RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

GIOVANNI ZACHER

Sulle immagini dei sottogruppi normali nelle proiettività

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 67 (1982), p. 39-74

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1982__67__39_0>

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1982, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (http://rendiconti.math.unipd.it/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

REND. SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol. 67 (1982)

Sulle immagini dei sottogruppi normali nelle proiettività.

GIOVANNI ZACHER (*)

1. Chiamasi *proiettività* di un gruppo G su un gruppo $\bar{G}$ un isomorfismo del reticolo di tutti i sottogruppi di G su quello di $\bar{G}$.

È ben noto che un sottogruppo normale è un sottogruppo di Dedekind [24], che però l'immagine di un sottogruppo normale in una proiettività non è detto che sia neppure un sottogruppo quasinormale [22].

Un'analisi delle proprietà di una tale immagine è stata condotta, esplicitamente, nel caso dei gruppi finiti, per primo, da Suzuki [21], successivamente da Schmidt [16] e più recentemente da Menegazzo [6], [7] e da Busetto [3]. Schmidt, sfruttando i suoi risultati relativi ai sottogruppi di Dedekind nei gruppi finiti [13], [14] fornisce in [16] modulo la quasinormalità una precisa descrizione sulla immersione delle immagini dei sottogruppi normali nelle proiettività tra gruppi finiti, chiarendo con ciò la deviazione di tali immagini dalla quasi-normalità.

Nel presente lavoro siamo in grado di estendere la descrizione data da Schmidt in tutta generalità ai gruppi periodici e, con una ipotesi limitativa, ai gruppi non periodici.

Questo è stato reso possibile anzitutto in virtù di un recente risultato di Rips [11], e di cui abbiamo dato una nostra dimostrazione in [23], risultato che asserisce l'invarianza proiettiva della finitezza dell'indice di un sottogruppo in un gruppo, sia usufruendo dello studio fatto in [19] e [20] da Stonehewer dei sottogruppi di Dedekind nei gruppi infiniti, sia di un risultato di Busetto [3].

(*) Indirizzo dell'A.: Istituto di Algebra e Geometria, Università di Padova, Via Belzoni 7, 35100 Padova.

Il lavoro è suddiviso in 4 numeri. Nel n. 1 vengono anzitutto richiamati alcuni risultati da noi esposti in [23], indispensabili per il nostro studio; inoltre vengono dati diversi criteri di conservazione della normalità e della quasinormalità in una proiettività; di particolare interesse teorema A e teorema B. Nel n. 2 si determinano in relazione alla normalità e quasinormalità una serie di proprietà delle proiettività che conservano, anche solo parzialmente gli indici (2.1, teorema C) e vengono dati condizioni perchè ciò avvenga (2.6, 2.7, 2.10). Il n. 3 contiene i risultati principali del presente lavoro. Essi concernono principalmente, data una proiettività $\sigma\colon G \to \bar{G}$ ed un sottogruppo normale N di G con N^σ non quasi normale in $\bar{G}$, la struttura di G/N (teorema D), di $G/(\bar{N}_{\bar{G}})^{\sigma^{-1}}$ e di $\bar{G}/\bar{N}_{\bar{G}}$ (teorema E), confermando, in particolare, la validità del teorema 3.4 in [16] anche nei gruppi infiniti nel caso almeno di $\bar{N}/\bar{N}_{\bar{G}}$ periodico. Vengono inoltre messe in evidenza una serie di conseguenze interessanti (3.11, 3.12); fra l'altro, un criterio di non conservazione dell'ascendenza nelle proiettività (teorema F, 3.13). Nel n. 4 infine si fa, fra l'altro, vedere sotto quali circostanze il radicale di Hirsch-Plotkin (teorema G), quello di Gruenberg (4.9) e l'ipercentro (teorema H) di un gruppo si conservano nelle proiettività.

Notazioni e convenzioni terminologiche.

$N \lhd G$: N normale in G; $N \underset{q}{<} G$: N quasinormale in G; $N \underset{q}{\not<} G$: N non quasinormale in G; $N \underset{d}{<} G$: N sottogruppo di Dedekind in G; $N \underset{d}{\not<} G$: N non sottogruppo di Dedekind in G; $N \underset{a}{<} G$: N ascendente in G; $N \underset{a}{\not<} G$: N non ascendente in G; $H \lessdot G$: H sottogruppo massimo di G; $|g|$: ordine di un elemento; p-elemento: elemento di periodo una potenza del primo p; $Z(p^\alpha)$: gruppo ciclico di ordine p^α, se α finito, il p-gruppo iperciclico se $\alpha = \infty$; Norm G: la norma di G; $Z_i(G)$: i-esimo termine della serie centrale ascendente; $Z_\infty(G)$: l'ipercentro di G; $\mathfrak{T}(G)$: il sottogruppo generato dai sottogruppi normali periodici; gruppo misto: gruppo che contiene elementi di periodo non finito; gruppo separato: gli elementi periodici formano un sottogruppo; prodotto diretto di gruppi: prodotto diretto discreto (non cartesiano); H fattore di Hall di G: $G = H \times K$ con G periodico ed ogni elemento di H ha periodo relativamente primo con quello di un qualunque elemento di K; gruppo Hölderiano: gruppo periodico a sottogruppo di Sylow d'ordine primo; $\exp H$: esponente di H; elementi indipendenti a, b: $\langle a\rangle \wedge \langle b\rangle = \{1\}$ e $|a| = |b| = 0$; G è un S-

gruppo: $G = P \times T$ ove P è un P-gruppo (1) ed un fattore di Hall di G; P sarà detto un S-fattore di G; H iperciclicamente immerso in G: H è contenuto in un termine di una serie ascendente di sottogruppi normali a fattori ciclici; $H^g = g^{-1}Hg$; $H_G = \bigwedge_{g \in G} H^g$; $H^G = \bigvee_{g \in G} H^g$; $P(G)$: il gruppo delle autoproiettività di G; $[H/K]$: intervallo di estremi H e K; $H \underset{L}{<} G$: H è L-invariante in G ossia invariante per ogni autoproiettività di G. Sia $\sigma: G \to \bar{G}$ una proiettività (sottinteso G, $\bar{G}$ gruppi); se $H \leq G$ invece di H^σ scriveremo anche $\bar{H}$; inoltre per ogni $\bar{g} \in \bar{G}$ poniamo $H^{\bar{g}} = H^{\sigma \bar{g} \sigma^{-1}}$, $H_{\bar{G}} = \bigwedge_{\bar{g} \in \bar{G}} H^{\bar{g}}$, $H^{\bar{G}} = \bigvee_{\bar{g} \in \bar{G}} H^{\bar{g}}$.

1. Incominciamo con il richiamare due proposizioni delle quali si trova una dimostrazione in [23].

1.1 Lemma. *Sia $\sigma: G \to \bar{G}$ una proiettività ed N un sottogruppo normale e d'indice primo in G. Allora l'indice di $\bar{N}$ in $\bar{G}$ è pure un numero primo.*

1.2 Teorema. *Sia $\sigma: G \to \bar{G}$ una proiettività e sia $H \leq K \leq G$. Allora l'indice $[K:H]$ è finito se e solo se tale è quello $[\bar{K}:\bar{H}]$.*

Sia n un numero naturale o infinito con $2 \leq n$ e p un numero primo; seguendo la notazione introdotta da Schmidt in [17], $P(n, p)$ è la classe gruppale così definita: $G \in P(n, p)$ se e solo se G è un p-gruppo abeliano elementare d'ordine p^n oppure un gruppo $G = \langle A, t \rangle$, con A un p-gruppo abeliano elementare d'ordine p^{n-1}, t un elemento d'ordine primo q e $t^{-1}at = a^r$, r un intero non dipendente da $a \in A$ e tale che $r^q \equiv 1 \bmod p$, mentre $r \not\equiv 1 \bmod p$.

$P(n, p)$ è una classe proiettivamente invariante [22] e due qualunque suoi sottogruppi sono tra loro proiettivi. Useremo anche dire che G è un P-gruppo relativo al numero primo p se e solo se $G \in P(*, p)$ con $*$ un naturale o ∞. Ciò premesso passiamo a generalizzare il lemma 2 di [23]; esso ci sarà utile molto spesso nel seguito.

1.3 Lemma. *Sia $\sigma: G \to \bar{G}$ una proiettività, $N \lhd G$, G/N un gruppo d'ordine primo o un P-gruppo ed $\bar{N} \ntriangleleft \bar{G}$. Allora sono verificati i seguenti fatti:*

i) *$N_{\bar{G}} \lhd G$ (e questo succede ovviamente anche se $\bar{N} \lhd \bar{G}$),*

ii) *se $[G:N] = r$, un primo, $G/N_{\bar{G}}$ e $\bar{G}/\bar{N}_{\bar{G}}$ appartengono alla medesima classe $P(2, p)$, ove $p = [N:N_{\bar{G}}] = [\bar{G}:\bar{N}] \geq r$; se $G/N \in P(n, p)$*

(1) Per la definizione vedasi sotto.

allora $G/N_{\bar{G}}$ *e* $\bar{G}/\bar{N}_{\bar{G}}$ *appartengono alla medesima classe* $P(n+1, p)$ *ove ancora* $p = [N:N_{\bar{G}}]$. *È* $N_{\bar{G}} = N_{\bar{H}}$ *per un qualunque* H *con* $N < H \leq G$,

iii) $\bar{G}/\bar{N}_{\bar{G}}$ *non è abeliano e si ha* $[\bar{N}:\bar{N}_{\bar{G}}] = q < p$,

iv) *posto* $T = \bigwedge_{\tau \in P(G)} N^{\tau}$, T *è* L*-invariante e si ha* $G/T \in P(*, p)$,

v) *considerato l'insieme non vuoto* $\mathcal{F} = \{X \lhd G | G/X \in P(*, p)$ *per qualche naturale* $*\}$, *si ponga* $K_p = \bigwedge_{X \in \mathcal{F}} X$. *Allora* K_p *è* L*-invariante,* $G/K_p \in P(m, p)$ *ove* $n \leq m \leq \infty$. *Se* G/Y *è abeliano per un* $Y \in \mathcal{F}$, *allora tale è* G/K_p.

Dim. Se $[G:N] = r$, un primo, è $\bar{N} \underset{d}{<} \bar{G}$ e poichè $[\bar{G}:\bar{N}] < \infty$ (1.1), per [13] concludiamo che $[\bar{G}:\bar{N}] = p$ è un primo e che $\bar{G}/\bar{N}_{\bar{G}} \in P(2, p)$ se $\bar{N} \ntriangleleft \bar{G}$, per cui l'intervallo $[G/N_{\bar{G}}]$ contiene oltre N due gruppi H_1, H_2 tali da aversi $N = N \wedge H_1 = N \wedge H_2$, $H_1 \vee H_2 = G$, per cui $N_{\bar{G}} \lhd G$ e dunque $G/N_{\bar{G}} \in P(2, p)$ ove $r \leq p$ visto che $N \lhd G$.

Se $G/N \in P(n, p)$, esistono sottogruppi $M \lhd \cdot G$, $N \lhd N_i$ con $M \wedge N_i = N$ e $\bigvee_i N_i = G$. Da $(M_{\bar{G}} \wedge N)^{\sigma} = \bar{M}_{\bar{G}} \wedge \bar{N}_i \lhd \bigvee_i \bar{N}_i = \bar{G}$ e $\bar{N}_{\bar{G}} \leq \bar{M}_{\bar{G}} \wedge \bar{N} \leq \bar{N}$ segue $\bar{N}_{\bar{G}} = \bar{M}_{\bar{G}} \wedge \bar{N} < \bar{N}$ e così pure $N_{\bar{G}} = M_{\bar{G}} \wedge N \lhd G$ e $N_{\bar{G}} \lessdot N$ visto che $M_{\bar{G}} \lessdot M$. Per semplicità potremo ora supporre $N_{\bar{G}} = \{1\}$. Tenuto presente che da $G/N \in P(n, p)$ segue $\bar{N} \lhd \bar{G}$ non appena $\bar{N} \underset{\iota_G}{<} \bar{G}$ e che $[G/N]$ è un reticolo irriducibile, usando th. 3.4 in [16] non è difficile concludere che G e $\bar{G}$ appartengono a $P(n+1, p)$ se n è finito e che $\bar{N}_{\bar{H}} = \{1\}$ per ogni $\bar{N} < \bar{H}$. Se poi n è infinito, l'analogo risultato si raggiunge considerando ad es. in G/N un sistema locale di P-gruppi finiti. La iii) è conseguenza di $\bar{N} \ntriangleleft \bar{G}$, iv) posto $R = N_{\bar{G}}$ è, per i) e ii) $G/R \in P(*, p)$ e scelto $\tau \in P(G)$ risulta $(R^{\tau})_G = R^{\tau} \wedge R^{\tau g} = R^{\tau} \wedge R^{\tau_1}$, $\tau, \tau_1 \in P(G)$ per quanto visto in ii); pertanto $T = \bigwedge_{\tau} (R^{\tau})_G$ e poichè per ii) è $G/(R^{\tau})_G \in P(*, p)$, si conclude che G/T è un gruppo periodico metabeliano, in particolare un gruppo localmente finito a p-Sylow gruppo normale e abeliano elementare. T e così $\bar{T}$ sono L-invarianti per cui σ induce una proiettività tra i gruppi G/T e $\bar{G}/\bar{T}$; essendo $N_{\bar{G}} \geq T$, σ presenta una singolarità a p su G/T; da qui e dalla teoria delle proiettività singolari [22], non è difficile concludere che G/T è un S-gruppo e in definitiva un P-gruppo relativo a p. v) se $X \in \mathcal{F}$ e $\tau \in P(G)$, per i) e ii) si ha $(X^{\tau})_G \in \mathcal{F}$ e $(X^{\tau})_G = X^{\tau} \wedge X^{\tau_1}$ per cui K_p è L-invariante e G/K_p è un gruppo localmente finito a p-Sylow gruppo normale e abeliano elementare e su esso σ ha una singolarità. Da qui, come in iv), si conclude che G/K_p è un

P-gruppo relativo al primo p. Essendo G/K_p un P-gruppo, esiste poi un $K_p \leq Y \lhd G$, $Y \in \mathcal{F}$ con G/Y abeliano se e solo se tale è G/K_p. //

1.4 Proposizione. *Sia $N \lhd G$, $[G:N] = r$, un primo e $P(G)$ il gruppo delle autoproiettività di G. Allora il gruppo $G/\bigwedge_{\tau \in P(G)} N^\tau$ soddisfa ad una delle seguenti condizioni:*

i) *è un P-gruppo relativo ad un primo p, con $r \leq p$; è $r = p$ se e solo se il gruppo è abeliano,*

ii) *è un gruppo i cui sottogruppi finitamente generati sono ciclici Hölderiani,*

iii) *è un gruppo abeliano senza torsione di rango 1 e residualmente finito.*

Dim. Vedasi [23].

