $\text{ann}_R A := \{r \in R \mid Ar = 0\}$. Wir sagen, R erfüllt max-ann-*, max-ann bzw. max- $\oplus$, wenn R die Maximalbedingung für $\text{ann-}^*(R) := \{\text{ann}_R X \mid 0 \neq X \text{ *-Ideal von } R\}$, $\text{ann}(R) := \{\text{ann}_R A \mid 0 \neq A \subset R\}$ erfüllt bzw. keine unendliche direkte Summe von null verschiedener Rechtsideale besitzt. Sei $\text{reg}(R)$ die Menge der regulären Elemente von R , $\sigma(R) := \{r \in R \mid \text{ann}_R \{r\} \text{ ist wesentliches Rechtsideal von } R\}$ und $Q_{\text{cl}}(R)$ der klassische Quotientenring von R , falls R (halb-) Goldiering.

LEMMA 2.9. Sei R halbprim und X *-Ideal von R . Dann gilt:

- (1) $X \oplus \text{ann}_R X =: Y$ und $\text{ann}_R Y = 0$.
- (2) X ist halbprim Ring.
- (3) Mit R erfüllt X max-ann bzw. max-ann-*.
- (4) R erfüllt max- $\oplus \Leftrightarrow X$ und $\text{ann}_R X$ erfüllen max- $\oplus$.
- (5) $\sigma(R)$ ist Ideal von R , $\sigma(R) \cap X \subset \sigma(X)$. Insbesondere gilt: Mit $\sigma(X) = 0 = \sigma(\text{ann}_R X)$ ist $\sigma(R) = 0$.
- (6) R ist Goldiering $\Leftrightarrow X$ und $\text{ann}_R X$ sind Goldieringe.
- (7) Sei $X \in \text{ann-}^*(R)$. Mit R erfüllt auch R/X max-ann, max-ann-* bzw. max- $\oplus$.

Sei nun zusätzlich R mit max-ann-*. Dann gilt:

(8) R erfüllt die Minimalbedingung für $\text{ann}^*(R)$ und besitzt keine unendliche direkte Summe von null verschiedener $*$ -Ideale.

(9) $\text{ann}^*(R)$ besitzt nur endlich viele maximale Elemente P_i , $1 \leq i \leq m$, und es gilt: $\bigcap_{1 \leq i \leq m} P_i = 0$ und R/P_i $*$ -prim, $1 \leq i \leq m$.

(10) Sei R nicht $*$ -prim. Die minimalen Elemente von $\text{ann}^*(R)$ sind $*$ -prime Ringe und es gibt endlich viele minimale Elemente B_i , $1 \leq i \leq n$, von $\text{ann}^*(R)$, so daß $\bigoplus_{1 \leq i \leq n} B_i =: B$ und $\text{ann}_R B = 0$.

(11) Sei R PI -Ring. Dann ist R Goldiering.

BEWEIS. (1, 2, 4, 5, 8) sind trivial. Zu (3) beachte man, daß für alle $*$ -Ideale Y von X gilt: $\text{ann}_X Y = \text{ann}_R XYX \cap X$. (6) erhält man mit (3, 4, 5). (7, 9, 10) erhält man mit ähnlichen Argumenten wie [1; Lemmas 4.6, 4.7, 4.8, 4.9, 4.10, 4.17, pp. 73, 74, 83].

(11) Seien B_i , $1 \leq i \leq n$, wie in (10). Dann ist B_i $*$ -primer PI -Ring, also Goldiering, $1 \leq i \leq n$. Nach (6) ist R Goldiering.

SATZ 2.10. Sei R halbprim mit max-ann^* und $T \in (R, f, I)$. Mit T ist R Goldiering.

BEWEIS. Nach Lemma 2.9 (6) ist $I(T)$ Goldiering. Weiterhin ist $f(\text{ann}_R I(T)) = 0$, also $\text{ann}_R I(T)$ PI -Ring [3; Lemma 5.1.5, p. 195]. Nach Lemma 2.9 (2, 3, 11) ist $\text{ann}_R I(T)$ Goldiering. Nach Lemma 2.9 (6) ist R Goldiering.

