

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

ANNA MARIA BRESQUAR

**Approssimabilità degli zeri di una funzione
mediante gli zeri di una sua espressione asintotica.
Applicazione alle soluzioni delle equazioni
differenziali lineari del secondo ordine**

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 69 (1983), p. 77-98

http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1983__69__77_0

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1983, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

**Approssimabilità degli zeri di una funzione
mediante gli zeri di una sua espressione asintotica.
Applicazione alle soluzioni
delle equazioni differenziali lineari del secondo ordine.**

ANNA MARIA BRESQUAR (*)

SUMMARY - Given in $[a, +\infty)$ an oscillatory function $z(x)$ and an asymptotic representation $f(x)$ of $z(x)$, a problem of approximating the sequence of zeros of $z(x)$ by the sequence of zeros of $f(x)$ is solved. The obtained result is applied to a class of ordinary linear differential equations of second order, whose asymptotic solutions, already known, are in advance improved.

1. Introduzione.

Si consideri l'equazione

$$(1.1) \quad (p(t)y'(t))' + q(t)y(t) = 0 \quad \left(' = \frac{d}{dt} \right)$$

dove $p(t)$ e $q(t)$ sono positive e localmente assolutamente continue in $[a, +\infty)$ e si supponga che

$$\int_a^{+\infty} \sqrt{\frac{q(t)}{p(t)}} dt = +\infty.$$

(*) Indirizzo dell'A.: Istituto di Matematica Applicata, Università di Padova.

Si esegua il cambio di variabile

$$x = \varphi(t) = \int_a^t \sqrt{\frac{q(\tau)}{p(\tau)}} d\tau$$

che muta la semiretta $[a, +\infty)$ nella semiretta $[0, +\infty)$; detta ψ la funzione inversa di φ si ponga

$$Y(x) = y(\psi(x))$$

allora l'equazione (1.1) diviene

$$(1.1') \quad \frac{d^2 Y}{dx^2} - 2\omega(x) \frac{dY}{dx} + Y = 0$$

dove si è posto

$$(1.2) \quad \omega(x) = -\frac{1}{4} \frac{d}{dx} \{ \log [p(\psi(x))q(\psi(x))] \} \quad \text{q.o. in } [0, +\infty).$$

Nelle ipotesi dette ⁽¹⁾ $\omega \in L_{loc}([0, +\infty))$ di modo che, supposto

$$(1.3) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \omega(x) = \omega_\infty, \quad |\omega_\infty| < 1,$$

l'equazione (1.1') risulta oscillante sulla semiretta $[0, +\infty)$ e sono applicabili i risultati ottenuti in [1]. Di conseguenza detti x_m gli zeri di una sua soluzione non triviale $Y(x)$ e ξ_m quelli di $Y'(x)$, dove

$$(1.4) \quad x_m < \xi_m < x_{m+1} \quad m = 1, 2, \dots$$

si ha

$$(1.5) \quad \lim_{m \rightarrow +\infty} (x_{m+1} - x_m) = \frac{\pi}{\sqrt{1 - \omega_\infty^2}}$$

$$(1.6) \quad \lim_{m \rightarrow +\infty} (\xi_m - x_m) = \frac{1}{\sqrt{1 - \omega_\infty^2}} \arccos(-\omega_\infty).$$

⁽¹⁾ Infatti $\log \{p(\psi(x))q(\psi(x))\}$ risulta localmente assolutamente continua in $[0, +\infty)$; si veda ad esempio I. P. NATANSON, *Theory of functions of a real variable*, New York, Ungar (1955), Cap. IX, par. 1, th. 2, 3, pp. 245, 246.

D'altra parte se, ferme restando le altre ipotesi, si suppone $\omega(x)$ a variazione limitata in $[0, +\infty)$, è stato dimostrato in [3] che la (1.1') ammette le soluzioni $Y_1(x)$, $Y_2(x)$ con questi comportamenti asintotici ⁽²⁾

$$(1.7) \quad \begin{cases} [(pq)^{\frac{1}{2}} \circ \psi] Y_1(x) = \sin \beta(x) + \varepsilon_1(x) \\ [(pq)^{\frac{1}{2}} \circ \psi] Y_2(x) = \cos \beta(x) + \varepsilon_2(x) \end{cases} \quad (x \rightarrow +\infty)$$

dove, per α abbastanza grande,

$$(1.8) \quad \beta(x) = \int_{\alpha}^x \sqrt{1 - \omega^2(\tau)} d\tau, \quad |\omega(x)| < 1, \quad x \in [\alpha, +\infty)$$

$$(1.9) \quad |\varepsilon_i(x)| \leq \lambda_0(x), \quad \lambda_0(x) = \frac{2J(x)}{1 - 2\sqrt{2}J(x) + \sqrt{1 - 4\sqrt{2}J(x)}}$$

$$(1.10) \quad J(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - \omega_{\infty}^2}} \int_x^{+\infty} \left| \frac{d\omega}{d\tau} \right| \frac{1}{\sqrt{1 - \omega^2(\tau)}} d\tau$$

di modo che

$$(1.11) \quad \varepsilon_i(x) = o(1) \quad (x \rightarrow +\infty) \quad i = 1, 2.$$

Inoltre, indicato con S il sottoinsieme di $[\alpha, +\infty)$ in cui $\beta'(x) = \sqrt{1 - \omega^2(x)}$, è stato dimostrato in [3] che per le funzioni dY_1/dx ,

⁽²⁾ Trattandosi di funzioni oscillanti l'asintoticità è intesa in norma (secondo la proposta del paragrafo 3 di [4]). In particolare la norma qui usata è quella definita dalla formula (22) di [4]: diciamo che la funzione $v(x)$, limitata in $[b, +\infty)$, è una rappresentazione asintotica di $u(x)$ per $x \rightarrow +\infty$ se

$$u(x) = v(x) + r(x), \quad r(x) = o \left[\sup_{\xi \geq x} |v(\xi)| \right] \quad (x \rightarrow +\infty).$$

