ANTONIO CHIFFI
GIANCARLO ZIRELLO

Misura di Hausdorff e misure approssimanti

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 69 (1983), p. 233-241
<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1983__69__233_0>

REND. SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol. 69 (1983)

Misura di Hausdorff e misure approssimanti.

ANTONIO CHIFFI - GIANCARLO ZIRELLO (*)

Sia E un insieme di uno spazio metrico Ω; sia h una funzione reale della variabile reale t, definita per $t \geqslant 0$, crescente, continua per ogni $t \geqslant 0$, positiva per $t > 0$ e nulla per $t = 0$; sia $d(G)$ il diametro di un insieme G di Ω. Seguendo le notazioni e le definizioni di [R], poniamo:

$$\mu_\delta(E) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} h[d(G_i)] : \bigcup_{i=1}^{\infty} G_i \supseteq E,\ G_i \ \textit{aperti},\ d(G_i) \leqslant \delta \right\}$$

$$\nu_\delta(E) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} h[d(F_i)] : \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i \supseteq E,\ F_i \ \textit{chiusi},\ d(F_i) \leqslant \delta \right\}.$$

Le misure μ_δ e ν_δ (esterne, non regolari) sono le *misure approssimati* (1) la misura di Hausdorff μ^h. Se si fissa l'insieme E, esse diventano funzioni reali della variabile reale δ, definite per $\delta > 0$, monotone e perciò affette da al più una infinità numerabile di discontinuità di prima specie. L'ammontare dei salti in ciascun punto di discontinuità, rilevato su particolari esempi, fa arguire che tali numeri siano legati a non banali proprietà geometriche intrinseche dell'insieme E. Il presente lavoro è motivato da questa congettura.

Dimostriamo dapprima, nella ipotesi che Ω sia compatto, la continuità a destra della funzione f così definita:

$$f(x) = \nu_x(E) \qquad (x > 0). \tag{1}$$

(*) Indirizzo degli AA.: Istituto di Matematica Applicata, Università di Padova.

(1) Cfr. [F], § 2.10.1.

Diamo poi delle condizioni di continuità a sinistra, che permettono di individuare sottoinsiemi di E di diametro δ responsabili delle eventuali discontinuità nel punto $x = \delta$. Illustriamo infine in quale misura i risultati possono essere estesi alla funzione g così definita:

$$g(x) = \mu_x(E) \qquad (x > 0)\,. \tag{2}$$

Lemma 1. *Sia $\{E_j\}$ una successione crescente di insiemi di uno spazio metrico compatto ed esistano i numeri positivi θ e M tali che per ogni j si abbia: $\nu_\theta(E_j) \leqslant M$; in tali ipotesi, detta E la unione di tali insiemi, si ha pure: $\nu_\delta(E) \leqslant M$ per ogni $\delta > \theta$.*

La dimostrazione segue dalle note relazioni:

$$\nu_\delta(E) \leqslant \nu_\theta(E) = \sup_j \nu_\theta(E_j)$$

(cfr. [D], ovvero [F], § 2.10.22).

Teorema 2. *Sia E un insieme di uno spazio metrico compatto Ω; la funzione reale f definita nella* (1) *è continua a destra.*

Fissiamo $\delta > 0$ e poniamo:

$$\lim_{\eta \to \delta +} \nu_\eta(E) = \lambda < +\infty$$

e sia $\{\delta_n\}$ una successione di numeri positivi decrescente e convergente a δ. Fissato $\varepsilon > 0$ per ogni n esiste una successione $\{F_i^n\}_i$ di insiemi chiusi non vuoti tale che:

$$E \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i^n\,; \qquad d(F_i^n) \leqslant \delta_n \qquad (i = 1, 2, \ldots) \tag{3}$$

$$\nu_{\delta_n}(E) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} h[d(F_i^n)] < \lambda + \varepsilon\,. \tag{4}$$