SATZ 2.11. Sei R halbprim, $T \in (R, f, I)$ und T halbprim mit max-ann^* . Mit R ist T Goldiering.

BEWEIS. Nach Lemma 2.9 (6) ist $I(T)$ Goldiering. Weiterhin ist $f(\text{ann}_T I(T)) = 0$, also $\text{ann}_T I(T)$ PI -Ring [3; Lemma 5.1.5, p. 195]. Nach Lemma 2.9 (2, 3, 11) ist $\text{ann}_T I(T)$ halbprim mit max-ann^* , also Goldiering. Nach Lemma 2.9 (6) ist T Goldiering.

LEMMA 2.12. Sei R halbprim, P_i $*$ -prime Ideale von R mit $\bigcap_{1 \leq i \leq m} P_i = 0$ und $P_i \not\subseteq P_j$ für $1 \leq i \neq j \leq m$. Mit R/P_i , $1 \leq i \leq m$, ist R Goldiering und $Q_{\text{cl}}(R) = \bigcap_{1 \leq i \leq m} Q_{\text{cl}}(R_i)$.

BEWEIS. Man argumentiert ähnlich wie in [1; Theorem 4.7, Proof, p. 75].

SATZ 2.13. Sei R halbprim und $T \in (R, \gamma)$. Dann gilt:

- (1) R ist Goldiering $\Leftrightarrow I(T)$ ist Goldiering $\Leftrightarrow T$ ist Goldiering $\Rightarrow$
 (2) $Q_{cl}(R) = Q_{cl}(I(T)) = Q_{cl}(T)$.

BEWEIS. (1) erhält man wegen $\text{ann}_R I(T) = 0$ mit Lemma 2.9 (6).
 (1) $\Rightarrow$ (2): Sei $a \in \text{reg}(I(T))$ bzw. $\text{reg}(T)$ und $r \in R$, so daß $ar = 0$.
 Dann ist $arI(T) = 0$, also $rI(T) = 0$, somit $r = 0$. Entsprechend
 schließt man für $ra = 0$. Somit ist $\text{reg}(I(T)) \subset \text{reg}(T) \subset \text{reg}(R)$, also
 $Q_{cl}(I(T)) \subset Q_{cl}(T) \subset Q_{cl}(R)$. Sei $r \in R, s \in \text{reg}(R)$ und $c \in \text{reg}(I(T))$.
 Dann ist $rs^{-1} = r(sc)^{-1} \in Q_{cl}(I(T))$, also $Q_{cl}(R) \subset Q_{cl}(I(T))$.

SATZ 2.14. Sei R halbprim, $T \in (R, \beta, F)$ und $R_F = 0$. Dann gilt:
 Mit R ist T Goldiering und $Q_{cl}(R) = Q_{cl}(T) \times W$ mit halbeinfachem
 Artinring W .

BEWEIS. Seien $P_i, 1 \leq i \leq m$, die maximalen Elemente von $\text{ann}^*(R)$
 gemäß Lemma 2.9 (9), $M := \{R/P_i | 1 \leq i \leq m\}$, nach evt. Umnummerie-
 rung $\bigcap_{1 \leq i \leq k} (T \cap P_i) = 0$ und $T \cap P_i \not\subset T \cap P_j, 1 \leq i \neq j \leq k$, und $N =$
 $= \{R/P_i | 1 \leq i \leq k\}$. Wegen $\text{ann}_R P_i \neq 0$ ist $F(\text{ann}_R P_i) \neq 0$ nach Lem-
 ma 2.6 (2), $1 \leq i \leq m$, also $F(R') \neq 0$, somit $I(T') \neq 0$ für $R' \in M$. Nach
 den Lemmata 2.2 (1), 2.9 (7) und 2.12 und Satz 2.13 ist $Q_{cl}(R) =$
 $= \bigtimes_{R' \in M} Q_{cl}(R') = \bigtimes_{R' \in M} Q_{cl}(T') = Q_{cl}(T) \times \left(\bigtimes_{R' \in M \setminus N} Q_{cl}(T') \right)$.