Data una proiettività $\sigma: G \to \bar{G}$ ed $N \lhd G$, vogliamo ora mettere in evidenza alcune condizioni su G/N atte a garantire la normalità o per lo meno la quasi-normalità di $\bar{N}$ in $\bar{G}$. All'uopo, per $N \lhd G$, diremo che G/N appartiene alla classe gruppale Ω se e solo se per una qualunque proiettività $\sigma: G \to \bar{G}$ risulta $\bar{N} \lhd \bar{G}$. Raccogliamo in una proposizione alcune proprietà elementari della classe Ω.

1.5. Proposizione. i) *$X \in \Omega$ se e solo se esiste una famiglia $\{H_i\}_i$ di sottogruppi di X tale che $H_i \in \Omega$ e $\bigvee_i H_i = X$;* ii) *Ω è una classe residualmente chiusa;* iii) *sia Λ una classe di gruppi tale che da $G \in \mathfrak{G}$, la classe dei gruppi finitamente generati, $N \lhd G$, $G/N \in \Lambda$ e $\sigma: G \to \bar{G}$ una proiettività, segua $\bar{N} \lhd \bar{G}$; allora $\Lambda \cap \mathfrak{G} \subseteq \Omega$* iv) *sia Λ una classe proiettivamente invariante e $\Lambda \subseteq \Omega$; allora da $N \lhd G$ e $G/N \in \Lambda$, posto $T = \bigwedge_{\tau \in P(G)} N^\tau$, T è L-invariante e G/T è residualmente Λ-gruppo.*

Dim. i), ii) e iv) sono di facile verifica; iii) sia $G/N \in \Lambda \cap \mathfrak{G}$; sarà $G = \langle u_1, u_2, \ldots, u_n, N \rangle$ e scelto $x \in N$, posto $H = \langle u_1, u_2, \ldots, u_n \rangle$, $H_x = \langle u_1, \ldots, u_n, x \rangle$, $N_x = N \wedge H_x$, si avrà $N_x \lhd H_x$ e $\bigvee_x N_x = N$. Ora da $G = H_x N$ segue $H_x/H_x \wedge N \simeq G/N \in \Lambda$; ma $H_x \in \mathfrak{G}$ per cui, per ipotesi, sarà $(H_x \wedge N)^\sigma = \bar{N}_x \lhd \bar{H}_x$ e così $\bar{H} \leq \mathcal{N}(\bar{N})$ per cui $\bar{N} \lhd \bar{H} \vee \bar{N} = \bar{G}$. //

Osservazione 1. Seguendo la notazione in [12], per la classe Ω si ha, in particolare, $\{L, R, N\}\Omega = \Omega$. Possiamo così affermare che Ω contiene i gruppi generati da gruppi quadrinomi (1.3) come pure i gruppi generati da elementi aperiodici, in particolare, dunque, i gruppi

localmente nilpotenti misti, se teniamo presente la seguente proposizione già provata in [23] quale conseguenza di 1.1.

1.6 PROPOSIZIONE. *Sia* $\sigma\colon G \to \bar{G}$ *una proiettività,* $N \lhd G$ *e* G/N *ciclico infinito. Allora* $\bar{N} \lhd \bar{G}$.

1.7 PROPOSIZIONE. *Sia* $\sigma\colon G \to \bar{G}$ *una proiettività ed* $N \lhd G$. *Allora* $\bar{N} \lhd \bar{G}$ *se è soddisfatta una delle seguenti condizioni:*

i) N *è un gruppo perfetto,*

ii) N *è privo di sottogruppi d'indice finito,*

iii) G/N *è un gruppo perfetto finito.*

DIM. Sia $\bar{g} \in \bar{G}$ che non normalizza $\bar{N}$. Per 1.6 è $[\langle \bar{g}, \bar{N}\rangle : \bar{N}] < \infty$ per cui $[\bar{N} : \bar{N}^{\bar{g}} \wedge \bar{N}] < \infty$; così per 1.2 sarà $[N : N \wedge N^{\bar{g}}] < \infty$ ed è pure $N \wedge N^{\bar{g}} \underset{d}{<} N$; ciò porta ad una contraddizione [13] alle ipotesi i) e ii). iii) per 1.2 è $[\bar{G} : \bar{N}] < \infty$ e da $\bar{N} \ntriangleleft \bar{G}$ segue che esiste un $\bar{N} < \bar{M} \underset{d}{<} \bar{G}$ e così $N < M \underset{d}{<} G$ e dunque $G'' \leq M$ [13]. //

Se $\sigma\colon G \to \bar{G}$ è una proiettività e se $N \lhd G$ con G/N un p-gruppo abeliano elementare non ciclico, allora per ogni $\bar{g} \in \bar{G}$ si ha $N^{\bar{g}} \lhd G$ e G/N è isomorfo a $G/N^{\bar{g}}$: ciò discende da 1.3 v). Vogliamo un pò generalizzare tale risultato; all'uopo incominciamo da una semplice constatazione, del resto già usata nel provare 1.3. Il gruppo G contenga quattro sottogruppi N, H, H_1, H_2 soddisfacenti alle condizioni $H \wedge H_i = N$, $H_1 \vee H_2 = G$. Allora per ogni $\tau \in P(G)$ tale che $H^\tau = H$ risulta $N^\tau \lhd G$ se $H \lhd G$.

Nei p-gruppi abeliani finiti non ciclici si riscontra una situazione quale qui considerata; la sfrutteremo per provare

1.8 PROPOSIZIONE. *Dato il gruppo* G, *sia* $N \lhd G$ *e* G/N *un* p-*gruppo abeliano tale che* $G/N = \langle a, N\rangle/N \times H/N$ *ed* $\exp H/N| \,|aN|$. *Se* $\sigma\colon G \to \bar{G}$ *è una proiettività, allora per ogni* $\bar{h} \in \bar{H}$ *risulta* $N^{\bar{h}} \lhd G$.

DIM. Se $x \in H$ è $\langle ax, N\rangle \wedge H = N$ per cui $N^{\bar{h}} = \langle ax, N\rangle^{\bar{h}} \wedge H^{\bar{h}} = \langle ax, N\rangle^{\bar{h}} \wedge H \lhd \langle ax, N\rangle^{\bar{h}}$; pertanto $N^{\bar{h}} \lhd \bigvee_{x \in H} \langle ax, N\rangle^{\bar{h}} \geq \langle a, ax | x \in H\rangle^{\bar{h}} = G^{\bar{h}} = G$. //

1.9 COROLLARIO. *Sia* $\sigma\colon G \to \bar{G}$ *una proiettività,* $N \lhd G$ *e* G/N *un* p-*gruppo abeliano.* i) *Se per ogni elemento* bN *esiste uno* aN *di uguale ordine e con* $\langle a, N\rangle \wedge \langle b, N\rangle = N$, *allora per ogni* $\bar{g} \in \bar{G}$ *è* $N^{\bar{g}} \lhd G$. ii) *Se* G/N *è un* p-*gruppo prodotto diretto di gruppi ciclici con gli ordini non*

superiormente limitati, oppure se G/N è un p-gruppo abeliano che contiene almeno due sottogruppi quasi-ciclici ad intersezione identica, allora $\bar{N} \lhd \bar{G}$.

DIM. i) Posto $\langle g \rangle^\sigma = \langle \bar{g} \rangle$, esiste in G/N una famiglia $\{K_i/N\}_i$ di sottogruppi che genera G/N e tale che $K_i/N = \langle a_i, N \rangle / N \times H_i/N$, $gN \in H_i/N$ ed $\exp H_i/N \mid |a_i N|$; per 1.8 sarà $N^{\bar{g}} \lhd K_i$ e così $N^{\bar{g}} \lhd \bigvee_i K_i = G$.
ii) Da i) segue che $N^{\bar{g}} \lhd G$ per ogni $\bar{g} \in \bar{G}$; così $G/N^{\bar{g}}$ sarà un p-gruppo localmente finito modulare di esponente infinito e dunque abeliano [22]. Pertanto $G/N_{\bar{G}}$ e così pure $\bar{G}/\bar{N}_{\bar{G}}$ è abeliano; ma allora $\bar{N} \lhd \bar{G}$. //

1.10 PROPOSIZIONE. *Sia $N \underset{d}{\leq} G$ e l'intervallo $[G/N]$ sia un reticolo di Tarski vale a dire immagine proiettiva di un gruppo infinito in cui tutti i sottogruppi non banali sono sia massimi che minimi. Se per ogni $X \leq G$, da $N \lessdot X < G$ segue $[X:N] < \infty$ allora $N \lhd G$.*

DIM. Per assurdo sia $N \ntriangleleft G$. Sia $X \in [G/N]$, $X \neq N, G$; sarà $X \underset{d}{\lessdot} G$ e $[X:N]$ un primo [13]; inoltre da $[G:X] < \infty$ segue $[G:N] < \infty$ e così $\big|[G/N]\big| < \infty$ una contraddizione. Dunque è pure $[G:X] = \infty$. Da $[X:N]$ un primo e $N \underset{d}{\lessdot} X$, segue che $N' \leq N_X$ [13] e al variare di X in $[G/N]$ con $X \neq G$ si ha $N_G = \bigwedge_X N_X \geq N'$ per cui N/N_G è abeliano e così $X''' \leq N_G$ per cui X/N_G è un $\mathfrak{X}$-gruppo [20]. Per th. B in [20] è G/X_G un gruppo di Tarski. Se ora per un $X_1 \neq X$ fosse $X_{1_G} \neq X_G$, sarebbe $G = X_G X_{1_G}/X_G \simeq X_{1_G}/X_G \wedge X_{1_G}$ una contraddizione al fatto che $N_G \leq X_G \wedge X_{1_G}$ e X_1/N_G gruppo risolubile. Pertanto da $N = X \wedge X_1$ segue $N_G = X_G$; ma è pure $N_G \leq N \lessdot X$ e $X_G \lessdot X$ per cui da $X_G = N_G \leq N \lessdot X$ segue $N = X_G \lhd G$, una contraddizione. //

Per 1.1 e 1.10 è dunque proiettivamente invariante la classe dei gruppi privi di fattori di Tarski.

TEOREMA A. *Sia $\sigma: G \to \bar{G}$ una proiettività, $N \lhd G$ e G/N gruppo semplice non abeliano. Allora $\bar{N} \lhd \bar{G}$.*

DIM. Distinguiamo 3 casi.

a) G/N gruppo misto.

G/N è generato da elementi aperiodici e si conclude in base all'osserv. 1.

b) G/N è periodico ed esiste un $N < H < G$ con H/N ciclico d'ordine p^2, p un primo.