È facile vedere che, a causa della compattezza di Ω, della continuità di h e della (4), non è restrittivo supporre che i diametri degli insiemi F_i^n siano tutti positivi e che per ogni n si abbia:

$$\delta_n \geqslant d(F_1^n) \geqslant d(F_2^n) \geqslant \ldots \geqslant d(F_i^n) \geqslant \ldots\,. \tag{5}$$

Tenendo conto del teorema della scelta di Blaschke e di note tecniche di dimostrazione (cfr. [B], § 18; [R], § 6.1), si può affermare che esistono gli insiemi chiusi $F_1, F_2, \dots, F_i, \dots$ e una successione N di numeri naturali, tali che per ogni i la successione $\{F_i^n\}_n$ converga, quando n varia su N, all'insieme F_i nello spazio dei sottoinsiemi chiusi di Ω, reso metrico mediante la metrica di Hausdorff e inoltre si abbia:

$$\lim_{n \in N, n \to \infty} d(F_i^n) = d(F_i) \qquad (i = 1, 2, \dots) \tag{6}$$

$$\delta \geqslant d(F_1) \geqslant \dots \geqslant d(F_i) \geqslant \dots$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} h[d(F_i)] \leqslant \lambda + \varepsilon \tag{7}$$

Per semplicità di notazione supponiamo, senza ledere la generalità dell'enunciato, che N sia la successione di tutti i numeri naturali. Per la (7) gli insiemi F_i che hanno diametro uguale a δ possono essere al più un numero finito; se essi sono in numero di k, esiste un intero n_1 tale che si abbia per la (6):

$$\sum_{i=1}^{k} h[d(F_i^n)] > kh(\delta) - \varepsilon \qquad \textit{per ogni } n > n_1 . \tag{8}$$

Se nessuno degli insiemi F_i avesse diametro uguale a δ, la dimostrazione proseguirebbe in modo analogo ed in forma semplificata. Per la convergenza della serie $\sum h[d(F_i)]$ esiste un numero $\theta < \delta$ tale che si abbia: $d(F_{k+1}) < \theta$; esiste pure un intero n_2 tale che per ogni $n > n_2$ risulti $d(F_{k+1}^n) \leqslant \theta$ e perciò anche, per la (5):

$$d(F_i^n) \leqslant \theta < \delta \qquad i \geqslant k+1, \; n > n_2 . \tag{9}$$

Fissato $\sigma > 0$, sia $F_i(\sigma)$, $i = 1, \dots, k$, l'insieme chiuso dei punti di Ω che hanno distanza non maggiore di σ da qualche punto di F_i; esiste un intero n_3, che può essere preso maggiore di n_1 e di n_2, tale che si abbia:

$$F_i^n \subseteq F_i(\sigma) \qquad i = 1, \dots, k; \; n > n_3 \tag{10}$$

a causa della convergenza delle successioni $\{F_i^n\}_n$, $i = 1, \dots, k$ nella metrica di Hausdorff. Da (3) e (10) segue:

$$E \setminus \bigcup_{i=1}^{k} F_i(\sigma) \subseteq \bigcup_{i=k+1}^{\infty} F_i^n \qquad (n > n_3)$$

ed anche, per le (9), (4) e (8), sempre per $n > n_3$:

$$\nu_\theta\left(E\setminus\bigcup_{i=1}^{k} F_i(\sigma)\right) \leqslant \sum_{i=k+1}^{\infty} h[d(F_i^n)] =$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} h[d(F_i^n)] - \sum_{i=1}^{k} h[d(F_i^n)] < \lambda + \varepsilon - kh(\delta) + \varepsilon\,.$$

Sia $\{\sigma_j\}$ una successione numerica decrescente e convergente a zero; poniamo:

$$E_j = E\setminus\bigcup_{i=1}^{k} F_i(\sigma_j)$$

e applichiamo il Lemma 1:

$$\nu_\delta\left(E\setminus\bigcup_{i=1}^{k} F_i\right) \leqslant \lambda - kh(\delta) + 2\varepsilon\,.$$