Tale definizione si può ovviamente estendere considerando in luogo della semiretta $[b, +\infty)$ un insieme S tale che $\sup S = +\infty$. Nella (1.7) le funzioni $\sin \beta(x)$, $\cos \beta(x)$ costituiscono anche le parti principali generalizzate delle funzioni $\{(pq)^{\frac{1}{2}} \circ \psi\} Y_1$, $\{(pq)^{\frac{1}{2}} \circ \psi\} Y_2$ nel senso di Dieudonné. Basta supporre che lo spazio vettoriale denominato C dall'Autore sia generato dalle funzioni $\exp[\pm i\{\beta(x) - \gamma\}]$. Si veda J. Dieudonné [2].

dY_2/dx valgono in S i seguenti comportamenti asintotici

$$(1.12) \quad \begin{cases} [(pq)^{\frac{1}{2}} \circ \psi] \frac{dY_1}{dx} = \cos \{\beta(x) - \arcsin \omega(x)\} + \eta_1(x) \\ [(pq)^{\frac{1}{2}} \circ \psi] \frac{dY_2}{dx} = -\sin \{\beta(x) - \arcsin \omega(x)\} + \eta_2(x) \end{cases} \quad \begin{pmatrix} x \in S \\ x \rightarrow +\infty \end{pmatrix}$$

dove per $x \in S$ si ha

$$(1.13) \quad \eta_i(x) = \omega(x)\varepsilon_i(x) + \frac{d\varepsilon_i}{dx} \quad (i = 1, 2),$$

$$(1.14) \quad |\eta_i(x)| \leq \lambda_0(x)$$

e quindi

$$(1.15) \quad \eta_i(x) = o(1) \quad (x \rightarrow +\infty, x \in S).$$

Nelle stesse ipotesi la rappresentazione asintotica (1.12) può essere migliorata: in questo lavoro (paragrafo 2) viene dimostrato che si può scrivere più semplicemente

$$(1.12') \quad \begin{cases} [(pq)^{\frac{1}{2}} \circ \psi] \frac{dY_1}{dx} = \cos \{\beta(x) - \arcsin \omega_\infty\} + \eta_1^*(x) \\ [(pq)^{\frac{1}{2}} \circ \psi] \frac{dY_2}{dx} = -\sin \{\beta(x) - \arcsin \omega_\infty\} + \eta_2^*(x) \end{cases}$$

e che valgono ancora le limitazioni

$$(1.9') \quad |\eta_i^*(x)| \leq \lambda_0(x) \quad (i = 1, 2),$$

di modo che

$$\eta_i^*(x) = o(1) \quad (x \rightarrow +\infty).$$

Le (1.12') non sono soltanto più semplici delle (1.12): le parti principali generalizzate delle funzioni considerate sono, come i primi membri, assolutamente continue sulla semiretta $[\alpha, +\infty)$ ed il risultato relativo alle dY_i/dx ($i = 1, 2$) è decisamente più simmetrico con quello ottenuto per le $Y_i(x)$. Successivamente, nel paragrafo 2, per ogni solu-

zione non triviale della (1.1') si ottengono le formule asintotiche

$$(1.16) \quad \begin{cases} [(pq)^{\frac{1}{2}} \circ \psi] Y(x) = K \{ \sin(\beta(x) + \gamma) + \varepsilon(x) \} \\ [(pq)^{\frac{1}{2}} \circ \psi] \frac{dY}{dx} = K \{ \cos(\beta(x) + \gamma - \arcsin \omega_{\infty}) + \eta(x) \} \end{cases}$$

con le limitazioni

$$(1.17) \quad |\varepsilon(x)| \leq \lambda_0(x), \quad |\eta(x)| \leq \lambda_0(x),$$

nelle quali appare la stessa $\lambda_0(x)$ definita dalle (1.9), (1.10). Detti x_n^* , ξ_n^* gli zeri delle parti principali generalizzate che compaiono nella (1.16), dove sia

$$(1.18) \quad x_n^* < \xi_n^* < x_{n+1}^*$$

si vede subito che

$$(1.19) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} (x_{n+1}^* - x_n^*) = \frac{\pi}{\sqrt{1 - \omega_{\infty}^2}}$$

$$(1.20) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} (\xi_n^* - x_n^*) = \frac{\arcsin(\omega_{\infty})}{\sqrt{1 - \omega_{\infty}^2}}.$$

Interessa qui osservare la coincidenza delle (1.19), (1.20) con le formule (1.5), (1.6). Ciò fa supporre che gli zeri delle parti principali possano approssimare, per $n \rightarrow +\infty$, gli zeri delle funzioni da esse asintoticamente rappresentate, e quindi gli zeri di $Y(x)$, dY/dx per $m \rightarrow +\infty$ associando in modo opportuno gli indici m , n : per esempio facendo coincidere gli indici m ed n da un certo punto in poi.

In generale, posto

$$(1.21) \quad z(x) = f(x) + r(x)$$

nel senso sopra adottato, per cui riesca

$$(1.22) \quad r(x) = o\left\{\sup_{\xi \geq x} |f(\xi)|\right\} \quad (x \rightarrow +\infty),$$

e supposto che $f(x)$ sia una funzione regolarmente oscillante per $x \rightarrow +\infty$, si dà nel paragrafo 3 una condizione sufficiente perchè

gli zeri di $f(x)$ tendano agli zeri di $z(x)$ per $x \rightarrow +\infty$ (Teorema 2). Le ipotesi del teorema 2 sono discusse nel paragrafo 5 mediante opportuni controesempi ^(2').

Nel paragrafo 4, supposta inoltre $\omega \in C^0([0, +\infty))$, si applica il teorema 2 alle formule asintotiche comprese nella (1.16) e si dimostra che si ha effettivamente

$$(1.23) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} (x_n - x_n^*) = 0, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} (\xi_n - \xi_n^*) = 0.$$

Il processo di simmetrizzazione usato nel paragrafo 2 rivela qui la sua importanza; esso infatti permette di applicare il teorema 2 tanto alla rappresentazione asintotica di $Y(x)$ quanto a quella di dY/dx .