In virtù di 1.2, per un $g \in G$ è $\overline{H^g}/\overline{N}_{\overline{H^g}}$ un gruppo finito e per il lemma 3 in [13] sarà $\overline{N} \underset{q}{<} \overline{H^g}$ e così se $N \lessdot L \lessdot H$ sarà $\overline{N} \lhd \overline{L^g}$; ora $L^G = G$ per cui $\overline{N} \lhd \overline{G}$.

c) G/N è periodico a Sylow gruppi tutti di esponente primo

Sia r il minimo degli ordini degli elementi non identici di G/N. Se per ogni elemento xN di ordine r risulta $\overline{N} \lhd \langle N, x\rangle^\sigma$, da $\langle x, N\rangle^G = G$ si conclude $\overline{N} \lhd \overline{G}$. Per ipotesi assurda supponiamo che per un zN d'ordine r sia $\overline{N} \ntriangleleft \langle z, N\rangle^\sigma = \overline{H}$; sarà $\overline{N}^{\overline{H}} = \overline{H}$, per cui $\overline{H} \underset{d}{<} \overline{G}$ e così $H^g \underset{d}{<} G$ per ogni $g \in G$. Sia ora yN un qualunque elemento d'ordine primo, diciamo p, distinto da zN e si ponga $K = \langle y, N\rangle$. Sarà $H^g \leqslant \lessdot H^g \vee K$ se $K \neq H^g$ per cui se $[H^g \vee K : H^g] = \infty$ sarà $H^g \vee K/N$ un gruppo di Tarski (cf. th. B in [20]) e dunque tale è $H \vee K^{-1}/N$; pertanto $\overline{N} \lhd (H \vee K^{g-1})^\sigma$ in virtù di 1.1 e 1.10 e così $\overline{N} \lhd \overline{H}$ una contraddizione. Pertanto $H^g \vee K/N$ è un gruppo d'ordine rp, $r \leq p$, per cui $\mathcal{N}(K) \geq H^g$; da qui $\mathcal{N}(K) \geq \bigvee_g H^g = G$ contro la semplicità di G/N. //

Ci sarà utile un lemma che adatta quello 2.3 in [20] alla nostra situazione.

1.11 Lemma. *Sia σ: $G \to \overline{G}$ una proiettività, $N \underset{g}{<} G$, $K = \langle x\rangle$ un gruppo infinito e $K \wedge N = \{1\}$. Allora per ogni $\overline{g} \in \overline{G}$ è $K^{\overline{g}} \wedge N = \{1\}$.*

Dim. Sia $\langle \overline{x}\rangle = \langle x\rangle^\sigma$ e per un $\overline{g} \in \overline{G}$ sia $\overline{N}^{\overline{g}} \wedge \overline{K} = \langle \overline{x}^n\rangle$ con $n > 0$; da $[\langle \overline{N}, \overline{x}^n\rangle/\overline{N}] \simeq [\langle \overline{x}^n\rangle/\{1\}]$ e $\langle \overline{N}, \overline{x}^n\rangle \leq \overline{N} \vee \overline{N}^{\overline{g}} \leq \langle \overline{N}, \overline{g}\rangle$ segue che $\infty = |[\langle \overline{N}, \overline{g}\rangle/\overline{N}]| = |[\langle \overline{g}\rangle/\overline{N} \wedge \langle \overline{g}\rangle]|$ per cui $|\overline{g}| = 0$ e $\langle \overline{g}\rangle \wedge \overline{N} = \{1\}$; ma allora per 1.6 è $\overline{N}^{\overline{g}} = \overline{N}$ per cui $\overline{N}^{\overline{g}} \wedge \overline{K} = \{1\}$, una contraddizione È dunque per ogni $\overline{g} \in \overline{G}$, $\overline{N} \wedge \overline{K}^{\overline{g}} = \{1\}$, ossia $N \wedge K^{\overline{g}} = \{1\}$. //

A partire da un $H \leq G$ definiamo il seguente sottogruppo $a(H)$ di G mediante la posizione: $a(H) = \langle x \in G \,|\, [\langle x\rangle : H \wedge \langle x\rangle] = \infty\rangle$.

1.12 Proposizione. *In un gruppo G valgono i seguenti fatti:*

i) *se $M \underset{d}{\leq} G$, se M è periodico e se $a(M) \neq \{1\}$ allora $M \trianglelefteq a(M) \trianglelefteq G$ e $M \underset{q}{<} G$,*

ii) *$\langle X \lhd G \,|\, X$ periodico$\rangle = \langle X \underset{q}{<} G \,|\, X$ periodico$\rangle = \langle X \underset{d}{<} G \,|\, X$ periodico$\rangle$.*

Dim. i) Se $|g| = 0$, poichè $M \vee M^g$ è periodico si ha: $M = M \vee (M \vee M^g \wedge \langle g\rangle) = \langle M, g\rangle \wedge (M \vee M^g)$ per cui $g \in \mathcal{N}(M)$; se poi $m \in M$, da $[\langle g\rangle/\{1\}] \simeq [\langle g, M\rangle/M] = [\langle gm, M\rangle/M] \simeq [\langle gm\rangle/\langle gm\rangle \wedge M]$ segue $|gm| = 0$ per cui $m \in \langle g, gm\rangle \leq a(M)$ e dunque $M \lhd a(M) \lhd G$; così

$M \lhd^2 G$ ed essendo $M \underset{d}{\leq} G$ è $M \underset{q}{<} G$ (cf. ad es. 1.7 in [20]). ii) Si tenga presente che sottogruppi di Dedekind periodici generano sottogruppi di Dedekind periodici. //

Da 1.12 segue facilmente il noto fatto [10] che $\mathfrak{I}^\sigma(G) = \mathfrak{I}(G^\sigma)$ per ogni proiettività σ.

TEOREMA B. *Sia* $\sigma\colon G \to \bar{G}$ *una proiettività,* $N \underset{q}{<} G$ *e* $a(N) \neq \{1\}$. *Allora sono verificati i seguenti fatti*:

i) $\bar{N} \lhd (a(N))^\sigma = a(N^\sigma) \lhd \bar{G}$ *e* $\bar{N} \underset{q}{<} \bar{G}$,

ii) *per ogni* $\bar{g} \in \bar{G}$, $NN^{\bar{g}}/N$, $N/N \wedge N^{\bar{g}}$, $\bar{N}\bar{N}^{\bar{g}}/\bar{N}$, $\bar{N}/\bar{N} \wedge \bar{N}^{\bar{g}}$ *sono gruppi ciclici finiti*; *inoltre* $NN^{\bar{g}} \lhd a(N)$, $\bar{N}\bar{N}^{\bar{g}} \lhd a(\bar{N})$.

DIM. i) È chiaro che $(a(N))^\sigma = a(N^\sigma)$; è poi $\bar{N} \lhd a(N^\sigma) \lhd \bar{G}$ in virtù di 2.1 in [18], osservazione 1, 1,12 e 1.11. ii) Segue facilmente da 1.6 ed i). //

OSSERVAZIONE 2. Dal teorema B si vede che l'eventualità che in una proiettività $\sigma\colon G \to \bar{G}$ l'immagine $\bar{N}$ di un $N \underset{q}{<} G$ non sia tale in $\bar{G}$ può presentarsi solo se per ogni $g \in G$ sia $[\langle g \rangle\colon N \wedge \langle g \rangle] < \infty$ vale a dire che l'intervallo $[G/N]$ è periodico. Il problema di vedere sotto quali condizioni da $N \underset{q}{<} G$ segue $\bar{N} \underset{q}{<} G$ è così ricondotto alla situazione di $[G/N]$ intervallo periodico. Poichè $\bar{N} \underset{q}{<} \bar{G}$ se e solo se $\bar{N} \underset{q}{<} \langle N, g \rangle^\sigma$ per ogni $g \in G$ tale che $[\langle g, N \rangle/N]$ sia una catena e ricordando che per 1.2 e [13] è $\bar{N} \underset{q}{<} \langle N, g \rangle^\sigma$ non appena $[\langle N, g \rangle/N]$ è una catena di lunghezza diversa da 1 possiamo alla fine affermare che $\bar{N} \underset{q}{<} \bar{G}$ solo a patto che nell'intervallo periodico $[G/N]$ esistano atomi non inseriti in catene di lunghezza 2. Analizzeremo tale situazione nel prossimo numero e vedremo che è strettamente legata al fatto che σ conserva o meno certi indici, questione che sarà trattata ivi più in dettaglio.

2. Incominciamo con analizzare la seguente situazione:

$$G = \langle g, N \rangle\,, \quad N \lhd G\,, \quad [G\colon N] = r\,, \quad \text{un primo}\,,$$
$$\sigma\colon G \to \bar{G} \quad \text{una proiettività e} \quad \bar{N} \underset{q}{<} \bar{G}\,.$$

Da 1.3 sappiamo che $\bar{N} \underset{q}{<} \bar{G}$ se e solo se risulta $\sigma\colon G/N_{\bar{G}} \to \bar{G}/\bar{N}_{\bar{G}}$ ove $G/N_{\bar{G}}$ è un P-gruppo d'ordine rp, $r \leq p$ mentre $\bar{G}/\bar{N}_{\bar{G}}$ è un P-gruppo (non abeliano) d'ordine qp, $q < p$ ove $[N\colon N_{\bar{G}}] = p = [\bar{G}\colon \bar{N}]$, $[\bar{N}\colon \bar{N}_{\bar{G}}] = q$; in particolare σ *non conserva l'indice* $[N\colon N_{\bar{G}}]$.

Per inciso possiamo allora constatare che la quasi-normalità si

conserva nelle proiettività sui gruppi localmente nilpotenti e misti in quanto tale classe è proiettivamente invariante ed è priva di quozienti che siano P-gruppi non abeliani.

Guardando ancora al gruppo $G/N_{\bar{G}}$ sopra considerato possiamo affermare che vi esistono due sottogruppi d'ordine r: $\langle g, N_{\bar{G}}\rangle/N_{\bar{G}}$, $\langle a, N_{\bar{G}}\rangle/N_{\bar{G}}$ tra loro coniugati se $r < p$, (cosa che certamente si verifica se $r = 2$) con

$$q = [\langle g\rangle^{\sigma}:\langle g^r\rangle^{\sigma}] \neq [\langle a\rangle^{\sigma}:\langle a^r\rangle^{\sigma}] = p\ .$$

Sarà a questo punto conveniente stabilire la seguente nozione: Una proiettività σ: $G \to \bar{G}$ si dice che *conserva debolmente l'indice* r, r un primo, se e solo se è verificata la seguente condizione:

(*) per ogni x, y di G è $[\langle x\rangle^{\sigma}:\langle x^r\rangle^{\sigma}] = [\langle y\rangle^{\sigma}:\langle y^r\rangle^{\sigma}]$ non appena $\langle x^r\rangle < \langle x\rangle$, $\langle y^r\rangle < \langle y\rangle$.

Per quanto visto possiamo ora affermare:

2.1 Proposizione. *Sia* σ: $G \to \bar{G}$ *una proiettività ed* $N \lhd G$:

i) *se* σ *ristretto ad* N *conserva l'indice primo sotto* N (²), *allora* $\bar{N} \underset{q}{<} \bar{G}$,

ii) *se* $[G:N] = r$, *un primo e se* σ *conserva debolmente l'indice* r *allora* $\bar{N} \lhd \bar{G}$,

iii) *se* $[G:N] = 2$ *e* $G = \langle g, N\rangle$ *con* g *periodico allora* $\bar{N} \lhd \bar{G}$ *non appena la condizione* (*) *è soddisfatta per i 2-elementi di* G.

A complemento di quanto affermato in 2.1 ii) e iii) abbiamo la seguente

2.2 Proposizione. *Sia* σ: $G \to \bar{G}$ *una proiettività, sia* $N \leq G$ *con* $[G:N] = 2$. *Se esiste un elemento* g *d'ordine* 2^{α} *tale che* $G = \langle N, g\rangle$ *allora sono veri i seguenti fatti*: i) *se* $\alpha > 1$ *allora* $\bar{N} \lhd \bar{G}$, ii) *se* $\alpha = 1$ *e se* $\bar{N} \ntriangleleft \bar{G}$ *allora* G *è un* S*-gruppo*: $G = P \times T$ *con* $P, \bar{P}$ *in* $P(n, p)$, $2 < p$, P *contiene le involuzioni di* G, $\bar{P}$ *non è abeliano e* σ *non conserva gli ordini dei 2-gruppi.*

Dim. Se G non è un S-gruppo con P contenente le involuzioni, e questo è certo il caso se $\alpha > 1$, allora le ipotesi di 2.1 iii) sono soddisfatte (cf. Satz 1.6 in [17]), per cui $\bar{N} \lhd \bar{G}$. E la conclusione è ora facile. //

(²) Ossia da $[N:H] = p$ segue $[\bar{N}:\bar{H}] = p$.

2.3 COROLLARIO. *Sia* $\sigma: G \to \bar{G}$ *una proiettività che conserva debolmente l'indice per ogni primo* r. *Allora*: i) *da* $H \underset{q}{<} G$ *segue* $\bar{H} \underset{q}{<} \bar{G}$, ii) *da* $H \underset{a}{\leq} G$ *segue* $H^\sigma \underset{a}{\leq} \bar{G}$.

DIM. i) segue da 2.1 ii) e da quanto detto nell'osservazione 2. ii) Si osservi che $H \underset{q}{<} K$ implica $H \underset{a}{\leq} K$.