Tenuto conto che è $d(F_i) = \delta$ $(i = 1, \ldots, k)$, si ha:

$$\nu_\delta(E) \leqslant \nu_\delta\left(E \cap \bigcup_{i=1}^{k} F_i\right) + \nu_\delta\left(E\setminus\bigcup_{i=1}^{k} F_i\right) \leqslant kh(\delta) + \lambda - kh(\delta) + 2\varepsilon = \lambda + 2\varepsilon$$

e, dovendo anche essere: $\nu_\delta(E) \geqslant \lambda$ a causa della monotonia di $\nu_\delta(E)$ considerata come funzione di δ, segue: $\nu_\delta(E) = \lambda$ come volevasi dimostrare.

LEMMA 3. *Sia E un insieme di uno spazio metrico compatto; sia $\varepsilon > 0$ ed esista una successione di insiemi chiusi $\{F_i\}$ tali che*:

$$E \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i\,; \qquad d(F_i) < \delta \qquad (i = 1, 2, \ldots) \tag{11}$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} h[d(F_i)] < \nu_\delta(E) + \varepsilon\,. \tag{12}$$

In tali ipotesi si ha:

$$\lim_{\theta\to\delta-} \nu_\theta(E) < \nu_\delta(E) + \varepsilon\,. \tag{13}$$

Per la (11) e la convergenza della serie $\sum h[d(F_i)]$ esiste un numero θ tale che per ogni i si abbia: $d(F_i) \leqslant \theta < \delta$; segue:

$$\nu_\theta(E) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} h[d(F_i)] < \nu_\delta(E) + \varepsilon\,.$$

Per la monotonia di $\nu_\theta(E)$, considerata come funzione di $\theta > 0$, dall'ultima relazione scritta segue la (13).

TEOREMA 4. *Sia E un insieme di uno spazio metrico compatto. Condizione necessaria e sufficiente perchè la funzione reale f definita nella* (1) *sia continua per $x = \delta$ è che per ogni $\varepsilon > 0$ esista una successione $\{F_i\}$ di insiemi chiusi per i quali siano verificate le* (11) *e* (12).

Se f è continua a sinistra, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $\theta < \delta$ tale che si abbia: $\nu_\theta(E) < \nu_\delta(E) + \varepsilon$ e pertanto, per la definizione stessa di $\nu_\theta(E)$, esiste una successione di insiemi chiusi verificante le (11) e (12). Il viceversa di questa affermazione è assicurato dal lemma 3. Un richiamo al teorema 2 completa la dimostrazione.

COROLLARIO 5. *Se la funzione f di cui al precedente enunciato è discontinua nel punto δ, se cioè esiste un numero $\varepsilon > 0$ tale che:*

$$\lim_{\theta \to \delta-} \nu_\delta(E) \geqslant \nu_\delta(E) + \varepsilon$$

allora ogni successione $\{F_i\}$ di insiemi chiusi tali che:

$$E \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i\,; \qquad d(F_i) \leqslant \delta \qquad (i = 1, 2, \ldots)$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} h[d(F_i)] < \nu_\delta(E) + \varepsilon$$

contiene almeno un insieme F_i di diametro uguale a δ.

TEOREMA 6. *Sia E un insieme di uno spazio metrico compatto; per ogni $\delta > 0$ esiste una famiglia finita (eventualmente vuota) di insiemi chiusi $F_1, \ldots, F_k$ con:*

$$(14) \qquad d(F_i) = d(E \cap F_i) = \delta\,; \qquad \nu_\delta(E \cap F_i) = h(\delta); \qquad (i = 1, \ldots, k)$$

$$(15) \qquad \nu_\delta(E) = \sum_{i=1}^{k} \nu_\delta(E \cap F_i) + \nu_\delta\Big(E \setminus \bigcup_{i=1}^{k} F_i\Big)$$

e tali che la funzione f così definita per ogni $x > 0$:

$$f_0(x) = \nu_x\Big(E \setminus \bigcup_{i=1}^{k} F_i\Big) \tag{16}$$

sia continua per $x = \delta$.