A prima vista, il problema posto dalle (1.23) si potrebbe ricollegare alle ricerche di J. Vosmanský [8], [9]; adottando la sua metodologia si giungerebbe sostanzialmente ad un confronto tra le equazioni differenziali

$$\frac{d^2 z}{dx^2} + \left(1 - \omega^2 + \frac{d\omega}{dx}\right) z = 0,$$

$$\frac{d^2 Z}{dx^2} + \left\{1 - \omega^2 - \frac{1}{4} \cdot \frac{\omega^2 (d\omega/dx)^2}{(1 - \omega^2)^2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{d}{dx} \left[\frac{\omega (d\omega/dx)}{1 - \omega^2} \right]\right\} Z = 0,$$

le cui soluzioni rispettive sono

$$z(x) = (pq \circ \psi)^{\frac{1}{2}} \cdot Y(x),$$

$$Z(x) = K(1 - \omega^2)^{\frac{1}{2}} \sin \{\beta(x) + \gamma\}.$$

In questo spirito, anche la sola prima formula delle (1.23) richiederebbe pesanti ipotesi sulle derivate successive della funzione $\omega(x)$.

2. L'equazione differenziale verificata da $\{(pq)^{\frac{1}{2}} \circ \psi\}(dY/dx)$; sue conseguenze.

LEMMA 1. Sia ω , data dalla (1.2), a variazione limitata in $[0, +\infty)$, dove $pq \circ \psi$ è una funzione positiva e localmente assolutamente con-

^(2') In condizioni del tutto diverse, il problema di approssimare gli zeri di una funzione $z(x)$ mediante gli zeri di una sua rappresentazione asintotica $f(x)$ è stato trattato da F. G. Tricomi in [6] e [7].

tinua, e valga la formula (1.3); allora per ogni soluzione non triviale di (1.1') vale la formula asintotica

$$(2.1) \quad \{(pq)^{\frac{1}{2}} \circ \psi\} Y(x) = K \{\sin(\beta(x) + \gamma) + \varepsilon(x)\},$$

$$(x \rightarrow +\infty), (K > 0, \gamma < 0),$$

dove

$$(2.2) \quad |\varepsilon(x)| \leq \lambda_0(x)$$

con $\lambda_0(x)$ data da (1.9), (1.10).

DIMOSTRAZIONE. La formula (2.1) è una immediata conseguenza di (1.7). Tutto si riduce a mostrare la validità di (2.2). A questo scopo basta osservare che l'accrescimento dell'ascissa α nella definizione (1.8) di $\beta(x)$ non influisce sulla validità dei risultati compendati ⁽³⁾ nelle (1.7), (1.9), (1.10). Scelto $\alpha' > \alpha$ in modo che sia

$$\gamma = \int_{\alpha'}^{\alpha} \sqrt{1 - \omega^2(x)} dx,$$

si può quindi sostituire l'integrale (1.8) con l'integrale

$$\int_{\alpha'}^x \sqrt{1 - \omega^2(\tau)} d\tau = \beta(x) + \gamma.$$

Ne segue la (2.2).

TEOREMA 1. Nelle ipotesi del lemma 1 l'espressione asintotica (1.12) delle derivate delle soluzioni $Y_i(x)$ rappresentate da (1.7) può essere sostituita vantaggiosamente dalla (1.12') e valgono le (1.9').

DIMOSTRAZIONE. Sia $Y(x)$ una soluzione dell'equazione (1.1'); allora la funzione

$$(2.3) \quad U(x) = \{(pq)^{\frac{1}{2}} \circ \psi\} \frac{dY}{dx} = C \exp \left\{ -2 \int_{\alpha}^x \omega(\xi) d\xi \right\} \frac{dY}{dx},$$

⁽³⁾ Ovviamente con tale spostamento dell'ascissa α le (1.7) non fornirebbero più le rappresentazioni asintotiche delle due soluzioni $Y_1(x)$, $Y_2(x)$ ma di altre soluzioni di (1.1').

dove $C = \{p(\psi(\alpha))q(\psi(\alpha))\}^{\frac{1}{2}}$, soddisfa all'equazione simmetrica

$$(2.4) \quad \frac{d^2 U}{dx^2} + 2\omega \frac{dU}{dx} + U = 0.$$

Si ha infatti dalla forma autoaggiunta della (1.1') e dalla $(dY/dx)_{x=\xi_1} = 0$,

$$U(x) = - \int_{\xi_1}^x C Y(\tau) \exp \left[- 2 \int_{\alpha}^{\tau} \omega(\xi) d\xi \right] d\tau,$$

da cui segue

$$- C Y(x) = \frac{dU}{dx} \exp \left\{ 2 \int_{\alpha}^x \omega(\xi) d\xi \right\}$$

e quindi

$$- U(x) = - C \exp \left\{ - 2 \int_{\alpha}^x \omega(\xi) d\xi \right\} \frac{dY}{dx} = \frac{d^2 U}{dx^2} + 2\omega(x) \frac{dU}{dx}$$

q.o. in $[0, +\infty)$.

Poichè l'equazione (2.4) si ottiene dall'equazione (1.1') mutando ω in $-\omega$, alle soluzioni della (2.4) è ora applicabile il risultato asintotico contenuto nelle (1.7), (1.8), (1.9), (1.10). Ne segue l'esistenza di due soluzioni della (2.4) tali che

$$(2.5) \quad \begin{cases} ((pq)^{-\frac{1}{2}} \circ \psi) U_1(x) = \sin \beta(x) + \varepsilon_1^*(x) \\ ((pq)^{-\frac{1}{2}} \circ \psi) U_2(x) = \cos \beta(x) + \varepsilon_2^*(x) \end{cases} \quad (x \rightarrow +\infty)$$

dove

$$(2.5') \quad |\varepsilon_i^*(x)| \leq \lambda_0(x), \quad (i = 1, 2)$$

essendo le funzioni $\beta(x)$, $\lambda_0(x)$ definite rispettivamente da (1.8), (1.9). Ora si ha, per le derivate delle soluzioni $Y_i(x)$ identificate dalle (1.7),

$$(2.6) \quad \begin{cases} ((pq)^{\frac{1}{2}} \circ \psi) \frac{dY_1}{dx} = c_{11} U_1(x) + c_{12} U_2(x) \\ ((pq)^{\frac{1}{2}} \circ \psi) \frac{dY_2}{dx} = c_{21} U_1(x) + c_{22} U_2(x) \end{cases}$$

e applicando le (2.5) si ottengono per le dY_i/dx le formule asintotiche

$$(2.7) \quad \left\{ \begin{array}{l} ((pq)^{\frac{1}{2}} \circ \psi) \frac{dY_1}{dx} = c_{11} \sin \beta(x) + c_{12} \cos \beta(x) + o(1) \\ ((pq)^{\frac{1}{2}} \circ \psi) \frac{dY_2}{dx} = c_{21} \sin \beta(x) + c_{22} \cos \beta(x) + o(1) \end{array} \right. \quad (x \rightarrow +\infty)$$