SATZ 2.15. Sei R halbprim, $T \in (R, \beta, \varepsilon, F)$ und $R_F = 0$. Dann
 gilt: Mit R ist T Goldiering. Weiterhin gibt es halbeinfache Artin-
 ringe $W_i, 1 \leq i \leq 3$, so daß $Q_{cl}(R) = W_1 \times W_2, Q_{cl}(T) = W_1 \times W_3$ und
 $S_2(W_3) = 0$.

BEWEIS. Verfolgt man den Beweis von Satz 2.14, so erhält man
 $I(T') \neq 0$ oder $T' \subset Z(R')$ für alle $R' \in M$. Sei $N_1 := \{R' \in N | I(T') \neq 0\}$.
 Man wählt $W_1 = \bigtimes_{R' \in N_1} Q_{cl}(R'), W_2 = \bigtimes_{R' \in M \setminus N_1} Q_{cl}(R')$ und $W_3 = \bigtimes_{R' \in N \setminus N_1} Q_{cl}(T')$.

SATZ 2.16. Sei R halbprim und $T \in (R, f, I) \cap (R, P)$. Dann gilt:
 Mit R ist T Goldiering.

BEWEIS. Verfolgt man den Beweis von Satz 2.14, so erhält man
 mit Satz 2.11, daß T' Goldiering ist für alle $R' \in N$. Nach Lemma 2.12
 ist T Goldiering.

SATZ 2.17. Sei R Goldiering und $T \in (R, \gamma)$. Dann gibt es $c \in$
 $\text{reg}(R)$, so daß $cR \subset T$.

BEWEIS. Wegen $\text{ann}_R I(T) = 0$ gibt es $c \in I(T) \cap \text{reg}(R)$ nach [2; Lemma 7.2.5, p. 175]. Also ist $cR \subset T$.

SATZ 2.18. Sei R Goldiering, $T \in (R, \beta, F)$ und $R_F = 0$. Dann gibt es $c \in \text{reg}(R)$, so daß cR in einem endlicherzeugten T -Unterm modul von R enthalten ist.

BEWEIS. Man verfolgt zunächst den Beweis von Satz 2.14 und hat insbesondere kanonisch $R \subset \bigcap_{1 \leq i \leq m} R/P_i$. Sei $R' := R/P_1$. Nach Lemma 2.9 (7) und [3; Lemma 7.2.5, p. 175] gibt es $a_1 \in \text{ann}_R P_1$, so daß $a_1 = a'_1 \in (\text{ann}_R P_1)' \cap I(T)' \cap \text{reg}(R')$. Dann gilt $a_1 R = a'_1 R' \subset T'$, also $a_1^2 R = a'_1 a'_1 R' \subset a'_1 T' = a_1 T$. Entsprechend wählt man a_i , $1 \leq i \leq m$, und setzt $c := \sum_{1 \leq i \leq m} a_i^2$.

Verfolgt man den Beweis von Lemma 1.1, so erhält man

LEMMA 2.19. Sei R *-primer PI -Ring. Dann gibt es $c \in Z(R) \cap \text{reg}(R)$, so daß cR in einem endlicherzeugten $Z_S(R)$ -Unterm modul von R enthalten ist.

SATZ 2.20. Sei R Goldiering, $T \in (R, \beta, n)$ und $Z_S(R) \subset T$. Dann gibt es $c \in \text{reg}(R)$, so daß cR in einem endlicherzeugten T -Unterm modul von R enthalten ist.

BEWEIS. Man verfolgt zunächst den Beweis von Satz 2.18. Ist $I(T') \neq 0$, so erhält man wie dort $a_1 \in \text{ann}_R P_1 \cap \text{reg}(R')$, so daß $a_1^2 R \subset a_1 T$. Wir setzen $c_1 := a_1^2$.