2.4 COROLLARIO. *Sia* $\sigma: G \to \bar{G}$ *una proiettività ed* $N \underset{q}{<} G$. *Se* $G = N \vee \langle x \in G | x$ *un 2-elemento*$\rangle$ *allora* $\bar{N} \underset{q}{<} \bar{G}$ *a meno che* G *non sia un S-gruppo, con P contenente involuzioni e* σ *non conservi i 2-gruppi.*

Seguendo la terminologia introdotta da Suzuki [22], una proiettività σ si dice che *conserva l'indice* se e solo se da $\langle a \rangle \leq \langle b \rangle \leq G$ segue $[\langle b \rangle : \langle a \rangle] = [\langle b \rangle^\sigma : \langle a \rangle^\sigma]$; σ si dice che *conserva strettamente l'indice* se e solo se da $H \leq K \leq G$ segue $[K:H] = [\bar{K}:\bar{H}]$. Volendo localizzare ad un particolare primo p tali nozioni diamo le seguenti definizioni. Sia p un primo e $\sigma: G \to \bar{G}$ una proiettività. Si dice che σ *conserva il p-indice* se e solo se da $\langle a \rangle \leq \langle b \rangle$ e $[\langle b \rangle : \langle a \rangle] = p$ segue $[\langle b \rangle^\sigma : \langle a \rangle^\sigma] = p$ e viceversa; si dice che σ è *p-regolare* se e solo se per ogni $H \lhd K \leq G$ e $[K:H] = p$ segue $\bar{H} \lhd \bar{K}$ e $[\bar{K}:\bar{H}] = p$ e viceversa.

2.5 PROPOSIZIONE. *Sia* $\sigma: G \to \bar{G}$ *una proiettività. Allora* σ *conserva il p-indice se e solo se* σ *è p-regolare.*

DIM. Supponiamo che σ conservi il p-indice; da $H \lhd \langle a, H \rangle = K$ e $[K:H] = p$ segue $\bar{H} \lhd \bar{K}$ per 2.1 ii); ora $[K:H] = [\langle a \rangle : \langle a^p \rangle] = [\langle a \rangle^\sigma : \langle a^p \rangle^\sigma] = [\bar{K}:\bar{H}]$. Il viceversa è ovvio. //

2.6 TEOREMA. *Sia* $\sigma: G \to \bar{G}$ *una proiettività. Sono allora equivalenti le seguenti affermazioni*: i) σ *conserva gli indici*, ii) σ *conserva strettamente gli indici*, iii) σ *è p-regolare per ogni primo p coinvolto in G*, iv) *da* $H \lhd K \leq G$ *e* $[K:H] = p$, *un primo, segue* $[\bar{K}:\bar{H}] = p$.

DIM. i) implica ii): sia $H \leq K \leq G$ e $[K:H] < \infty$; visto che $[K:H_K] < \infty$ e $[K:H] = [K:H_K]/[H:H_K]$ non sarà restrittivo supporre $H \lhd K$; sia $H = H_0 \lhd \cdot H_1 \lhd \cdot \ldots \lhd \cdot H_n = K$ una serie di composizione da H a K. Consideriamo H_i/H_{i-1}; se H_i/H_{i-1} è semplice non abeliano è $\bar{H}_{i-1} \lhd \bar{H}_i$ (1.7) e così $[\bar{H}_i : \bar{H}_{i-1}] = [H_i : H_{i-1}]$ [22]; se $[H_i : H_{i-1}] = p$, in virtù di 2.5 è pure $[\bar{H}_i : \bar{H}_{i-1}] = [H_i : H_{i-1}]$; in definitiva $[\bar{K}:\bar{H}] = [K:H]$. ii) implica iii): infatti ii) implica i) e i) implica iii) per 2.5; che poi iii) implichi iv) e iv) implichi i) è evidente. //

2.7 TEOREMA. *Sia* $\sigma\colon G \to \bar{G}$ *una proiettività ed* $N \underset{q}{<} G$. *Allora* σ *conserva gli indici su* G *se e solo se li conserva su* N *e sugli intervalli ciclici* $[\langle g\rangle N/N]$ *di* $[G/N]$.

DIM. La necessità è ovvia. Per la sufficienza, in virtù di 2.1 i) e 2.6 è intanto $\bar{N} \underset{q}{<} \bar{G}$. Sia ora $g \in G$; ora $X \mapsto X \wedge \langle g\rangle$ individua una proiettività, che conserva gli indici, di $[\langle g\rangle N/N]$ su $\langle g\rangle/N \wedge \langle g\rangle$ e $\bar{X} \mapsto \bar{X} \wedge \langle g\rangle^\sigma$ una di $[\langle g\rangle^\sigma \bar{N}/\bar{N}]$ su $\langle g\rangle^\sigma/\bar{N} \wedge \langle g\rangle^\sigma$; ne segue che per le ipotesi fatte σ conserva gli indici su ogni $\langle g\rangle$, tenuto presente che su $\langle g\rangle$ σ conserva il p-indice se per almeno un $H < K \leq \langle g\rangle$ e $[K:H] = p$ segue $[\bar{K}:\bar{H}] = p$. //

Vogliamo ora descrivere alcune situazioni in cui una proiettività conserva parzialmente od anche completamente gli indici.

2.8 PROPOSIZIONE. *Sia* $\sigma\colon G \to \bar{G}$ *una proiettività e* $\langle g\rangle \underset{q}{<} G$. i) *Se* $[G/\langle g\rangle]$ *è misto allora* σ *conserva gli indici su* $\langle g\rangle$. ii) *Se* $|g| = 0$ *e* p *un primo divisore dell'ordine di qualche elemento periodico di* G, *allora se* $\langle x\rangle \neq \langle x^p\rangle$, *risulta* $[\langle x\rangle^\sigma : \langle x^p\rangle^\sigma] = p$. iii) *Se* $[G/\langle g\rangle]$ *è misto e se* $|g| = 0$ *allora* σ *conserva gli indici su* G.

DIM. i) Sia $x \in G$, $|x| = 0$ e $\langle g\rangle \wedge \langle x\rangle = \{1\}$. Allora $C(g)$ contiene un elemento aperiodico y con $\langle y\rangle \wedge \langle g\rangle = \{1\}$ [18] e la conclusione si raggiunge usando proprietà note delle proiettività sui gruppi abeliani [22]. ii) Sia $|x| = p$, allora $\langle x, g\rangle$ e $\langle x, g\rangle^\sigma$ sono abeliani o diedrali e la conclusione si raggiunge come in i); se poi $\langle x\rangle \wedge \langle g\rangle \neq \{1\}$ poichè il p-indice si conserva su $\langle g\rangle$, ciò avverrà su $\langle x\rangle \wedge \langle g\rangle$ e dunque pure su $\langle x\rangle$. iii) Sia $x \in G \setminus \langle g\rangle$; se $|x| \neq 0$ si conclude usando ii); esiste $|x| = 0$ con $\langle x\rangle \wedge \langle g\rangle = \{1\}$, per i) σ conserva gli indici su $\langle g\rangle$ sul gruppo abeliano $\langle x^2\rangle \times \langle g\rangle$ e sul sottogruppo periodico di $\langle x, g\rangle/\langle x^2\rangle$; in conclusione σ conserva l'indice su $\langle x\rangle$ e su $\langle g\rangle$. Se poi $\langle x\rangle \wedge \langle g\rangle \neq \{1\}$ σ conserva gli indici su $\langle x\rangle \wedge \langle g\rangle$ e allora anche su $\langle x\rangle$. //

2.9 PROPOSIZIONE. *Sia* $H \underset{d}{\leq} G$, H *localmente finito ed esista un* g *di* G *di periodo infinito. Se* $\sigma\colon G \to \bar{G}$ *è una proiettività allora* σ *su* H *conserva gli indici.*

DIM. Non sarà restrittivo supporre $G = \langle g, H\rangle$; è $H \lhd G$ [20]. Usando la teoria della proiettività singolare sui gruppi localmente finiti [22], si avrà per H la fattorizzazione in sottogruppi di Hall, $H = P_1 \times \ldots \times P_i \times \ldots \times T$ ove P_i è un P-gruppo non abeliano mentre T contiene un sottogruppo normale N tale che T/N è abeliano a

componenti primarie gruppi elementari abeliani o localmente ciclici, con $\bar{N} \lhd \bar{H} \vee \langle g \rangle^\sigma = \bar{G}$, con σ che su N conserva gli indici mentre è singolare a p_i su $P_i \in P(n_i, p_i)$ e sulle componenti primarie di T/N. Sia S_i un p_i-Sylow di P_i; poichè $\langle P_i, g \rangle$ è generato da elementi aperiodici, sarà $\bar{S}_i \lhd \langle P_i, g \rangle^\sigma$, assurdo essendo $\bar{S}_i \ntriangleleft \bar{P}_i$. Così $i = 0$ e ragionando modulo N, consideriamo $\langle g, T_p \rangle = K$ ove T_p è una componente primaria di T. Se T_p è localmente ciclico, guardando il suo sottogruppo d'ordine p ed usando 2.8 si vede che σ non è singolare su T_p; se poi T_p è abeliano elementare, $\bar{T}_p$ è P-gruppo non abeliano e se $\bar{S}$ è il suo p-Sylow-gruppo è $\bar{S} \lhd \bar{K}$ e $S \lhd K$ e su K/S σ ha una singolarità sul gruppo ciclico d'ordine p in contrasto con quanto appena detto. In conclusione $H = N$, ossia σ conserva gli indici su H. //

2.10 Corollario. *Sia G un gruppo localmente policiclico per finito e σ: $G \to \bar{G}$ una proiettività.*

i) *Se G contiene 2 elementi (aperiodici) indipendenti allora σ conserva gli indici su G.*

ii) *Se G è misto allora per ogni primo p divisore dell'ordine di qualche elemento periodico di G risulta $[\langle x \rangle^\sigma : \langle x^p \rangle^\sigma] = p$ se $\langle x \rangle \neq \langle x^p \rangle$.*

Dim. i) Non sarà restrittivo supporre G policiclico per finito e per 2.9, 2.7 e 1.12 che $\mathfrak{T}(G)$ sia identico. G conterrà così un sottogruppo normale N abeliano massimale senza torsione. Se N è ciclico, G/N sarà misto e la conclusione si raggiunge usando 2.8 iii). Se no N è un gruppo abeliano libero finitamente generato e non ciclico; ciò basta per affermare che σ su N è indotto da un isomorfismo. Sia ora x un elemento di G con $\langle x \rangle \wedge N \neq \{1\}$; allora σ conserva gli indici su $\langle x \rangle \wedge N$ e dunque anche su x. Resta da esaminare il caso $\langle x \rangle \wedge N = \{1\}$. Se $|x| = 0$, posto $A = N^p$ è $\bar{A} \lhd \bar{N} \vee \langle x \rangle^\sigma = \bar{K}$; ora in K/A esiste un sottogruppo abeliano B/A misto e su esso σ conserva il p-indice; ma allora σ conserva il p-indice su $\langle x \rangle$. Infine possiamo supporre $|x| = p$. Posto $A = N^{p^2}$, è $\bar{A} \lhd \langle x, N \rangle^\sigma = \bar{K}$ per 2.1 i) e K/A è un p-gruppo finito non ciclico nè abeliano elementare per cui $\bar{K}/\bar{A}$ è un p-gruppo [22]. Da qui $[\langle x \rangle^\sigma : \{1\}] = p$. La i) risulta ora provata. ii) Sia x un p-elemento; se $\langle x \rangle \wedge \mathfrak{T}(G) \neq \{1\}$ si conclude per 2.9. Sia $N/\mathfrak{T}(G)$ un sottogruppo normale ciclico di $G/\mathfrak{T}(G)$; per 2.8 i), σ conserva il p-indice su $\langle x \rangle$, su $N/\mathfrak{T}(G)$ e quindi anche su ogni gruppo ciclico infinito di G. Infine se $|x| = 0$, considerato un fattore principale di composizione di $\langle x, \mathfrak{T}(G) \rangle = K$ contenuto in $\mathfrak{T}(G)$: B/A,

saranno $\bar{A}$ e $\bar{B}$ normali in $\bar{K}$, $\bar{B}/\bar{A}$ un p-gruppo abeliano elementare finito isomorfo a B/A, per cui ancora σ dovrà conservare il p-indice su $\langle x\rangle$. //

TEOREMA C. *Sia $\sigma\colon G \to \bar{G}$ una proiettività ed $N = N_0 > N_1 > \dots > N_i > \dots$ una catena discendente di sottogruppi normali di G con N_i/N_{i+1}, $i = 0, 1, 2, \dots$ gruppo localmente policiclico per finito. Se $\bar{N} \underset{q}{<} \bar{G}$ allora N/N_i è un gruppo periodico.*

DIM. Per l'osservazione 2 non sarà restrittivo supporre $[G:N] = r$, un primo. Se $\bar{N} \underset{q}{<} \bar{G}$ sarà per 1.3 $G/N_{\bar{G}}$ un P-gruppo d'ordine rp, $r \leq p$ mentre $\bar{G}/\bar{N}_{\bar{G}}$ è un P-gruppo d'ordine pq, $q < p$. Posto $N = \langle g, N_{\bar{G}}\rangle$, σ su $\langle g\rangle$ muta ogni p-indice in un q-indice; se $r < p$ allora esiste un $\bar{x} \in \bar{G}$ tale che $\langle g\rangle \neq \langle g\rangle^{\bar{x}} = \langle g_1\rangle$ e σ su $\langle g_1\rangle$ muta ogni r-indice in un q-indice; se $r = p$ allora esiste un sottogruppo $\langle g_1, N_{\bar{G}}\rangle/N_{\bar{G}}$ di $G/N_{\bar{G}}$ tale che σ su $\langle g_1\rangle$ conserva il p-indice. Ciò premesso, per induzione su i proviamo che N/N_i è periodico. Per $i = 0$ la cosa è banalmente vera. Sia ora $i > 0$ e sia N/N_{i-1} periodico ed N_{i-1}/N_i misto. Nè sarà restrittivo supporre $N_{\bar{G}} \geq N_1$. Sarà per il teorema B $\bar{N}_i \underset{q}{<} \bar{G}$. È $[\langle g\rangle : \langle g\rangle \wedge N_i] = \infty$; infatti altrimenti, essendo $N_1 \leq N_{\bar{G}}$ sarà $p \mid [\langle g\rangle : N_i \wedge \langle g\rangle]$ per cui per un certo m è $g^m \in N_0 \setminus N_i$ mentre $g^{mp} \in N_i$ per cui $\langle g^m\rangle^\sigma \leq \mathcal{N}(\bar{N}_i)$; posto $H = \langle g^m, x, N_i\rangle$ con $x \in N_{i-1}$ e $|xN_i| = 0$, sarà $\bar{N}_i \lhd \bar{H}$ ed ora per 2.10 σ su H/N_i conserva il p-indice, una contraddizione. Esiste così un intero l tale che $\langle g^l, N_i\rangle/N_i$ è un sottogruppo infinito di N_{i-1}/N_i e su esso σ muta il p-indice in q-indice.