Per ogni numero naturale n esiste una successione $\{F_i^n\}_i$ di insiemi chiusi non vuoti tali che:

$$E \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i^n\,; \qquad d(F_i^n) \leqslant \delta \qquad (i = 1, 2, \ldots) \tag{17}$$

$$\nu_\delta(E) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} h[d(F_i^n)] < \nu_\delta(E) + \frac{1}{n}\,. \tag{18}$$

La dimostrazione può ora procedere seguendo lo schema di quella del teorema 2, con le varianti che occorre apportare per aver sostituito le (17) e (18) alle (3) e (4). Esiste pertanto l'intero k (eventualmente nullo), gli insiemi chiusi $F_1, \ldots, F_k$ di diametro δ e il numero $\theta < \delta$ tali che le successioni $\{F_i^n\}_n$ convergano nella metrica di Hausdorff agli insiemi F_i $(i = 1, \ldots, k)$ e, per ogni coppia di numeri positivi σ e ε si abbia:

$$\nu_\theta\Big[E \setminus \bigcup_{i=1}^{k} F_i(\sigma)\Big] \leqslant \nu_\delta(E) - kh(\delta) + \varepsilon\,. \tag{19}$$

Si osservi che, diversamente da quanto accade nella dimostrazione del teorema 2, gli insiemi F_i $(i = 1, \ldots, k)$ e il numero θ non dipendono da ε. Nella (19) passiamo al limite facendo tendere σ a zero su una particolare successione (cfr. [D]):

$$\nu_\theta\Big(E \setminus \bigcup_{i=1}^{k} F_i\Big) \leqslant \nu_\delta(E) - kh(\delta) + \varepsilon\,. \tag{20}$$

Si ha poi:

$$\nu_\delta(E) \leqslant \sum_{i=1}^{k} \nu_\delta(E \cap F_i) + \nu_\delta\Big(E \setminus \bigcup_{i=1}^{k} F_i\Big) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{k} \nu_\delta(E \cap F_i) + \nu_\theta\Big(E \setminus \bigcup_{i=1}^{k} F_i\Big) \leqslant \nu_\delta(E) + \varepsilon$$

e la (15) risulta dimostrata. Dalle precedenti disuguaglianze segue pure:

$$\nu_\theta\Big(E \setminus \bigcup_{i=1}^{k} F_i\Big) = \nu_\delta\Big(E \setminus \bigcup_{i=1}^{k} F_i\Big)$$

uguaglianza che, assieme al teorema 2, assicura la continuità della funzione f_0. Infine dalle (15) e (20) segue:

$$\sum_{i=1}^{k} \nu_\delta(E \cap F_i) \geqslant kh(\delta)$$

relazione che, assieme alle disuguaglianze:

$$\nu_\delta(E \cap F_i) \leqslant h[d(E \cap F_i)] \leqslant h[d(F_i)] = h(\delta) \qquad (i = 1, \ldots, k)$$

completa la dimostrazione delle (14).

TEOREMA 7. *Sia E un insieme di uno spazio metrico compatto; per ogni $\delta > 0$ esiste una famiglia finita (eventualmente vuota) di insiemi chiusi $F_1, \ldots, F_k$ con:*

$$d(F_i) = d(E \cap F_i) = \delta \qquad (i = 1, \ldots, k)$$

tali che posto per ogni $x > 0$:

$$f_i(x) = \nu_x(E \cap F_i) \qquad (i = 1, \ldots, k)$$

il salto della funzione f nel punto $x = \delta$ è maggiorato dalla somma dei salti delle funzioni f_i nello stesso punto.

