

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

U. OLIVERI

Un teorema sui polinomi differenziali omogenei in R^2

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 69 (1983), p. 267-270

http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1983__69__267_0

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1983, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

Un teorema sui polinomi differenziali omogenei in R^2 .

U. OLIVERI (*)

Recentemente G. Bratti, in [1], ha dimostrato il seguente:

TEOREMA. Sia $P = P(D_x, D_y)$ un polinomio differenziale a coefficienti costanti, le proposizioni seguenti sono equivalenti:

- (a) per ogni $B \subset R^2$, limitato e convesso, $P(G(B)) = G(B)$ ⁽¹⁾;
- (b) per ogni $B \subset R^2$, limitato e P -convesso, $P(G(B)) = G(B)$;
- (c) P è iperbolico rispetto ad ogni vettore caratteristico.

La dimostrazione fa uso della teoria della dualità fra limiti proiettivi ed induttivi e di teoremi di unicità del tipo 5.3.3. in (2) (pag. 129), ed appare piuttosto complicata.

Scopo di questa nota è di fornire, nel caso di P omogeneo, una dimostrazione semplice, di carattere geometrico, del teorema sopra esposto.

La parte essenziale di questa nota riguarda la deduzione di (b) da (c). Infatti, nel caso di P omogeneo, è facile dimostrare che (a) implica (c) mentre l'implicazione (b) implica (a) è ovvia anche nel caso non omogeneo.

I. Sia $P = P(D_x, D_y)$ un polinomio differenziale omogeneo, a coefficienti costanti, in due variabili. Sia $B \subset R^2$ aperto e convesso tale che: $P(G(B)) = G(B)$. Se P avesse fattori ellittici, $P = RE$, E ellittico,

(*) Indirizzo dell'A.: Seminario Matematico, Via Archirafi, 34 - 90123 Palermo (Italy).

⁽¹⁾ $G(B) = \{f \in C^\infty(R^2): f|_B = 0\}$.

allora avremmo anche $E(G(B)) = G(B)$. Se $x \in R^2 \sim B^-$ e se V è un intorno di x , con $B \cap V = \emptyset$, poichè $C_c^\infty(V) \subset G(B)$, per ogni $\varphi \in C_c^\infty(V)$ esisterebbe $u \in G(B)$ tale che $Eu = \varphi$. Allora: u è analitica su $R^2 \sim \sim (\text{supp } (\varphi))$, cioè $u \in C_c^\infty(V)$ ed ancora $E(C_c^\infty(V)) = C_c^\infty(V)$. Ciò è assurdo visto che ${}^tE = \mathcal{D}'(V) \rightarrow \mathcal{D}'(V)$ non può essere iniettiva. Ne viene dunque che (a) implica (c).

2. Dimostrazione di (c) implica (b) nel caso P omogeneo.

Se vale la (c) P deve essere del tipo $\prod_{k=1}^N (D_x - a_k D_y)$ con $a_k \in R$. Basterà dimostrare (b) quando P è del tipo $D_x - a D_y$, $a \in R$, anzi si può supporre direttamente che sia $P(D_x, D_y) = D_x$ mediante una rotazione del piano in sè.

Sia B un aperto di R^2 , D_x -convesso; se si dimostra che: fissato $(x_0, y_0) \in B$ esiste una spezzata s , a lati paralleli agli assi coordinati, tale che:

- (i) $(x_0, y_0) \in s$;
- (ii) se $(x_1, y_1) \in B$ e se (x_2, y_1) è la proiezione orizzontale di (x_1, y_1) su s , il segmento $((x_1, y_1), (x_2, y_1))$ è contenuto in B ;
- (iii) la proiezione orizzontale di s copre R , posto, per ogni $(x, y) \in R^2$

$$g(x, y) = \int_{s'} f ds' + \int_{s''} f ds''$$

dove: (\bar{x}, y) è la proiezione orizzontale di (x, y) su s

s' è la spezzata contenuta in s , che congiunge (x_0, y_0)

e (\bar{x}, y) orientata da (x_0, y_0) a (\bar{x}, y)

s'' è il segmento $[(\bar{x}, y), (x, y)]$;

avremo allora che:

- (i') se $f \in G(B)$ per le proprietà (i) ed (ii): $g \in G(B)$;
- (ii') g risolve l'equazione $D_x g = f$.

3. Costituzione dalla spezzata s .

Siano r una retta parallela all'asse delle x e $\Gamma(r)$ il connesso che essa intercetta su B ⁽²⁾. Con $t(x, y)$ ed $r(x, y)$ denoteremo le rette per (x, y) parallele rispettivamente all'asse y ed all'asse x . Se $(x, y) \in B$ con $\beta(x, y)$ ed $\alpha(x, y)$ intenderemo, rispettivamente, l'estremo superiore e l'estremo inferiore del più grande degli intervalli aperti di $t(x, y)$, contenenti (x, y) , tutti fatti di punti di B .