Passiamo ad esaminare $[\langle g_1\rangle : \langle g_1\rangle \wedge N_i]$.

Se $r < p$, da $\langle g_1\rangle = \langle g\rangle^{\bar{x}}$ e $\langle g\rangle \wedge N_i = \{1\}$ segue (1.11) $\langle g_1\rangle \wedge N_i = \{1\}$. Così per un certo s, $\langle g^l, g_1^s, N_i\rangle/N_i$ è un sottogruppo di N_{i-1}/N_i e $\langle g^l, N_i\rangle \wedge \langle g_1^s, N_i\rangle = N_i$ perchè su $\langle g^l, N_i\rangle/N_i$ σ muta ogni r-indice in un q-indice e su $\langle g^l, N_i\rangle/N_i$ ogni p-indice pure in un q-indice. Ma ora per 2.10 i) σ conserva gli indici su N_{i-1}/N_i, una contraddizione. Se $r = p$ e $[\langle g_1\rangle : N_i \wedge \langle g_1\rangle] < \infty$, come sopra si vede che su $\langle g^l, N_i\rangle/N_i$ σ conserva il p-indice, una contraddizione. Di nuovo, dunque, è $|g^l N_i| = |g_1^s N_i| = 0$, $\langle g^l, N_i\rangle \wedge \langle g_1^s, N_i\rangle = N_i$ per cui ancora per 2.10 i) σ conserva gli indici su N_{i-1}/N_i. E quest'ultima contraddizione conclude la dimostrazione. //

3. In questo numero verranno stabiliti i risultati centrali del presente lavoro.

3.1 PROPOSIZIONE. *Sia $\sigma\colon G \to \bar{G}$ una proiettività, $N \underset{q}{<} G$ e G finitamente generato modulo N. Allora $[N^{\bar{G}}/N]$ soddisfa alla condizione massimale e minimale per i sottogruppi.*

DIM. È $\bar{N} \underset{d}{<} \bar{G}$ ed $\bar{N}$ è normalizzato da ogni elemento $\bar{g} \in \bar{G}$ con $[\langle\bar{g}\rangle : \bar{N} \wedge \langle\bar{g}\rangle] = \infty$ (1.6). In virtù di th. 1 in [20] è ora facile concludere. //

3.2 LEMMA. *Sia $\sigma\colon G \to \bar{G}$ una proiettività, $N \lhd G$ e G finitamente generato modulo N. Allora $N^{\bar{G}}/N$ è un gruppo finito.*

DIM. Se $\bar{N} \underset{q}{<} \bar{G}$ si ha $[\bar{N}^{\bar{G}} : \bar{N}] < \infty$ (cf. ad es. [2]) e dunque per 1.2 è $[N^{\bar{G}} : N] < \infty$; sia dunque $\bar{N} \underset{q}{<} \bar{G}$, per cui, in virtù di teorema A, G/N sarà un gruppo periodico.

Per 3.1, da $N \leq H \leq N^{\bar{G}}$ segue che $[H/N]$ soddisfa alla condizione massimale e minimale; in particolare H è finitamente generato monulo N. Posto $N^{\bar{G}} = G_1$, sia $N = N_0 \lhd N_1 \lhd \ldots \lhd N_n = G_1$ una serie di composizione da N a G_1; sarà $1 \leq n$.

Proviamo che $[\bar{N}^{\bar{G}_1} : \bar{N}] < \infty$.

In virtù di teorema A e 1.1 è $\bar{N} \lhd \bar{N}_1$ oppure $[\bar{N}_1 : \bar{N}]$ un primo, per cui, in ogni caso, $[\bar{N}^{\bar{N}_1} : \bar{N}] < \infty$. Sia ora $1 < i \leq n$; posto $\bar{T} = \bar{N}^{\bar{N}_{i-1}}$ supporremo $(\bar{T} : \bar{N}] < \infty$.

Distinguiamo due casi:

a) $\bar{N}_{i-1} \lhd \bar{N}_i$.

Risulta $\bar{T} \trianglelefteq \bar{N}_{i-1} \lhd \bar{N}_i$ e $\bar{T} \underset{d}{\leq} \bar{N}_i$ per cui $\bar{T} \underset{q}{<} \bar{N}_i$ [19]; pertanto, essendo $\bar{N}_i$ finitamente generato modulo $\bar{T}$ sarà $[\bar{N}^{\bar{N}_i} = \bar{T}^{\bar{N}_i} : \bar{T}] < \infty$ [2]; da qui $[\bar{N}^{\bar{N}_i} : \bar{N}] = [\bar{N}^{\bar{N}_i} : \bar{T}][\bar{T} : \bar{N}] < \infty$.

b) $\bar{N}_{i-1} \ntriangleleft \bar{N}_i$.

Sarà $[\bar{N}_i : \bar{N}_{i-1}] = p$, un primo, (teor. A) e poichè $\bar{T} \trianglelefteq \bar{N}_{i-1}$ abbiamo $\mathcal{N}_{\bar{N}_i}(\bar{T}) = \bar{N}_i$ oppure $\mathcal{N}_{\bar{N}_i}(\bar{T}) = \bar{N}_{i-1}$. Se $\bar{T} \lhd \bar{N}_i$ è $\bar{T} = \bar{T}^{\bar{N}_i} = \bar{N}^{\bar{N}_i}$ e dunque $[\bar{N}^{\bar{N}_i} : \bar{N}] < \infty$.

Supponiamo allora $\mathcal{N}_{\bar{N}_i}(\bar{T}) = \bar{N}_{i-1}$.

Per 1.3 sarà $\bar{N}_i / \bar{N}_{i-1\bar{N}_i} \in P(2, p)$; esiste dunque un $\bar{x} \in \bar{N}_i$ il cui ordine rispetto a $\bar{N}_{i-1\bar{N}_i}$ è p; ora $[\langle\bar{x}\rangle : \bar{N} \wedge \langle\bar{x}\rangle] < \infty$ $[\langle\bar{x}\rangle : \langle\bar{x}\rangle \wedge \bar{N}_{i-1\bar{N}_i}] = p$ e così $[\langle\bar{x}\rangle : (\langle\bar{x}\rangle \wedge \bar{N}) \wedge (\langle\bar{x}\rangle \wedge \bar{N}_{i-1\bar{N}_i})] = m$ è un numero divisibile per p; poniamo $m = p^\alpha l$, $p \nmid l$, $\bar{y} = \bar{x}^l$ ed $\bar{A} = \langle\bar{x}\rangle \wedge \bar{N} \wedge \bar{N}_{i-1\bar{N}_i}$; sarà $\alpha \geq 1$, $\langle\bar{x}\rangle / \bar{A} = \langle\bar{x}^{p^\alpha}\rangle / \bar{A} \times \langle\bar{y}\rangle / \bar{A}$ con $\langle\bar{y}\rangle / \bar{A}$ p-gruppo d'ordine p^α; da $|\bar{x}\bar{N}_{i-1\bar{N}_i}| = p$ segue $|\bar{x}^l \bar{N}_{i-1\bar{N}_i}| = p$ ossia $|\bar{y}\bar{N}_{i-1\bar{N}_i}| = p$, $[\bar{N}_i = \langle\bar{y}, \bar{N}_{i-1}\rangle : \bar{N}_{i-1}] = p$, $\bar{y}^p \in \bar{N}_{i-1}$ e $\bar{N}_i = \bigcup_{1 \leq j \leq p} \bar{N}_{i-1}\bar{y}^j$ sicchè $\{\bar{T}^{\bar{g}} | \bar{g} \in \bar{N}_i\} = \{\bar{T}, \bar{T}^{\bar{y}}, \ldots, \bar{T}^{\bar{y}^{p-1}}\}$

e così si avrà $\bar{T} < \bar{T}^{\bar{N}_i} = \bar{T} \vee \bar{T}^{\bar{y}} \vee \ldots \vee \bar{T}^{\bar{y}^{p-1}} \leq \langle \bar{T}, \bar{y} \rangle \leq \bar{N}_i$; ora $[\langle \bar{T}, \bar{y} \rangle / \bar{T}] \simeq [\langle \bar{y} \rangle / \bar{T} \wedge \langle \bar{y} \rangle]$ e il secondo membro è una catena (finita) avendosi $\bar{N} \leq \bar{T}$ e $[\langle \bar{y} \rangle / \bar{N} \wedge \langle \bar{y} \rangle]$ una catena. È $\bar{T} \lhd \bar{N}_{i-1}$, $\bar{y}^p \in \bar{N}_{i-1}$, per cui, posto $\bar{R} = \langle \bar{T}, \bar{y}^p \rangle$ sarà $\bar{R} \leq \bar{N}_{i-1}$ e $\bar{R} \underset{d}{<} \langle \bar{T}, \bar{y} \rangle$ essendo $\bar{T} \underset{d}{<} \langle \bar{T}, \bar{y} \rangle$ e $[\langle \bar{T}, \bar{y} \rangle / \bar{T}]$ una catena, quindi reticolo distributivo; è $\bar{T} \lhd \bar{R}$ e così $\bar{R}/\bar{T}$ è un gruppo finito e così $[\bar{R} : \bar{T}] < \infty$ per cui (1.2) è $[R : N] = [R : T][T : N] < \infty$. Se allora $\bar{T}^{\bar{N}_i} \leq \bar{R}$ è $[\bar{T}^{\bar{N}_i} : \bar{N}] < \infty$; altrimenti sarà $\bar{N}^{\bar{N}_i} = \bar{R}^{\bar{N}_i} = \langle \bar{T}, \bar{y} \rangle = \bar{B} \lhd \bar{N}_i$. Posto $\langle y \rangle^\sigma = \langle \bar{y} \rangle$, avremo $N < R \underset{d}{<} B$ con R/N un gruppo finito e quindi un $\mathfrak{X}$-gruppo [20].

Per assurda ipotesi, sia $[B : R] = \infty$; in virtù del th. B in [20] sarà B/R_B un gruppo di Tarski e dunque (teor. A) avremo $\bar{N} \leq \bar{R}_B \lhd \bar{B} \lhd \bar{N}_i$; poichè $(\bar{R}_B)^{\bar{N}_i} = \bar{B}$, esiste un $\bar{g} \in \bar{N}_i$ tale che $\bar{R}_B < \bar{R}_B \vee (\bar{R}_B)^{\bar{g}} \lhd \bar{B}$ e per la semplicità del gruppo di Tarski sarà $\bar{B} = \bar{R}_B \vee (\bar{R}_B)^{\bar{g}}$. Abbiamo

$$(1) \qquad [\bar{B} = \bar{R}_B (\bar{R}_B)^{\bar{g}} : \bar{R}_B] = [\bar{R}_B^{\bar{g}} : \bar{R}_B \wedge (\bar{R}_B)^{\bar{g}}] .$$

Abbiamo poi $\bar{N} < \bar{R}_B$, $\bar{N}^{\bar{g}} < (\bar{R}_B)^{\bar{g}}$ e così $\bar{N} \wedge \bar{N}^{\bar{g}} \leq \bar{R}_B \wedge (\bar{R}_B)^{\bar{g}}$; ma $[(\bar{R}_B)^{\bar{g}} : \bar{N}^{\bar{g}}] < \infty$ (1.2) e da $\langle N, g \rangle / N$ finito segue $[\langle \bar{N}, \bar{g} \rangle : \bar{N}] < \infty$ (1.2) e così $[\bar{N}^{\bar{g}} : \bar{N} \wedge \bar{N}^{\bar{g}}] < \infty$ sicchè $[(\bar{R}_B)^{\bar{g}} : \bar{N} \wedge \bar{N}^{\bar{g}}]$ e dunque pure $[(\bar{R}_B)^{\bar{g}} : \bar{R}_B \wedge (\bar{R}_B)^{\bar{g}}] < \infty$ e per (1) infine $[B : \bar{R}_B] < \infty$, una contraddizione.