Sottraendo membro a membro le (2.7) dalle (1.12) si ottiene in S

$$(2.8) \quad \left\{ \begin{array}{l} (\omega(x) - c_{11}) \sin \beta(x) + [\sqrt{1 - \omega^2(x)} - c_{12}] \cos \beta(x) = o(1) \\ -[\sqrt{1 - \omega^2(x)} + c_{21}] \sin \beta(x) + (\omega(x) - c_{22}) \cos \beta(x) = o(1) \end{array} \right. \quad (x \rightarrow +\infty)$$

Ricordando la (1.3) e la conseguente divergenza di $\beta(x)$ per $x \rightarrow +\infty$ si deduce che

$$c_{11} = c_{22} = \omega_{\infty}, \quad c_{12} = -c_{21} = \sqrt{1 - \omega_{\infty}^2}$$

e quindi la validità delle (1.12') con

$$\begin{aligned} \eta_1^*(x) &= \omega_{\infty} \varepsilon_1^*(x) + \sqrt{1 - \omega_{\infty}^2} \varepsilon_2^*(x), \\ \eta_2^*(x) &= -\sqrt{1 - \omega_{\infty}^2} \varepsilon_1^*(x) + \omega_{\infty} \varepsilon_2^*(x). \end{aligned}$$

Rimane da dimostrare la validità delle (1.9'). A questo scopo basta ricordare che

$$\{(pq)^{\frac{1}{2}} \circ \psi\} \frac{dY_1}{dx} = \{(pq)^{-\frac{1}{2}} \circ \psi\} \bar{U}(x) = \sin \left\{ \beta(x) - \frac{3}{2} \pi - \arcsin \omega_{\infty} \right\} + \eta_1^*(x),$$

dove $\bar{U}$ è la soluzione di (2.4) sopra determinata; poichè il Lemma 1 è applicabile anche all'equazione (2.4) si conclude che

$$|\eta_1^*(x)| \leq \lambda_0(x).$$

Analogamente si prova che $|\eta_2^*(x)| \leq \lambda_0(x)$.

OSSERVAZIONI. Dalle considerazioni svolte si vede subito che per la derivata della funzione $Y(x)$ identificata da (2.1) vale la rappre-

sentazione asintotica

$$(2.9) \quad ((pq)^{\frac{1}{2}} \circ \psi) \frac{dY}{dx} = K \{ \cos [\beta(x) + \gamma - \arcsin \omega_{\infty}] + \eta^*(x) \}$$

con la limitazione

$$|\eta^*(x)| \leq \lambda_0(x).$$

È anche immediato constatare, denotando con x_n^* , ξ_n^* gli zeri delle parti principali generalizzate che compaiono nelle (2.1), (2.9), che valgono le formule (1.20), (1.21) cioè

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} (x_{n+1}^* - x_n^*) &= \frac{\pi}{\sqrt{1 - \omega_{\infty}^2}} \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} (\xi_n^* - x_n^*) &= \frac{\arccos(-\omega_{\infty})}{\sqrt{1 - \omega_{\infty}^2}}. \end{aligned}$$

3. Approssimazione degli zeri di una funzione oscillante mediante gli zeri di una sua espressione asintotica.

DEFINIZIONE. Sia $f(x)$ una funzione derivabile su una semiretta I . Sia $\{\lambda_n^*\}_{n \in N}$ la successione degli zeri di $f(x)$, $\{\mu_n^*\}_{n \in N}$ la successione degli zeri di $f'(x)$ e si abbia

$$(3.1) \quad \lambda_n^* < \mu_n^* < \lambda_{n+1}^*, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda_n^* = +\infty.$$

In queste condizioni si dirà che $f(x)$ è una funzione regolarmente oscillante in I .

TEOREMA 2. Formuliamo le ipotesi seguenti:

- I) Sia $f(x)$ una funzione regolarmente oscillante, limitata assieme ad $f'(x)$ in I .
- II) Per ogni zero λ_n^* di $f(x)$ esistano un intorno di λ_n^* di ampiezza 2δ ed una costante positiva M (δ, M indipendenti da n) tali che ⁽⁴⁾

$$|f'(x)| \geq M \quad x \in [\lambda_n^* - \delta, \lambda_n^* + \delta], \quad n \in N.$$

⁽⁴⁾ Ovviamente questa ipotesi potrebbe essere verificata da un certo indice in poi.

III) Sia $f(x)$ una rappresentazione asintotica per $x \rightarrow +\infty$ di una funzione $z(x)$; sia cioè

$$(3.2) \quad \begin{cases} z(x) = f(x) + r(x) \\ r(x) = o\left\{\sup_{\xi \geq x} |f(\xi)|\right\} \end{cases} \quad (x \rightarrow +\infty).$$

IV) Tale formula asintotica sia derivabile; si abbia cioè

$$(3.3) \quad \begin{cases} z'(x) = f'(x) + r'(x) \\ r'(x) = o\left\{\sup_{\xi \geq x} |f'(\xi)|\right\} \end{cases} \quad (x \rightarrow +\infty).$$

In queste ipotesi $z(x)$ ammette infiniti zeri in I , e si possono far corrispondere biunivocamente, almeno da un certo indice in poi, gli zeri λ_n di $z(x)$ con gli zeri λ_n^* di $f(x)$ in modo che risulti

$$(3.4) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} (\lambda_n - \lambda_n^*) = 0.$$

DIMOSTRAZIONE. Dalle ipotesi I), III), IV) segue

$$(3.5) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} r(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} r'(x) = 0.$$