Se la retta $r(x, \beta(x, y))$ contiene punti di B li contiene da una sola banda rispetto ad $(x, \beta(x, y))$. Sia $(x_0, y_0) \in B$, $(x_0, y_0) \in r(x, \beta(x, y))$ esiste allora $\varepsilon > 0$ tale che $(x, \beta(x, y) - \varepsilon)$, $(x, y_0 - \varepsilon) \in B$ con $\beta(x, y) - \varepsilon = y_0 - \varepsilon$. Per la spezzata $((x, y), (x, \beta(x, y) - \varepsilon)) \cup ((x, \beta(x, y) - \varepsilon), (x, y_0 - \varepsilon)) \subset B$ e per la parte di aperto delimitata dalle rette $r(x, y)$ ed $r(x, y_0 - \varepsilon)$ sono verificate le (i) e le (ii). Per $\beta(x, y)$ ed $\alpha(x, y)$ sono possibili le eventualità:

$$(1) \quad \beta(\Gamma) = \sup \{(x, y) : (x, y) \in \Gamma(r)\} = +\infty$$

$$(2) \quad \beta(\Gamma) < +\infty$$

$$(3) \quad \alpha(\Gamma) = \inf \{(x, y) : (x, y) \in \Gamma(r)\} = -\infty$$

$$(4) \quad \alpha(\Gamma) > -\infty.$$

Consideriamo il caso (1) allora:

$$(a_1) \quad \exists \quad (x_1, y_1) \in \Gamma(r) : \beta(x_1, y_1) = +\infty$$

in questo caso ogni punto di B sul semipiano superiore delimitato dalla retta r è collegato alla retta $t(x_1, y_1)$ mediante un intervallo parallelo all'asse delle x tutto fatto di punti di B . In caso contrario B sarebbe tagliato in due intervalli distinti da una parallela all'asse delle x . Ricordiamo che tutti i punti della retta $t(x_1, y_1)$ che stanno sul semipiano superiore rispetto ad r sono punti di B .

$$(b_1) \quad \nexists \quad (x, y) \in \Gamma(r) : \beta(x, y) = +\infty$$

esiste allora una successione $(x_n, y) \in \Gamma(r)$ per ogni n e $\beta(x_n, y) \uparrow +\infty$. Se consideriamo la retta r_n (la parallela per $(x_n, \beta(x_n, y))$ all'asse x essa è incontrata da $t(x_{n+1}, y)$ contenendo quindi un intervallo tutto

⁽²⁾ Cfr. [2], pag. 89, th. 3.7.2.

contenuto in B . Se (x, y) è un punto di B che sta sul semipiano superiore rispetto alla retta r esiste certamente (x_n, y) tale che $\beta(x_n, y) > y$ e quindi (x, y) appartiene alla fascia determinata da r ed $r(x_n, y)$.

$$(a_2) \quad \exists \quad (x_1, y_1) \in \Gamma(r): \beta(x_1, y_1) = \beta(\Gamma)$$

consideriamo la retta $r(x_1, \beta(x_1, y_1)) = r_1$. Se r_1 contiene punti di B operiamo su $\Gamma(r_1)$ lo stesso procedimento adoperato per $\Gamma(r)$. Se r_1 non contiene punti di B significa che al disopra di r_1 non vi sono punti di B altrimenti B non sarebbe connesso.

Sia s la spezzata ottenuta con la tecnica sopra esposta. Supponiamo che esista (x, y) di B non appartenente alla fascia $F(s)$ determinata dalla spezzata. Se $(x, y) \notin F(s)$ non vi appartiene con tutto un intorno. Infatti se $I(x, y) \cap F(s) \neq \emptyset$ potremmo prolungare s sino ad includere (x, y) . Quindi $A = \{(x, y): (x, y) \notin F(s)\}$ e $B \cap F(s)$ sono aperti e disgiunti contro l'ipotesi di connessione di B .

$$(b_2) \quad \nexists \quad (x, y) \in \Gamma(r): \beta(x, y) = \beta(\Gamma)$$

esiste allora una successione $(x_n, y) \in \Gamma(r)$ tale che $\beta(x_n, y) \uparrow \beta(\Gamma)$. Poniamo $r(x_n, (x_n, y)) = r_n$. Consideriamo $\beta(\Gamma_n)(\Gamma_n = \Gamma(r_n))$ e supponiamo che per ogni n $\beta(\Gamma_n) \leq \beta(\Gamma)$. Si verifica allora che la spezzata costruita per mezzo della successione (x_n, y) va bene per tutti i punti di B al disopra della retta r . Se $(x, y) \in B$ ed un suo intorno intercetta $r(0, \beta(\Gamma))$ allora deve esistere n tale che $\beta(\Gamma_n) > \beta(\Gamma)$, in questo caso procediamo su Γ_n come prima. Per la spezzata s così ottenuta possiamo ripetere il ragionamento fatto in precedenza.

In maniera analoga si opera per il semipiano al disotto della retta r .

BIBLIOGRAFIA

- [1] G. BRATTI, *Problema di Cauchy semiglobale in due variabili*, in stampa presso Rend. Sem. Mat. di Padova.
- [2] L. HORMANDER, *Linear partial differential operators*, Springer-Verlag, 1969.

Manoscritto pervenuto in redazione il 3 maggio 1982.