Dunque $[B : T] < \infty$ e così (1.2) $[\bar{B} : \bar{T}] < \infty$ e dunque $[\bar{N}^{\bar{N}_i} : \bar{N}] = [\bar{B} : \bar{T}][\bar{T} : \bar{N}] < \infty$. È così provato, per induzione, che $[\bar{N}^{\bar{N}_n} = \bar{N}^{\bar{G}_1} : \bar{N}] < \infty$. Abbiamo adesso $\bar{N}^{\bar{G}_1} \lhd \bar{G}_1 \lhd \bar{G}$ e $\bar{N}^{\bar{G}_1} \underset{d}{<} \bar{G}$ per cui $\bar{N}^{\bar{G}_1} \underset{q}{<} \bar{G}$ [19]; ne segue che $[(\bar{N}^{\bar{G}_1})^{\bar{G}} = \bar{N}^{\bar{G}} : \bar{N}^{\bar{G}_1}] < \infty$ [2] e così $[\bar{N}^{\bar{G}} : \bar{N}] = [\bar{N}^{\bar{G}} : \bar{N}^{\bar{G}_1}] \cdot [\bar{N}^{\bar{G}_1} : \bar{N}] < \infty$ per cui per 1.2 è, come volevasi, $N^{\bar{G}}/N$ un gruppo finito. //

Per convenienza del lettore, richiamiamo la seguente utile definizione data da Stonehewer in [20].

Definizione. Sia G un gruppo ed N un suo sottogruppo. Diremo che G ha la *Schmidt-struttura rispetto ad* N (*modulo* N_G) se e solo se G/N_G è periodico e risulta

$$G/N_G = (P_1/N_G \times \ldots \times P_i/N_G \times \ldots) \times K/N_G$$

ove $1 \leq i \leq \infty$ con

i) P_i/N_G un P-gruppo non abeliano,

ii) P_i/N_G e K/N_G sono fattori di Hall di G/N_G,

iii) $N/N_G = (Q_1/N_G \times \ldots \times Q_i/N_G \times \ldots) \times N \wedge K/N_G$ dove Q_i/N_G è un Sylow-gruppo non normale di P_i/N_G e così $Q_i^{P_i} = P_i$,

iv) $N \wedge K$ è quasinormale in G.

Osservazione 3. iv) con iii) e ii) comporta che $N \underset{q}{<} NK$; inoltre da $N \wedge K \underset{q}{<} K$ e $(N \wedge K)_G = N_G$ segue che $N \wedge K/N_G$ [18] e dunque per iii) N/N_G è un gruppo residualmente nilpotente finito, in particolare localmente nilpotente essendo periodico e quindi tale è pure il gruppo $(N \wedge K)^G/N_G$ [12], mentre $N^G/N_G = (P_1/N_G \times \ldots \times P_i/N_G \times \ldots) \times$ $\times (N \wedge K)^K/N_G$.

Data una proiettività σ: $G \to \bar{G}$, sia $N \lhd G$, $N < M \leq G$ e $\bar{N} \underset{q}{<} \bar{M}$. Posto $[M:N] = r$, $[\bar{M}:\bar{N}] = p$, abbiamo già avuto modo ai n. 1 e 2 di osservare che $M/N_{\bar{M}}$ è un P-gruppo d'ordine pr, $r \leq p$, $\bar{M}/\bar{N}_{\bar{M}}$ un P-gruppo (non abeliano) d'ordine pq, $p > q$ e $[N:N_{\bar{M}}] = p$ mentre $[\bar{N}:\bar{N}_{\bar{M}}] = q < p$. Ci sarà conveniente, per brevità di linguaggio, chiamare nel seguito, (r, p) e (q, p) le coppie associate ad (N, M). Ciò detto passiamo ad enunciare e provare l'utile

3.3 Lemma. *Sia σ: $G \to \bar{G}$ una proiettività, $N \lhd G$ e G/N un gruppo finitamente generato. Allora valgono i seguenti fatti:*

a) $\bar{N}/\bar{N}_{\bar{G}}$ è un gruppo nilpotente periodico di esponente finito. Se poi $\bar{N}$ non è quasinormale in $\bar{G}$, allora $\bar{G}/\bar{N}_{\bar{G}}$ è periodico ed ha la seguente struttura:

b) $\bar{G}/\bar{N}_{\bar{G}} = \bar{P}_1/\bar{N}_{\bar{G}} \times \ldots \times \bar{P}_t/\bar{N}_{\bar{G}} \times \bar{K}/\bar{N}_{\bar{G}}$ è un prodotto diretto di un numero finito di sottogruppi di Hall con $\bar{P}_i/\bar{N}_{\bar{G}}$ un P-gruppo (non abeliano) finito d'ordine $p_i^{\alpha_i} q_i$, $q_i < p_i$, $1 \leq \alpha_i$, $1 \leq t$.

c) $\bar{N}/\bar{N}_{\bar{G}} = \bar{Q}_1/\bar{N}_{\bar{G}} \times \ldots \times \bar{Q}_t/\bar{N}_{\bar{G}} \times \bar{Q}/\bar{N}_{\bar{G}}$, $\bar{Q}_i = \bar{N} \wedge \bar{P}_i$, $[\bar{Q}_i:\bar{N}_{\bar{G}}] = q_i$, $\bar{Q}_i^{\bar{G}} = \bar{Q}_i^{\bar{P}_i} = \bar{P}_i$, $\bar{Q} = \bar{K} \wedge \bar{N} \underset{q}{\leq} \bar{G}$, $\bar{N} \underset{q}{<} \bar{N}\bar{K}$.

d) $\bar{N}^{\bar{G}}/\bar{N}_{\bar{G}} = \bar{P}_1/\bar{N}_{\bar{G}} \times \ldots \times \bar{P}_t/\bar{N}_{\bar{G}} \times \bar{Q}^{\bar{K}}/\bar{N}_{\bar{G}}$; $\bar{Q}^{\bar{K}}/\bar{N}_{\bar{G}}$ è gruppo nilpotente periodico di esponente finito. Infine

e) $G/N = P_1 N/N \times \ldots \times P_t N/N \times KN/N$ è un prodotto diretto di sottogruppi di Hall con $P_i N/N \simeq P_i/P_i \wedge N = P_i/Q_i$ un gruppo d'ordine $p_i^{\alpha_i - 1} r_i$, $r_i \leq p_i$, ed è un P-gruppo se $\alpha_i > 1$. $Q_{i\bar{P}_i} = N_{\bar{G}} \lhd P_i$ e $P_i/N_{\bar{G}}$ è un P-gruppo d'ordine $p_i^{\alpha_i} r_i$; inoltre $K \lhd G$.

f) Per ogni i esiste un $M_i \leq G$ con $N < M_i$ e $\bar{N} \underset{q}{<} \bar{M}_i$ e tale che $[M_i:N] = r_i$, $N \wedge P_i < M_i \wedge P_i$, $N \wedge P_j = M_i \wedge P_j$ per $j \neq i$, $M_i \wedge K =$ $= N \wedge K$, è $N_{\bar{G}} = (M_i \wedge P_i)_{\bar{P}_i} = (M_i \wedge P_i)_{\bar{M}_i}$; le coppie associate ad (N, M_i) sono (r_i, p_i) e (q_i, p_i); per $i \neq j$ è $\{r_i, p_i\} \cap \{r_j, p_j\} = \emptyset$, $\{q_i, p_i\} \cap$ $\cap \{q_j, p_j\} = \emptyset$.

Le b), c) e d) primo capoverso, ci dicono che $\bar{G}$ *ha la Schmidt-struttura rispetto ad* $\bar{N}$ mod $\bar{N}_{\bar{G}}$.

DIM. *a*) Poichè $\bar{G}$ è finitamente generato modulo $\bar{N}$, per 3.2 è $[\bar{N}^{\bar{G}}:\bar{N}] < \infty$. Da qui segue che $\bar{N}^{\bar{G}}/\bar{N}_{\bar{G}}$ è un gruppo prodotto subdiretto di gruppi finiti isomorfi, in particolare è di esponente finito. È $\bar{N}/\bar{N}_{\bar{G}} \underset{a}{<} \bar{G}/\bar{N}_{\bar{G}}$ a cuore identico; tenendo presente 1.2, 1.6 e il ragionamento nella dimostrazione di 3.9 ii) in [20] si conclude che $\bar{N}/\bar{N}_{\bar{G}}$ è nilpotente (di esponente finito). Se $\bar{N} \underset{a}{<} \bar{G}$, per teor. B dovrà essere G/N e dunque $\bar{G}/\bar{N}_{\bar{G}}$ periodico. Se di nuovo si tiene presente che $[\bar{N}^{\bar{G}}:\bar{N}] < \infty$ e il ragionamento usato nella dimostrazione del th. E in [20] si conclude che $\bar{G}$ ha la Schmidt-struttura rispetto ad $\bar{N}$ modulo $\bar{N}_{\bar{G}}$, quale descritto in *b*), *c*) e in *d*) primo capoverso. Posto $\bar{T} = \bar{Q}^{\bar{G}}$, è $[\bar{T}:\bar{Q}] < \infty$ [2] così ad es. per l'osservazione 3, $\bar{T}/\bar{Q}_{\bar{T}}$ è un gruppo nilpotente finito per cui $\bar{Q}^{\bar{G}}/\bar{N}_{\bar{G}}$ è un prodotto subdiretto di gruppi nilpotenti finiti isomorfi per cui $\bar{Q}^{\bar{G}}/\bar{N}_{\bar{G}} = \bar{Q}^{\bar{K}}/\bar{N}_{\bar{G}}$ è nilpotente di esponente finito. *b*), *c*) e *d*) risultano così giustificate. *e*) Da *b*) si ricava che le coppie $(\bar{P}_i, \bar{P}_j)$, $(\bar{P}_i, \bar{K})$ sono coppie intersezione ed unione distributive di $[\bar{G}/\bar{N}_{\bar{G}}]$ (cf. [22]), per cui tali saranno (P_i, P_j) e (P_i, K) in $[G/N_{\bar{G}}]$. Ne segue che $N = N \vee (P_i \wedge P_j) = NP_i \wedge NP_j$, $N = N \vee \vee (P_i \wedge K) = NP_i \wedge NK$. $NP_i/N \simeq P_i/N \wedge P_i = P_i/Q_i$ è un gruppo proiettivo ad un intervallo di $[\bar{P}_i/\bar{N}_{\bar{G}}]$, per cui applicando 1.3 si ricava $\sigma\colon P_i/Q_{i\bar{P}_i} \to \bar{P}_i/\bar{Q}_{i\bar{P}_i}$ e tenuto conto di *b*) e *c*) si avrà $\bar{N}_{\bar{G}} = \bar{Q}_{i\bar{G}} = \bar{Q}_{i\bar{P}_i}$, $N_{\bar{G}} = Q_{i\bar{P}_i} = (N \wedge P_i)_{\bar{P}_i} \lhd P_i$ con $[Q_i : N_{\bar{G}}] = p_i$ e $[P_i : Q_i] = p_i^{\alpha_i - 1} r_i$. Visto che (P_i, K) è una coppia intersezione distributive in $[P_i \vee K/N_{\bar{G}}]$, con $P_i \wedge K = N_{\bar{G}} \lhd P_i$, per $x \in P_i$ è $P_i \wedge K^x = N_{\bar{G}}$ per cui deve essere $K^x = K$; in definitiva $\mathcal{N}(K) \geq \bigvee_i P_i \vee K = G$ *f*) in $P_i/N_{\bar{G}}$ si consideri un sottogruppo $L_i/N_{\bar{G}}$ d'ordine $r_i p_i$ con $Q_i < L_i$ e si ponga $M_i = Q_1 \vee \vee \ldots Q_{i-1} \vee L_i \vee Q_{i+1} \ldots \vee Q_t \vee Q$; se si tiene conto di *b*), *c*) ed *e*) si vede che M_i ha le proprietà dette. Poichè per $i \neq j$ è $\bar{P}_i \vee \bar{P}_j/\bar{N}_{\bar{G}} = \bar{P}_i/\bar{N}_{\bar{G}} \times \times \bar{P}_j/\bar{N}_{\bar{G}}$ una fattorizzazione di Hall ed essendo $N_{\bar{G}} \lhd P_i \vee P_j$ è pure [22] $P_i/N_{\bar{G}} \times P_j/N_{\bar{G}}$ una fattorizzazione di Hall; dunque

$$\{r_i, p_i\} \cap \{r_j, p_j\} = \emptyset\,, \qquad \{q_i, p_i\} \cap \{q_j, p_j\} = \emptyset\,. \qquad //$$

Prima di procedere ci sarà conveniente a questo punto enunciare un risultato recente di Busetto [3] di cui avremo bisogno nel nostro studio, anche se non subito in tutta la sua generalità, e per la cui dimostrazione è servito il lemma 3.3.

3.4 TEOREMA (Busetto). *Sia* $\sigma\colon G \to \bar{G}$ *una proiettività ed* $N \lhd G$. *Allora* $N_{\bar{G}}$ *ed* $N^{\bar{G}}$ *sono sottogruppi normali di* G.