Scelto quindi σ , tale che $0 < \sigma \leq M\delta$, sia I_1 la semiretta nella quale si ha

$$(3.6) \quad |r(x)| < \sigma, \quad |r'(x)| < \frac{\sigma}{\delta}, \quad x \in I_1.$$

Sia λ_q^* il primo zero di $f(x)$ tale che $\lambda_q^* - \delta \in I_1$; supposto per fissare le idee che sia

$$(3.7) \quad f'(x) \geq M \quad x \in [\lambda_q^* - \delta, \lambda_q^* + \delta],$$

si ha

$$f(\lambda_q^* + \delta) \geq M\delta, \quad f(\lambda_q^* - \delta) \leq -M\delta.$$

Ne segue subito

$$(3.8) \quad z(\lambda_q^* + \delta) > M\delta - \sigma \geq 0, \quad z(\lambda_q^* - \delta) < -M\delta + \sigma \leq 0,$$

ed ancora

$$(3.9) \quad z'(x) > M - \frac{\sigma}{\delta} \geq 0, \quad x \in [\lambda_q^* - \delta, \lambda_q^* + \delta].$$

Esiste quindi uno zero (e uno solo) di $z(x)$, che chiameremo λ_q , nell'intervallo $[\lambda_q^* - \delta, \lambda_q^* + \delta]$.

Maggioriamo ora la distanza tra λ_q ed λ_q^* . Si ha

$$(3.10) \quad |f(\lambda_q)| = |r(\lambda_q)| < \sigma,$$

$$(3.11) \quad |f(\lambda_q)| = |f(\lambda_q) - f(\lambda_q^*)| \geq M |\lambda_q - \lambda_q^*|.$$

Ne segue

$$(3.12) \quad |\lambda_q - \lambda_q^*| < \frac{\sigma}{M}.$$

Ciò premesso possiamo associare, per $n \geq q$, ad ogni zero λ_n^* di $f(x)$ lo zero corrispondente di $z(x)$ in $[\lambda_n^* - \delta, \lambda_n^* + \delta]$. Resta da escludere l'esistenza di altri zeri di $z(x)$ in I_1 . Allo scopo osserviamo che la (3.1) e l'ipotesi II) comportano

$$\lambda_n^* + \delta < \lambda_{n+1}^* - \delta \quad n \in N.$$

In queste condizioni, supponendo sempre per fissare le idee che sia $f'(x) \geq M$ in $[\lambda_n^* - \delta, \lambda_n^* + \delta]$, segue che $f'(x) \leq -M$ in

$$[\lambda_{n+1}^* - \delta, \lambda_{n+1}^* + \delta].$$

D'altra parte si ha

$$f(\lambda_n^* + \delta) \geq M\delta, \quad f(\lambda_{n+1}^* - \delta) \geq M\delta$$

e poichè $f'(x)$ si annulla soltanto una volta in $[\lambda_n^* + \delta, \lambda_{n+1}^* - \delta]$ si vede subito che

$$f(x) \geq M\delta, \quad x \in [\lambda_n^* + \delta, \lambda_{n+1}^* - \delta].$$

Si conclude che in I_1 non esistono altri zeri di $z(x)$ oltre a quelli λ_n già trovati, che nella semiretta I_0 corrispondente a $\sigma = M\delta$ c'è corrispondenza biunivoca fra λ_n e λ_n^* , ed infine che si ha in I_1

$$|\lambda_n - \lambda_n^*| < \frac{\sigma}{M} \quad n \geq q$$

da cui la tesi.

4. Applicazione del criterio ottenuto nel paragrafo 3.

TEOREMA 3. Supponiamo che valgano le ipotesi del lemma 1 e che inoltre ω sia continua in $[0, +\infty)$. Indichiamo con x_n, ξ_n gli zeri successivi di una soluzione non triviale $Y(x)$ di (1.1') e della sua derivata dY/dx su una opportuna semiretta, e con x_n^*, ξ_n^* gli zeri delle rappresentazioni asintotiche di $Y(x), dY/dx$ fornite da (2.1), (2.9). Allora si ha

$$(4.1) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} (x_n - x_n^*) = 0$$

$$(4.2) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} (\xi_n - \xi_n^*) = 0.$$

DIMOSTRAZIONE. Osserviamo innanzitutto che la formulazione del problema per gli zeri di dY/dx , così come ottenuto scrivendo la (2.9), non differisce dal problema degli zeri di $Y(x)$ come appare formulato dalla (2.1). Di modo che, tenendo anche conto della (2.3), la dimostrazione della (4.2) è la stessa di quella della (4.1). Identificata la funzione $K \sin(\beta(x) + \gamma)$ con la funzione $f(x)$ del paragrafo 3, i punti x_n^*, t_n^* zeri di f, f' sono determinati dalle equazioni

$$(4.3) \quad \beta(x_n^*) = \int_{\alpha}^{x_n^*} \sqrt{1 - \omega^2(\tau)} d\tau = n\pi - \gamma$$

$$(4.4) \quad \beta(t_n^*) = \int_{\alpha}^{t_n^*} \sqrt{1 - \omega^2(\tau)} d\tau = (n + \frac{1}{2})\pi - \gamma.$$

Poichè $\beta(x)$ diverge con monotonia stretta in $[\alpha, +\infty)$, la funzione $K \sin(\beta(x) + \gamma)$ risulta ivi regolarmente oscillante.

Vediamo ora che questa funzione verifica l'ipotesi II) del teorema 2. Poniamo ⁽⁵⁾

$$(4.5) \quad \inf_{x \geq \alpha} \beta'(x) = \inf_{x \geq \alpha} \sqrt{1 - \omega^2(x)} = b^* > 0.$$

⁽⁵⁾ Ovviamente risulta $b^* > 0$ per le (1.3), (1.8) e la continuità di ω .