Sei nun R' PI -Ring. Nach [3; Corollary, p. 40] gibt es $a_1 \in \text{ann}_R P_1$, so daß $0 \neq a_1 = a'_1 \in Z_S(R') \cap (\text{ann}_R P_1)'$. Wegen $[a_1, R] \cup [a'_1 Z_S(R'), R] \subset P_1 \cap \text{ann}_R P_1 = 0$ ist $a_1 \in Z_S(R)$ und $a'_1 Z_S(R') \subset Z_S(R) \subset T$. Nach Lemma 2.19 gibt es $b, r_j \in R$, $1 \leq j \leq k$, so daß $b' \in Z(R') \cap \text{reg}(R')$ und $b'R' \subset \sum_{1 \leq j \leq k} r'_j Z_S(R')$. Dann gilt $a_1^2 bR = a'_1 a'_1 b'R' \subset \sum_{1 \leq j \leq k} a'_1 r'_j a'_1 Z_S(R') \subset \sum_{1 \leq j \leq k} a_1 r_j T$. Wir setzen $c_1 = a_1^2 b$. Entsprechend erhält man c_i , $1 < i \leq m$, und setzt schließlich $c := \sum_{1 \leq i \leq m} c_i$.

SATZ 2.21. Sei R Goldiering, $T \in (R, \beta, \eta, F, n)$ und $R_F = 0$. Dann ist der rechtsseitige T -Modul R_T isomorph zu einem Unterm modul eines endlicherzeugten T -Moduls.

BEWEIS. Mit den Notationen des Beweises von Satz 2.14 ist $R_T \subset \bigoplus_{1 \leq i \leq m} R/P_i)_T = \bigoplus_{1 \leq i \leq m} (R/P_i)_T$ und $(R/P_i)_F = 0$, $1 \leq i \leq m$. O.E. sei deshalb

R *-prim. Ist $I(T) \neq 0$, so erhält man mit Satz 2.17 die Behauptung. Anderenfalls ist R PI -Ring und gibt es $0 \neq b \in Z_s(R)$, so daß $bZ_s(R) \subset T$. Nach Lemma 2.19 gibt es $a \in Z(R) \cap \text{reg}(R)$, so daß aR in einem endlicherzeugten $Z_s(R)$ -Untermodule von R enthalten ist. Also ist abR in einem endlicherzeugten T -Untermodule von R enthalten.

SATZ 2.22. Sei φ Körper, R φ -Algebra und X das größte φ -algebraische bzw. φ -lokalendliche (*) Ideal von R . Weiterhin erfülle R/X max-ann-*. Sei $T \in (R, \beta, \eta, F, n)$ φ -algebraische bzw. φ -lokalendliche φ -Unteralgebra von R . Dann gilt $F(R) \subset X$ und $S_{2n}(R) \subset X$.

BEWEIS. O.E. sei $X = 0$. Sei $P_i, 1 \leq i \leq m$, gemäß Lemma 2.9 (9) und $R' := R/P_1$. Wegen $I(T') \text{ ann}_R P_1 \subset X = 0$ ist $I(T') = 0$, also R' PI -Ring. Angenommen es gilt $F(R') \neq 0$. Dann gibt es $0 \neq z \in Z_s(R')$, so daß $Y := zZ_s(R') \subset T'$ φ -algebraisch ist. Nun ist Y Körper, folglich $Y = Z_s(R')$, und R' Y -algebraisch, also R' φ -algebraisch, somit R' φ -lokalendlich nach [2; Theorem 6.4.3, pp. 167], demnach $R' \text{ ann}_R P_1 \subset X = 0$, schließlich $R' = 0$, Widerspruch.

SATZ 2.23. Sei $T \in (R, \beta, \eta, F, n)$ und erfülle $R/L(R)$ max-ann-*. Dann gilt $F(R) \subset L(R)$.

BEWEIS. O.E. sei $L(R) = 0$. Folgt man dem Beweis von Satz 2.22, so ist zunächst $I(T') = 0$ und R' PI -Ring. Angenommen, es gilt $F(R') \neq 0$. Dann ist z nilpotent, also $z = 0$, Widerspruch.

3. Ergänzungen.

Mit den Notationen vor Beispiel 1.18 und Lemma 1.24 gilt

LEMMA 3.1. Sei R halbprim und 2-torsionsfrei.