Questo teorema fu per primo dimostrato da Schmidt (cf. ad es. [16]) per i gruppi finiti; con semplici considerazioni locali è facile estenderlo ai gruppi localmente finiti. Per i nostri scopi immediati ci basta la validità di 3.4 nell'ipotesi che G/N sia finito. Per completezza schizziamo qui una dimostrazione del teorema in tale ipotesi restrittiva rinviando il lettore al lavoro [3] per il caso generale.

DIM. Sia $N = N_0 \lhd N_1 \lhd \ldots \lhd N_t = G$ una serie principale da N a G. Per provare $N_{\bar{G}} \lhd G$ usiamo induzione su t la cosa essendo banale se $t = 0$. Sia dunque $t \geq 1$; per ipotesi induttiva sarà $N_{1\bar{G}} \lhd G$. Se $N = N_{1\bar{G}} \vee N$ è $N_{\bar{G}} = N_{1\bar{G}} \lhd G$. Se $N_{1\bar{G}} \vee N \underset{\neq}{>} N$ risulta $N_1 = N \vee N_{1\bar{G}}$ per cui $N_1/N \simeq N_{1\bar{G}}/N \wedge N_{1\bar{G}}$. Se N_1/N non è abeliano per teor. A sarà $(N_{1\bar{G}} \wedge N)^\sigma \lhd \bar{N}_{1\bar{G}} \lhd \bar{G}$ per cui $(N_{1\bar{G}} \wedge N)^\sigma/(N_{1\bar{G}} \wedge N)^\sigma_{\bar{G}} = N_{\bar{G}}$ è abeliano; ma è anche residualmente semisemplice [22] per cui $N_{\bar{G}} = N \wedge N_{1\bar{G}} \lhd G$. Se N_1/N è p-abeliano elementare, posto

$$T = \bigwedge_{\substack{x_i \in G \\ \bar{x}_i \in \bar{G}}} (N \wedge N_{1\bar{G}})^{x_1 \bar{x}_1 \ldots x_n \bar{x}_n} \quad \text{è} \quad T \lhd G\,,\ \bar{T} \lhd \bar{G} \text{ e } T = \bigwedge_{\substack{x_i \in G \\ \bar{x}_i \in \bar{G}}} (N_{\bar{G}})^{x_1 \bar{x}_1 \ldots x_n \bar{x}_n}.$$

Da $N_{1\bar{G}}/N \wedge N_{1\bar{G}}$ p-abeliano elementare, tenuto conto di 1.4 e del fatto che $N_{1\bar{G}} \lhd G$, si desume che G/T è localmente finito oppure che $N_{1\bar{G}}/T$ è abeliano senza torsione di rango 1 e da qui, sia per quanto sopra detto, segue dover essere $N_{\bar{G}} \lhd G$. Ora $G/N_{\bar{G}}$ è finito e così per [16] sarà pure $N^{\bar{G}} \lhd G$. //

3.5 LEMMA. *Sia $\sigma\colon G \to \bar{G}$ una proiettività ed $N \lhd G$. Se $\bar{N} \underset{q}{\leq} \bar{G}$ allora G/N è un gruppo periodico e sono verificati i seguenti fatti:*

a) Esiste un $M \leq G$ con $N < M$ e $\bar{N} \underset{q}{\leq} \bar{M}$; è $M/N_{\bar{M}}$ un P-gruppo d'ordine rp con $r \leq p$, $r = [M:N]$, $[N:N_{\bar{M}}] = p$, mentre $\bar{M}/\bar{N}_{\bar{M}}$ è un P-gruppo (non abeliano) d'ordine pq, $q < p$ con $[\bar{M}:\bar{N}] = p$, $[\bar{N}:\bar{M}_{\bar{N}}] = q$.

b) $G/N = R/N \times C/N$, dove R/N è un fattore di Hall di G/N ed $M/N \leq R/N$. R/N è un gruppo d'ordine $p^\alpha r$ con $r \leq p$, $0 \leq \alpha \leq \infty$ ed è un P-gruppo se $R/N \neq M/N$ ossia se $\alpha \geq 1$.

c) $C_{\bar{G}} = C_{\bar{R}}$, $N_{\bar{M}} = N_{\bar{R}} = N \wedge C_{\bar{G}}$, $G/C_{\bar{G}}$ è isomorfo ad $R/N_{\bar{R}}$ ed è un P-gruppo d'ordine $p^{\alpha+1} r$, $C = NC_{\bar{G}}$ e C/N non contiene elementi di ordine p.

d) $\bar{C}_{\bar{G}} = \bar{C}_{\bar{R}}$, $\bar{N}_{\bar{M}} = \bar{N}_{\bar{R}} = \bar{N} \wedge \bar{C}_{\bar{G}}$, $\bar{G}/\bar{C}_{\bar{G}}$ è isomorfo ad $\bar{R}/\bar{N}_{\bar{R}}$ ed è un P-gruppo (non abeliano) d'ordine $p^{\alpha+1} q$, $q \leq p$.

DIM. Per teorema B è G/N periodico. Da 3.3 si deduce l'esistenza di un $M \leq G$ con $N \lessdot M$ e $\bar{N} \underset{q}{\lessdot} \bar{M}$ e soddisfacente alle condizioni di a). Se ora $\{X_j/N\}_j$ è un sistema locale di sottogruppi finitamente generati di G/N con $M \leq X_j$ per ogni j, da 3.3 si deduce facilmente che per G/N esiste una rappresentazione

$$G/N = R/N \times C/N \tag{1}$$

ove $M/N \leq R/N$ è un fattore di Hall di G/N d'ordine $p^\alpha r$ con $\alpha = 0$ se $R/N = M/N$ mentre è un P-gruppo d'ordine $p^\alpha r$, $r \leq p$, $1 \leq \alpha \leq \infty$ se $R/N \neq M/N$. Usando 1.3 si vede che $N_{\bar{M}} = N_{\bar{R}} \lhd R$ e che $R/N_{\bar{R}}$ è un P-gruppo d'ordine $p^{\alpha+1} r$ con $[N : N_{\bar{R}}] = p$ mentre $\bar{R}/\bar{N}_{\bar{R}}$ è un P-gruppo (non abeliano) d'ordine $p^{\alpha+1} q$ con $[\bar{N} : \bar{N}_{\bar{R}}] = q < p$. Da (1) si ricava $G = RC$, $R \wedge C = N$ e $G/C \simeq R/N$. Tenuto presente che $\bar{N} \underset{q}{\lessdot} \bar{M} \leq \bar{R}$ ed usando ancora 1.3 si ha

$$N \gtrdot N_{\bar{M}} = N_{\bar{R}} = (R \wedge C)_{\bar{R}} = R \wedge C_{\bar{R}} = N \wedge C_{\bar{R}} \tag{2}$$

per cui $C_{\bar{R}} \neq C$ e dunque

$$C_{\bar{R}} = C_{\bar{G}} \lhd G \tag{3}$$

avendosi per 1.3 $C_{\bar{G}} \lhd G$ e $C_{\bar{G}} \lessdot C$. Ne segue che $NC_{\bar{G}} = C$ perchè $N \nleqslant C_{\bar{G}} = C_{\bar{R}}$ per (2) e così $RC_{\bar{G}} = RC = G$. Da qui, tenuto conto di (2) e (3) si ricava:

$$\begin{cases} G/C_{\bar{G}} = G/C_{\bar{R}} \simeq R/R \wedge C_{\bar{R}} = R/N_{\bar{R}} = R/M_{\bar{M}}\,, \\ \bar{G}/\bar{C}_{\bar{G}} = \bar{G}/\bar{C}_{\bar{R}} \simeq \bar{R}/\bar{R} \wedge \bar{C}_{\bar{R}} = \bar{R}/\bar{N}_{\bar{R}} = \bar{R}/\bar{N}_{\bar{M}}\,. \end{cases} \tag{4}$$

Se C/N contiene un elemento d'ordine p, allora dovrà essere $R/N = M/N$ con $[M : N] = r < p$. Sia $aN \in C/N$ d'ordine p e poniamo $T = \langle M, a \rangle$. Allora T/N è finito e $\bar{T}$ avrà la Schmidt-struttura rispetto ad $\bar{N}$ mod $\bar{N}_{\bar{T}}$ e così $\bar{T}/\bar{N}_{\bar{T}} = \bar{L}/\bar{N}_{\bar{T}} \times \bar{F}/\bar{N}_{\bar{T}}$ ove $\bar{L}/\bar{N}_{\bar{T}}$ è un P-gruppo e fattore di Hall contenente $\bar{M}/\bar{N}_{\bar{T}}$; per 3.4 è $N_{\bar{T}} \lhd T$, per cui [23] $L/N_{\bar{T}}$ è un P-gruppo e fattore di Hall di $T/N_{\bar{T}}$, che contiene $M/N_{\bar{T}}$ e così il quoziente $M/N_{\bar{M}}$, che è un P-gruppo d'ordine rp. Poichè $N \lhd L$, sarà L/N un P-gruppo d'ordine $p^\beta r$, $\beta \geq 1$ e si avrà, essendo di Hall in T/N, che aN e bN vi sono contenuti, ove $M = \langle b, N \rangle$; ma allora $[a, b] \notin N$ una contraddizione. //

Sia $\sigma\colon G \to \bar{G}$ una proiettività ed $N \lhd G$. Se $\bar{N} \underset{q}{<} \bar{G}$ per 3.5 il gruppo periodico G/N ha una rappresentazione $G/N = R/N \times C/N$ ove $R/N_{\bar{R}}$ ed $\bar{R}/\bar{N}_{\bar{R}}$ appartengono ad una medesima classe $P(n, p)$ di P-gruppi; il primo p ci converrà chiamare *un primo associato a σ ed N.*

Passiamo ora a dimostrare un teorema generale di struttura per una proiettività che non conserva la quasi-normalità di un sottogruppo normale.

TEOREMA D. *Sia $\sigma\colon G \to \bar{G}$ una proiettività, $N \lhd G$ ed $\bar{N} \underset{q}{<} \bar{G}$. Allora G/N è periodico e sono presenti i seguenti fatti:*

a) $G/N = R_1/N \times \ldots \times R_i/N \times \ldots \times \Gamma/N$ è un prodotto diretto (discreto) di fattori di Hall con $1 \leq i \leq \infty$, ove R_i/N è un gruppo d'ordine $p_i^{\alpha_i} r_i$, $r_i \leq p_i$, $0 \leq \alpha_i \leq \infty$ ed è un P-gruppo non appena $\alpha_i \geq 1$.

b) $R_i/N_{\bar{R}_i}$ è un P-gruppo d'ordine $p_i^{\alpha_i+1} r_i$ con $[N : N_{\bar{R}_i}] = p_i$ $\bar{R}_i/\bar{N}$ è un P-gruppo (non abeliano) d'ordine $p_i^{\alpha_i+1} q_i$, $q_i < p_i$ e $q_i = [\bar{N} : \bar{N}_{\bar{R}_i}]$.

c) Detto ϱ' l'insieme complementare nei primi dell'insieme $\varrho = \{r_i, p_i\}$. risulta Γ/N un ϱ'-gruppo. Per $i \neq j$ è $\{r_i, p_i\} \cap \{r_j, p_j\} = \emptyset$, $\{q_i, p_i\} \cap \{q_j, p_j\} = \emptyset$.

d) Posto $C_i/N = \left(\bigvee_{j \neq i} R_j/N\right) \times \Gamma/N$, risulta $G/C_{i\bar{G}}$ isomorfo a $R_i/C_{i\bar{G}} \wedge N = N_{\bar{R}_i}$ ed è un P-gruppo d'ordine $p_i^{\alpha_i+1} r_i$ mentre $\bar{G}/\bar{C}_{i\bar{G}}$ è isomorfo ad $\bar{R}_i/\bar{N}_{\bar{R}_i}$ ed è un P-gruppo (non abeliano) d'ordine $p_i^{\alpha_i+1} q_i$, $q_i < p_i$.

e) $\Gamma_{\bar{G}} = \bigwedge_i C_{i\bar{G}}$ e $G/\Gamma_{\bar{G}}$ è isomorfo al prodotto diretto (discreto) $\prod_i R_i/N_{\bar{R}_i}$ mentre $\bar{G}/\bar{\Gamma}_{\bar{G}}$ è isomorfo a $\prod \bar{R}_i/\bar{N}_{\bar{R}_i}$.

f) $\Gamma = \Gamma_{\bar{G}} N$, $\Gamma/\Gamma_{\bar{G}}$ è un gruppo abeliano localmente Hölderiano; inoltre $\bar{N} \underset{q}{<} \bar{\Gamma}$, $\bar{N} \wedge \Gamma_{\bar{G}} \underset{q}{<} \bar{G}$.