Osserviamo che dal teorema di Lagrange si ha

$$\begin{cases} \cos \{\beta(x_n^* + h) + \gamma\} - \cos \{\beta(x_n^*) + \gamma\} = -h\beta'(u) \sin(\beta(u) + \gamma) \\ x_n^* < u < x_n^* + h \quad \text{oppure} \quad x_n^* + h < u < x_n^* \end{cases}$$

da cui per la (4.3) si ottiene

$$(4.6) \quad |\cos(\beta(x_n^* + h) + \gamma)| \geq 1 - |h|.$$

Dalle (4.5), (4.6) segue che, scelto $0 < \delta < 1$, si ha

$$(4.7) \quad |\beta'(x) \cos \{\beta(x) + \gamma\}| \geq (1 - \delta)b^* \quad x \in [x_n^* - \delta, x_n^* + \delta].$$

Scelto quindi $M = K(1 - \delta)b^*$ possiamo affermare che la funzione $K \sin \{\beta(x) + \gamma\}$ verifica l'ipotesi II) del teorema 2.

Osservato che le funzioni $((pq)^{\frac{1}{2}} \circ \psi) \cdot Y(x)$, $K \sin \{\beta(x) + \gamma\}$ verificano l'ipotesi III) del teorema 2, come è noto dalle (2.1), (2.2), rimane soltanto da verificare l'ipotesi IV) ⁽⁶⁾ ossia che

$$(4.8) \quad \begin{cases} \frac{d}{dx} \{((pq)^{\frac{1}{2}} \circ \psi) Y(x)\} = K \{\beta'(x) \cos(\beta(x) + \gamma) + \varepsilon'(x)\} \\ \varepsilon'(x) = o \left\{ \sup_{\xi \geq x} |\beta'(\xi) \cos \{\beta(\xi) + \gamma\}| \right\} \quad (x \rightarrow +\infty) \end{cases}$$

A questo scopo ricordiamo che per $x \in [\alpha, +\infty)$ si ha

$$(4.9) \quad \sup_{\xi \geq x} |\beta'(\xi) \cos \{\beta(\xi) + \gamma\}| \geq b^* > 0$$

⁽⁶⁾ Volendo dimostrare la (4.2), la verifica dell'ipotesi IV per le funzioni

$$((pq)^{\frac{1}{2}} \circ \psi) \frac{dY}{dx}, \quad K \cos \{\beta(x) + \gamma - \arcsin \omega_\infty\}$$

dipende dalla

$$((pq)^{\frac{1}{2}} \circ \psi) \frac{dY}{dx} = ((pq)^{-\frac{1}{2}} \circ \psi) U,$$

con $U(x)$ soluzione di (2.4), equazione che si ottiene da (1.1') cambiando solo il segno di ω .

e verifichiamo che

$$(4.10) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \varepsilon'(x) = 0.$$

Infatti dalle (2.1), (2.9) e dalla identità (7)

$$\frac{d}{dx} \{(pq)^{\frac{1}{2}} \circ \psi\} = -\omega(x) \{(pq)^{\frac{1}{2}} \circ \psi\}$$

segue

$$\begin{aligned} K\{\beta'(x) \cos(\beta(x) + \gamma) + \varepsilon'(x)\} &= \frac{d}{dx} \{((pq)^{\frac{1}{2}} \circ \psi) Y(x)\} = \\ &= -K\omega(x) \{\sin(\beta(x) + \gamma) + \varepsilon(x)\} + \\ &\quad + K\{\cos(\beta(x) + \gamma - \arcsin \omega_\infty) + \eta^*(x)\}, \end{aligned}$$

dalla quale si ottiene

$$\begin{aligned} \varepsilon'(x) &= \cos\{\beta(x) + \gamma\} \{\sqrt{1 - \omega_\infty^2} - \sqrt{1 - \omega^2(x)}\} + \sin\{\beta(x) + \gamma\} \cdot \\ &\quad \cdot \{\omega_\infty - \omega(x)\} - \omega(x)\varepsilon(x) + \eta^*(x). \end{aligned}$$

OSSERVAZIONE. La formula (4.2) si può anche ottenere direttamente dalla (4.1) sfruttando i risultati di [1] e più precisamente la (1.6) di questo lavoro. Basta osservare che

$$\xi_n - \xi_n^* = (\xi_n - x_n) + (x_n - x_n^*) + (x_n^* - \xi_n^*)$$

ed applicare oltre a (1.6) e (4.1) la (1.20).

5. Considerazioni sulle ipotesi del teorema 2.

Opportuni controesempi vengono ora presentati a giustificazione delle ipotesi sussidiarie II) e IV) del teorema 2.

a) *Controesempio relativo all'ipotesi II).*

Sia $z(x) = \sin(\sqrt{x} + 1/\sqrt{x})$, $f(x) = \sin \sqrt{x}$ e consideriamo la semi-

(7) Ovunque verificata per la supposta continuità di ω .

retta $I = \{x \in R | x \geq 1\}$. Vale l'espressione asintotica

$$(5.1) \quad \begin{cases} \sin\left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) = \sin \sqrt{x} + r(x) \\ r(x) = o(1) \end{cases} \quad (x \rightarrow +\infty)$$

essendo

$$|r(x)| < \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Verificheremo che vale l'ipotesi IV) del teorema 2 cioè che

$$(5.2) \quad \frac{1}{2\sqrt{x}}\left(1 - \frac{1}{x}\right) \cos\left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cos \sqrt{x} + r'(x),$$

$$(5.2') \quad r'(x) = o\left\{\sup_{\xi \geq x} \left| \frac{\cos \sqrt{\xi}}{2\sqrt{\xi}} \right|\right\} \quad (x \rightarrow +\infty),$$

ma che non è verificata l'ipotesi II). Contemporaneamente troveremo che, con le usuali notazioni del paragrafo 3, si ha

$$(5.3) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} (\lambda_n - \lambda_n^*) = -2$$

e che quindi la tesi del teorema 2 può essere falsa se si lascia cadere l'ipotesi II). Per dimostrare la (5.2') osserviamo che dalla (5.2) si ha

$$|r'(x)| < \frac{1}{2x} + \frac{1}{2x\sqrt{x}} \leq \frac{1}{x}.$$

Inoltre dette u_n le ascisse dei massimi relativi di $|f'(x)| = |\cos \sqrt{x}|/(2\sqrt{x})$ in I , scelto l'indice n in modo che sia

$$(5.4) \quad \sqrt{u_{n-1}} < \sqrt{x} \leq \sqrt{u_n},$$

si ha

$$\sup_{\xi \geq x} \frac{|\cos \sqrt{\xi}|}{2\sqrt{\xi}} \geq \frac{|\cos \sqrt{u_n}|}{2\sqrt{u_n}}.$$