- (1) Für $i \in \{1, 3, 5\}$ ist $\tilde{T}_i(R) \subset (R, P) \cap (R, J) \cap (R, E)$.
- (2) $\tilde{T}_4(R) \subset (R, P)$.
- (3) Sei R *-prim, $i \in \{1, 3, 4, 5\}$ und $T \in \tilde{T}_i(R)$. Dann ist $C_R(T)$ *-prim.

BEWEIS. (1) Sei $T \in \tilde{T}_i(R)$. Mit R' ist T' *-einfach nach den Beispielen 1.19-1.21. Für $I(T') \neq 0$ ist mit R' auch T' *-prim bzw. *-primitiv nach Lemma 2.2 (1). O.E. sei $I(T') = 0$, also R' PI -Ring

nach Lemma 1.15. Mit Lemma 2.1 (1, 2) erhält man die restlichen Behauptungen. (2, 3) erhält man ähnlich wie (1).

LEMMA 3.2. Sei R halbprim und 2-torsionsfrei.

- (1) Für $i \in \{1, 3, 4, 5\}$ und $T \in \tilde{T}_i(R)$ ist $[Z(T), K] = 0$.
- (2) Für $T \in \tilde{T}_5(R)$ ist $Z(T) \subset Z(R)$.

BEWEIS. Wegen $Z(T)' \subset Z(T')$ und $K(R)' \subset K(R')$ sei o.E. R *-prim. Für $I(T) \neq 0$ gilt $Z(T) \subset Z(R)$. O.E. sei $I(T) = 0$, also R PI-Ring nach Lemma 1.15. O.E. sei nun R *-einfach. Mit den Beispielen 1.19-1.22 erhält man die Behauptungen.

LEMMA 3.3. Sei R halbprim und 2-torsionsfrei, $i \in \{6, 7\}$, $A_i \in A_i(R)$ und $T_i := \bar{A}_i$. Dann gilt:

- (1) $T_i(R) \subset (R, P)$.
- (2) Mit R ist $C_R(T)$ *-prim.
- (3) $[Z(T_i), K(R)] = 0$ und $Z(T_i) \subset Z(R)$.

BEWEIS. (1) Ist $I(T') \neq 0$ oder $A' \subset Z(R')$, so ist T' *-prim nach den Lemmata 2.1 (3) und 2.2 (1). Anderenfalls ist $Q(R')$ *-einfach nach Lemma 1.27 (1). Mit Lemma 1.28 (2, 3) erhält man die Behauptung. (2, 3) erhält man ähnlich wie (1).

LITERATUR

- [1] I. N. HERSTEIN, *Topics in Ring Theory*, Univ. of Chicago Press, Chicago, Illinois, 1972.
- [2] I. N. HERSTEIN, *Noncommutative Rings*, Carus Monograph 15 (Math. Assoc. Amer.), Wiley, New York, 1973.
- [3] I. N. HERSTEIN, *Rings with Involution*, Univ. of Chicago Press, Chicago, Illinois, 1976.
- [4] C. LANSKI, *On the relationship of a ring and the subring generated by its symmetric elements*, Pacific J. Math., **44** (1973), pp. 581-592.
- [5] C. LANSKI, *Chain conditions in rings with involution*, J. London Math. Soc., **9** (1974), pp. 93-102.
- [6] C. LANSKI, *Chain conditions in rings with involution II*, J. London Math. Soc., **18** (1978), pp. 421-428.

- [7] P. H. LEE, *On subrings of rings with involution*, Pacific J. Math., **60** (1975), pp. 131-147.
- [8] L. H. ROWEN, *Polynomial Identities in Ring Theory*, Academic Press, New York, 1980.
- [9] W. STREB, *Lie structure in semiprime rings with involution*, J. Algebra, **70** (1981), pp. 480-492.
- [10] W. STREB, *Invariant subgroups in rings with involution*, J. Algebra, **72** (1981), pp. 342-358.
- [11] W. STREB, *Invariante Untergruppen in Ringen mit Involution II*, J. Algebra, im Druck.

Manoscritto pervenuto in redazione l'11 maggio 1982.