Siano $F_1, \ldots, F_k$ gli insiemi di cui al teorema 6; per ogni $\theta < \delta$, dalla (15) e dalla disuguaglianza:

$$\nu_\theta(E) \leqslant \sum_{i=1}^{k} \nu_\theta(E \cap F_i) + \nu_\theta\Big(E \setminus \bigcup_{i=1}^{k} F_i\Big)$$

segue:

$$\nu_\theta(E) - \nu_\delta(E) \leqslant \sum_{i=1}^{k} [\nu_\theta(E \cap F_i) - \nu_\delta(E \cap F_i)] + \Big[\nu_\theta\Big(E \setminus \bigcup_{i=1}^{k} F_i\Big) - \nu_\delta\Big(E \setminus \bigcup_{i=1}^{k} F_i\Big)\Big]. \tag{21}$$

Questa disuguaglianza, assieme alla continuità della funzione f_0 definita dalla (16), dimostra il teorema.

Si possono costruire esempi per i quali nella (21) non vale il segno di uguaglianza; pertanto una discontinuità di f per $x = \delta$ comporta l'esistenza di sottoinsiemi di E di diametro δ per i quali vale la (15) ed ai quali sono associate analoghe funzioni discontinue per $x = \delta$, mentre il viceversa di questa affermazione è falso. Sempre per mezzo di esempi si può constatare che i suddetti sottoinsiemi di diametro δ non sono univocamente determinati.

Indichiamo ora in che modo questi risultati si possono estendere alla funzione g definita nella (2). Non vale un risultato analogo al teorema 2 perchè, come si vede con opportuni esempi, la funzione g può non essere continua a destra, come può non essere continua a sinistra. Vale tuttavia il seguente:

TEOREMA 8. *Detto E un insieme di uno spazio metrico compatto e dette f e g le funzioni definite dalle* (1) *e* (2), *valgono per ogni $\delta > 0$ le seguenti relazioni*:

$$f(\delta +) = g(\delta +) = f(\delta) \leqslant g(\delta) \leqslant f(\delta -) = g(\delta -)\,. \tag{22}$$

Per ogni $\eta > \delta$ si ha (cfr. [R], teorema 28):

$$f(\eta) \leqslant g(\eta) \leqslant f(\delta) \leqslant g(\delta)\,.$$

Segue:

$$f(\delta +) \leqslant g(\delta +) \leqslant f(\delta) \leqslant g(\delta)$$

e, tenuto conto del teorema 2, le prime tre relazioni scritte nella (22) risultano dimostrate.

Detti poi θ e ζ due numeri positivi con $\theta < \zeta < \delta$, dalle relazioni:

$$g(\delta) \leqslant f(\zeta) \leqslant g(\zeta) \leqslant f(\theta)$$

segue:

$$g(\delta) \leqslant f(\delta -) \leqslant g(\delta -) \leqslant f(\delta -)$$

e ciò completa la dimostrazione della (22).

Il teorema 8 consente di adattare il teorema 7 alla funzione g:

TEOREMA 9. *Sia E un insieme di uno spazio metrico compatto; per ogni $\delta > 0$ esiste una famiglia finita (eventualmente vuota) di in-*

siemi chiusi $F_1, \ldots, F_k$, *con*:

$$d(F_i) = d(E \cap F_i) = \delta \qquad (i = 1, \ldots, k)$$

tali che, posto per ogni $x > 0$:

$$g_i(x) = \mu_x(E \cap F_i) \qquad (i = 1, \ldots, k)$$

il salto della funzione g *nel punto* $x = \delta$ *è maggiorato dalla somma dei salti delle funzioni* g_i *nello stesso punto.*

BIBLIOGRAFIA

[B] W. Blaschke, *Kreis und Kugel*, Leipzig, 1916.
[D] R. O. Davies, *A property of Hausdorff measure*, Proc. Cambr. Phil. Soc., **52** (1956), pp. 30-34.
[F] H. Federer, *Geometric Measure Theory*, Springer, Berlin, 1969.
[R] C. A. Rogers, *Hausdorff measures*, Cambridge University Press, 1970.

Manoscritto pervenuto in redazione il 18 marzo 1982.