Poichè $\sqrt{u_n} \sim n\pi - 1/n\pi$ ($n \rightarrow +\infty$) esiste una costante $A > 0$ tale che

$$\sup_{\xi \geq x} \frac{|\cos \sqrt{\xi}|}{2\sqrt{\xi}} > \frac{A}{\sqrt{u_n}}.$$

D'altra parte si ha $|r'(x)| < 1/u_{n-1}$ perciò

$$(5.5) \quad \frac{|r'(x)|}{\sup_{\xi \geq x} |\cos \sqrt{\xi}|/(2\sqrt{\xi})} < \frac{\sqrt{u_n}}{Au_{n-1}}$$

e quindi, tenuto conto di (5.4) e della rappresentazione asintotica di u_n , il I) membro di (5.5) è $O(x^{-1/2})$ per $x \rightarrow +\infty$. La dimostrazione della (5.2') è terminata.

Verifichiamo ora che non vale l'ipotesi II) del teorema 2. Infatti la successione degli zeri di $f(x) = \sin \sqrt{x}$ in I è data da

$$\lambda_n^* = n^2 \pi^2 \quad n = 1, 2, \dots$$

e si ha

$$(5.6) \quad f'(\lambda_n^*) = \frac{(-1)^n}{2n\pi}.$$

Non esistono quindi le costanti positive M, δ (indipendenti da n) tali che

$$|f'(x)| \geq M \quad x \in [\lambda_n^* - \delta, \lambda_n^* + \delta].$$

La successione degli zeri di $z(x)$ in I è data da

$$\lambda_n = \frac{(n\pi + \sqrt{n^2 \pi^2 - 4})^2}{4} \quad n = 1, 2, \dots$$

ne segue subito la (5.3).

b) Controesempio relativo all'ipotesi IV) del Teorema 2.

Sia $z(x) = \sin [x + (\pi^2/x) \cdot \sin (x^3/\pi^2)]$, $f(x) = \sin x$ e consideriamo la semiretta $I = \{x \in \mathbb{R} | x > \pi\}$. Vale l'espressione asintotica:

$$(5.7) \quad \begin{cases} \sin \left(x + \frac{\pi^2}{x} \sin \frac{x^3}{\pi^2} \right) = \sin x + r(x) \\ r(x) = o(1) \quad (x \rightarrow +\infty) \end{cases}$$

essendo

$$|r(x)| < \frac{\pi^2}{x}.$$

Gli zeri di $f(x) = \sin x$ in I sono $\lambda_n^* = n\pi$, $n = 2, 3, \dots$ e si ha $f'(\lambda_n^*) = (-1)^n$ di modo che vale ovviamente l'ipotesi II) del Teorema 2. Non vale invece l'ipotesi IV). Si trova infatti

$$r'(x) = 3x \cos\left(\frac{x^3}{\pi^2}\right) \cos\left\{x + \frac{\pi^2}{x} \sin \frac{x^3}{\pi^2}\right\} + o(1) \quad (x \rightarrow +\infty)$$

ciò che basta per concludere che la formula

$$z'(x) = f'(x) + r'(x)$$

non fornisce una rappresentazione asintotica di $z'(x)$ mediante $f'(x)$.

Mostreremo allora che $z(x)$, oltre a possedere in I gli zeri $\lambda_n^* = n\pi$ di $f(x)$, ne possiede infiniti altri disposti in prossimità di λ_n^* , di modo che non è possibile stabilire una corrispondenza biunivoca fra gli zeri di $z(x)$ e quelli di $f(x)$.

A questo scopo poniamo

$$(5.8) \quad \varphi(x) = x + \frac{\pi^2}{x} \sin \frac{x^3}{\pi^2}.$$

Poichè $\varphi(n\pi) = n\pi$ si ha $z(n\pi) = 0$ cioè $z(\lambda_n^*) = 0$.

Per verificare che esistono infiniti altri zeri di $z(x)$ in I supponiamo dapprima $n = 3, 5, 7, \dots$. Si ha

$$\varphi(\pi \sqrt[3]{n^3 + \frac{1}{2}}) = \left(\sqrt[3]{n^3 + \frac{1}{2}} - \frac{1}{\sqrt[3]{n^3 + \frac{1}{2}}} \right) \pi < n\pi,$$

$$\varphi(\pi \sqrt[3]{n^3 + 1}) = \pi \sqrt[3]{n^3 + 1} > n\pi,$$

$$\varphi(\pi \sqrt[3]{n^3 - 1}) = \pi \sqrt[3]{n^3 - 1} < n\pi,$$

$$\varphi(\pi \sqrt[3]{n^3 - \frac{1}{2}}) = \left(\sqrt[3]{n^3 - \frac{1}{2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{n^3 - \frac{1}{2}}} \right) \pi > n\pi,$$

di modo che esiste almeno uno zero di $z(x)$ compreso fra $\pi \sqrt[3]{n^3 + \frac{1}{2}}$ e $\pi \sqrt[3]{n^3 + 1}$ ed almeno un altro zero di $z(x)$ compreso fra $\pi \sqrt[3]{n^3 - 1}$ e $\pi \sqrt[3]{n^3 - \frac{1}{2}}$.

Conclusioni analoghe si ottengono per n pari ($n = 2, 4, \dots$).

Si ha infatti

$$\varphi(\pi \sqrt[3]{n^3 + 1}) = \pi \sqrt[3]{n^3 + 1} > n\pi,$$

$$\varphi(\pi \sqrt[3]{n^3 + \frac{3}{2}}) = \left(\sqrt[3]{n^3 + \frac{3}{2}} - \frac{1}{\sqrt[3]{n^3 + \frac{3}{2}}} \right) \pi < n\pi,$$

$$\varphi(\pi \sqrt[3]{n^3 - \frac{3}{2}}) = \left(\sqrt[3]{n^3 - \frac{3}{2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{n^3 - \frac{3}{2}}} \right) \pi > n\pi,$$

$$\varphi(\pi \sqrt[3]{n^3 - 1}) = \pi \sqrt[3]{n^3 - 1} < n\pi.$$

c) *Indipendenza fra le ipotesi III) e IV) del Teorema 2.*

Il controesempio seguente evidenzia la sostanziale indipendenza delle ipotesi III) e IV) del Teorema 2. A parziale differenza da quanto avviene nella teoria classica dell'asintoticità è infatti possibile che le funzioni oscillanti $z(x)$, $z'(x)$ ammettano le rappresentazioni asintotiche

$$(5.9) \quad z(x) = f(x) + r(x), \quad r(x) = o\left\{\sup_{\xi \geq x} |f(\xi)|\right\}, \quad (x \rightarrow +\infty)$$

$$(5.10) \quad z'(x) = g(x) + \alpha(x), \quad \alpha(x) = o\left\{\sup_{\xi \geq x} |g(\xi)|\right\}, \quad (x \rightarrow +\infty)$$

dove supponiamo f, f', g limitate su una semiretta I , f regolarmente oscillante in I , senza che si abbia per $x \rightarrow +\infty$

$$(5.11) \quad z(x) = \int_a^x g(t) dt + \int_a^x \alpha(t) dt, \quad \int_a^x \alpha(t) dt = o\left\{\sup_{\xi \geq x} \left| \int_a^\xi g(t) dt \right| \right\}$$

nè

$$(5.12) \quad z'(x) = f'(x) + r'(x), \quad r'(x) = o\left\{\sup_{\xi \geq x} |f'(\xi)|\right\}.$$

Sia infatti $z(x) = \sin [x + (\pi/x) \cdot \sin (x^2/\pi)]$, $f(x) = \sin x$ e consideriamo la semiretta $I = \{x \in \mathbb{R} | x \geq 0\}$. Posto per continuità $z(0) = 0$

anche $z'(x)$ è continua in I e vale l'espressione asintotica

$$(5.13) \quad \begin{cases} \sin\left(x + \frac{\pi}{x} \sin \frac{x^2}{\pi}\right) = \sin x + r(x) \\ r(x) = o(1) \quad (x \rightarrow +\infty) \end{cases}$$

essendo

$$|r(x)| < \frac{\pi}{x} \quad (x > 0).$$

Vale inoltre l'espressione asintotica

$$(5.14) \quad \begin{cases} \cos\left(x + \frac{\pi}{x} \sin \frac{x^2}{\pi}\right) \left\{1 - \frac{\pi}{x^2} \sin\left(\frac{x^2}{\pi}\right) + 2 \cos\left(\frac{x^2}{\pi}\right)\right\} = \\ = \cos x \left(1 + 2 \cos \frac{x^2}{\pi}\right) + \alpha(x) \\ \alpha(x) = o(1) \quad (x \rightarrow +\infty) \end{cases}$$

essendo

$$|\alpha(x)| < \frac{4\pi}{x} \quad x > 1.$$

Di modo che nella (5.10) si ha $g(x) = [1 + 2 \cos(x^2/\pi)] \cos x$. È allora evidente che non vale la (5.12) perchè $f'(x) = \cos x$. Non vale nemmeno la (5.11); infatti, integrando la (5.14) nell'intervallo $[0, x]$, si ottiene

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{x} \sin \frac{x^2}{\pi}\right) = \sin x + \int_0^x 2 \cos t \cos \frac{t^2}{\pi} dt + \int_0^x \alpha(t) dt$$

e dal confronto con la (5.13) si ha

$$(5.15) \quad r(x) = \int_0^x 2 \cos t \cos \frac{t^2}{\pi} dt + \int_0^x \alpha(t) dt = o(1) \quad (x \rightarrow +\infty).$$

Si vede facilmente, usando gli integrali di Fresnel, che

$$\int_0^{+\infty} 2 \cos t \cos \frac{t^2}{\pi} dt = \pi.$$

Ne segue che le funzioni $\int_0^x 2 \cos t \cos (t^2/\pi) dt$, $\int_0^x \alpha(t) dt$ sono limitate in I , ma poichè

$$\int_0^{+\infty} \alpha(t) dt = -\pi$$

è falso che si abbia per $x \rightarrow +\infty$

$$\int_0^x \alpha(t) dt = o \left\{ \sup_{\xi \geq x} \left| \int_0^\xi 2 \cos t \cos \frac{t^2}{\pi} dt + \sin \xi \right| \right\}.$$

BIBLIOGRAFIA

- [1] A. M. BRESQUAR, *Sugli zeri delle soluzioni di una classe di equazioni differenziali lineari del secondo ordine*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, **64** (1981), pp. 247-270.
- [2] J. DIEUDONNÉ, *Calcul infinitesimal*, Hermann, Paris (1968).
- [3] U. RICHARD, *Sulla risoluzione asintotico-numerica dell'equazione differenziale $(py')' + qy = 0$ nel caso oscillante*, Atti Accad. Sci. Torino, **97** (1962-1963), pp. 857-890.
- [4] U. RICHARD, *Serie asintotiche per una classe di equazioni differenziali lineari non oscillanti del 2° ordine*, Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino, **23** (1963-64), pp. 171-217.
- [5] L. SIROVICH, *Techniques of asymptotic analysis*, Springer, Berlin (1971).
- [6] F. TRICOMI, *Sulle funzioni ipergeometriche confluenti*, Ann. Mat. Pura Appl., (4), **26** (1947), pp. 141-175.
- [7] F. TRICOMI, *Sugli zeri delle funzioni di cui si conosce una rappresentazione asintotica*, Ann. Mat. Pura Appl., (4), **26** (1947), pp. 283-300.

- [8] J. VOSMANSKÝ, *Certain higher monotonicity properties of i -th derivatives of solutions of $y'' + a(t)y' + b(t)y = 0$* , Arch. Math. (Brno), **10** (1974), pp. 87-102.
- [9] J. VOSMANSKÝ, *The distribution of zeros of solutions of second-order differential equations*, English translation: Diff. Eq., **15** (1979), no. 12, pp. 1511-1519 (1980).

Manoscritto pervenuto in redazione il 17 novembre 1981.