DIM. G/N è periodico per teorema B; sia $\pi = \{p_i\}_i$ l'insieme di tutti i primi associati a σ ed N. In corrispondenza ad ogni p_i abbiamo per 3.5 che $G/N = R_i/N \times C_i/N$ con $R_i/N_{\bar{R}_i} \in P(n_i, p_i)$ un fattore di Hall. Da qui non è difficile risalire ad una rappresentazione di G/N quale descritta in *a*). Le affermazioni *b*) e *c*) conseguono facilmente da 3.3, da 3.5 ed *a*), come pure la *d*), tenuto presente che in $G/N = R_i/N \times C_i/N$ è proprio $C_i/N = \left(\bigvee_{j \neq i} R_j/N\right) \times \Gamma/N$. *e*) risulta $\Gamma = \bigwedge_i C_i$ e così $\Gamma_{\bar{G}} = \bigwedge_i C_{i\bar{G}} \lhd G$, e per semplicità possiamo assumere $\Gamma_{\bar{G}} = \{1\}$. Sarà $G'' = \{1\}$. Se $G' = \{1\}$ dovrà essere G periodico essendo $\bar{C}_i \underset{q}{<} \bar{G}$. Se $G' \neq \{1\}$ esiste un $C_i \geq G'$ ed essendo $\bar{C}_i \underset{q}{<} \bar{G}$ sarà G/G' periodico

e $\bar{G}' \underset{q}{<} \bar{G}$ perchè altrimenti sarebbe normale essendo G/G' generabile mediante elementi d'ordine primo, ma allora $C_{i\bar{g}} \geq G'$ una contraddizione. Ma ora per teorema C è $G'/G'' = G'/\{1\}$ periodico e in definitiva $G/\Gamma_{\bar{g}}$ periodico. E la conclusione è ora non difficile in virtù di *c*) e *d*). *f*): abbiamo per 3.5 che $C_i = NC_{i\bar{g}}$ per cui $[C_i : C_{i\bar{g}}] = [N : N \wedge C_{i\bar{g}}] = p_i$ e così pure $\Gamma C_{i\bar{g}} = C_i$ perchè da $\Gamma \leq C_{i\bar{g}}$ si avrebbe $N \leq C_{i\bar{g}}$ un assurdo; dunque $[\Gamma : \Gamma \wedge C_{i\bar{g}}] = p_i$ e così, essendo $G/\Gamma_{\bar{g}}$ periodico, sarà $\Gamma/\bigwedge_i (\Gamma \wedge C_{i\bar{g}}) = \Gamma/\Gamma_{\bar{g}} \simeq \tilde{\prod}_i \langle a_i \rangle$, $|a_i| = p_i$; ora Γ/N è un ϱ'-gruppo, $\Gamma/\Gamma_{\bar{g}}$ un ϱ-gruppo per cui $\Gamma = N\Gamma_{\bar{g}}$ e dunque anche $\Gamma/\Gamma_{\bar{g}} \simeq N/N \wedge \Gamma_{\bar{g}}$. Da come è definita sopra π, è chiaro che $\bar{N} \underset{q}{<} \bar{\Gamma}$ e così da $\bar{\Gamma} = \bar{N}\bar{\Gamma}_{\bar{g}}$ si avrà pure $\bar{N} \wedge \bar{\Gamma}_{\bar{g}} \underset{q}{<} \bar{\Gamma}_{\bar{g}} \lhd \bar{G}$ per cui $\bar{N} \wedge \bar{\Gamma}_{\bar{g}} \underset{\bar{a}}{\leq} \bar{G}$; ma essendo $N \wedge \Gamma_{\bar{g}} \lhd G$ è pure $\bar{N} \wedge \bar{\Gamma}_{\bar{g}} \underset{d}{<} \bar{G}$ e in definitiva $\bar{N} \wedge \bar{\Gamma}_{\bar{g}} \underset{q}{<} \bar{G}$. E questo conclude la dimostrazione del teorema. //

Se $\sigma: G \to \bar{G}$ è una proiettività e se $N \lhd G$, per 3.4 sappiamo che $N_{\bar{g}} \lhd G$, e dunque σ induce una proiettività del gruppo $G/N_{\bar{g}}$ sul gruppo $\bar{G}/\bar{N}_{\bar{g}}$. Potremo pertanto pervenire a stabilire proprietà concernenti la struttura dei gruppi G e $\bar{G}$ modulo rispettivamente $N_{\bar{g}}$ ed $\bar{N}_{\bar{g}}$, investigando le proiettività $\sigma: G \to \bar{G}$ in cui il sottogruppo normale N soddisfa alla ulteriore ipotesi restrittiva che il cuore $\bar{N}_{\bar{g}}$ di $\bar{N}$ in $\bar{G}$ sia identico. Ciò oltretutto semplificherà sia la formulazione che la scrittura dei nostri risultati. Nella nostra analisi converrà esaminare separatamente i seguenti 2 casi:

G/N gruppo misto, G/N gruppo periodico.

3.6 Proposizione. *Sia* $\sigma: G \to \bar{G}$ *una proiettività*, $N \lhd G$, G/N *misto ed* $N_{\bar{g}} = \{1\}$. *Allora risulta*:

a) *N ed $\bar{N}$ sono gruppi residualmente ciclici finiti*,

b) *$N^{\bar{g}}$ ed $\bar{N}^{\bar{g}}$ sono gruppi nilpotenti di classe al più* 2.

Dim. *a*) In virtù di teorema B, per ogni $\bar{g} \in \bar{G}$, $N/N \wedge N^{\bar{g}}$ e $\bar{N}/\bar{N} \wedge \bar{N}^{\bar{g}}$ sono gruppi ciclici finiti, d'onde si conclude. *b*) ancora per teorema B $N^{\bar{g}}/N = \langle NN^{\bar{g}}/N | \bar{g} \in \bar{G} \rangle$ è generato da gruppi ciclici normali finiti, per cui $N^{\bar{g}}/N$ è periodico nilpotente di classe al più 2. Ne segue che $\gamma_3(N^{\bar{g}}) \leq N$ ed è $\gamma_3(N^{\bar{g}}) \lhd G$, essendo $N^{\bar{g}} \lhd G$ (3.4), per cui $\gamma_3(N^{\bar{g}}) \leq N_{\bar{g}} = \{1\}$. Un ragionamento analogo si applica ad $\bar{N}^{\bar{g}}$, tenuto presente che $\bar{N} \lhd a(\bar{N}) \lhd \bar{G}$ (teorema B). //

Per comodità chiameremo un gruppo $2'$-*abeliano* ($2'$-*modulare*) se

e solo se è un gruppo finito nilpotente e il suo sottogruppo massimo d'ordine dispari è abeliano (modulare).

Ciò detto passiamo a provare la seguente

3.7 PROPOSIZIONE. *Sia* $\sigma: G \to \bar{G}$ *una proiettività,* $\{1\} \neq N \lhd G$, G/N *periodico ed* $N_{\bar{G}} = \{1\}$. *Allora valgono i seguenti fatti.*

a) N *è un gruppo residualmente* $2'$*-abeliano,*

b) $\bar{N}$ *è un gruppo residualmente* $2'$*-modulare,*

c) sia A *un insieme di elementi di* N *con ordini che dividono* p^n, p *un primo ed* $n \geq 1$. *Allora* $\langle A \rangle$ *è un gruppo periodico di esponente divisore di* p^n; $\langle A \rangle$ *è nilpotente e* $\mathrm{cl}\langle A \rangle \leq n$ *se* $p = 2$ *mentre* $\mathrm{cl}\langle A \rangle = 1$ *se* $p \neq 2$,

d) sia $\bar{A}$ *un insieme di elementi di* $\bar{N}$ *con ordini che dividono* p^n. *Allora* $\langle \bar{A} \rangle$ *è un gruppo periodico di esponente divisore di* p^n; $\langle \bar{A} \rangle$ *è modulare nilpotente con* $\mathrm{cl}\langle \bar{A} \rangle \leq n$ *(e serie derivata di lunghezza* ≤ 2*) se* $p \neq 2$,

e) N *ed* $\bar{N}$ *sono gruppi separati con parte periodica localmente nilpotente.*

DIM. Possiamo supporre $G = \langle N, g \rangle$ e sarà $[G:N] < \infty$; nè sarà restrittivo supporre G/N un p-gruppo (ciclico) (cf. ad es. [6]). Ma allora o G è un P-gruppo oppure G è un p-gruppo. Alle varie conclusioni ora si perviene usando lemma 3.1 in [5], il teorema in [6], il teorema al n. 4 e la proposizione al n. 5 in [7] e tenendo anche presente che un p-gruppo finito modulare di esponente p^n ha classe $\leq n$.

TEOREMA E. *Sia* $\sigma: G \to \bar{G}$ *una proiettività,* $N \lhd G$, $N_{\bar{G}} = \{1\}$, N *periodico ed* $\bar{N} \underset{q}{<} \bar{G}$. *Allora* G *è periodico e risulta*

a_1) $G = P_1 \times P_2 \times \ldots \times P_i \times \ldots \times K$ *è un prodotto diretto (discreto) di sottogruppi di Hall di* G, $1 \leq i \leq \infty$, *con* P_i *un* P*-gruppo d'ordine* $p_i^{\alpha_i} r_i$, $r_i \leq p_i$, $1 \leq \alpha_i \leq \infty$,

a_2) $\bar{G} = \bar{P}_1 \times \ldots \times \bar{P}_i \times \ldots \times \bar{K}$ *è un prodotto diretto (discreto) di sottogruppi di Hall di* $\bar{G}$, *con* $\bar{P}_i$ *un* P*-gruppo (non abeliano) d'ordine* $p_i^{\alpha_i} q_i$, $q_i < p_i$,

b_1) $N = Q_1 \times \ldots \times Q_i \times \ldots \times N \wedge K$ *ove* $[N \wedge P_i = Q_i : \{1\}] = p_i$,

b_2) $\bar{N} = \bar{Q}_1 \times \ldots \times \bar{Q}_i \times \ldots \times \bar{N} \wedge \bar{K}$, $[\bar{Q}_i : \{1\}] = q_i$, $\bar{P}_i = \bar{Q}_i^{\bar{G}} = \bar{Q}_i^{\bar{P}_i}$, $\bar{N} \wedge \bar{K} \underset{q}{<} \bar{G}$, $\bar{N} \underset{q}{<} \bar{N}\bar{K}$,

c_1) $N^{\bar{G}} = P_1 \times \ldots \times P_i \times \ldots \times (N \wedge K)^{\bar{K}}$,

c_2) $\bar{N}^{\bar{G}} = \bar{P}_1 \times \ldots \times \bar{P}_i \times \ldots \times (\bar{N} \wedge \bar{K})^{\bar{K}}$,

d) N ed $\bar{N}$ soddisfano alle condizioni a), b), c) e d) di 3.7.

DIM. Poichè $\bar{N} \underset{q}{<} \bar{G}$, G/N è periodico per teorema B. Ne segue che G e $\bar{G}$ sono periodici ed è pure $\bar{N} \underset{d}{\leq} \bar{G}$; da 3.7 *e*) e 3.2 segue poi facilmente che $\bar{N}^{\bar{G}}$ è localmente finito. A questo punto il ragionamento usato nella dimostrazione del theorem E in [20] ci dice che $\bar{G}$ ha la Schmidt-struttura rispetto ad $\bar{N}$ modulo $\bar{N}_{\bar{G}} = \{1\}$. Dunque, tenendo conto della definizione di Schmidt-struttura e della osservazione 3 per il gruppo $\bar{G}$ si ha la rappresentazione quale descritta in a_2), b_2) e c_2). Se ora si usano note proprietà dei P-gruppi e sui prodotti diretti di Hall in relazione alle proiettività [22], si risale facilmente ad a_1), b_1) e c_1), osservando anche che $Q_i = N \wedge P_i \lhd P_i$ e dunque $[Q_i : \{1\}] = p_i$. La *d*) è poi il contenuto ripetuto di 3.7. //

OSSERVAZIONE 4. Se nel teorema E l'ipotesi N periodico sia conseguenza delle altre è un problema aperto. (³) Certo così sarebbe se il theorem in [6] valesse anche per $p = 2$ in forma eventualmente anche più debole che cioè la lunghezza della serie derivata di H (in quelle notazioni) sia maggiorata da una costante; perchè allora per *d*) N sarebbe risolubile e si concluderebbe usando teorema C. N è pure periodico nel caso che l'insieme degli esponenti dei 2-gruppi di G/N sia superiormente limitato; perchè allora per *d*), N è nilpotente e dunque $\bar{N} \underset{q}{<} \bar{G}$ se N è misto (teorema C). Vogliamo ancora osservare che se esiste un p-elemento a in N con $p \in \pi$ (cf. teorema D), essendo N residualmente finito, esista un $H \geq N$ con H/N finitamente generato e $\langle a \rangle \wedge N_{\bar{H}} = \{1\}$; ma il p-Sylow di $N/N_{\bar{H}}$ ha ordine p per cui $\langle a N_{\bar{H}} \rangle$ è il p-Sylow ed essendo $a \in \mathfrak{T}(N)$ se N è misto, σ su $\mathfrak{T}(N)$ conserva gli indici, una contraddizione.

OSSERVAZIONE 5. Sia $\sigma: G \to \bar{G}$ una proiettività ed $N \lhd G$. Seguendo i ragionamenti usati in [20] e tenendo presente i risultati finora conseguiti, in particolare teorema B, 3.2 e teorema E, il lettore non avrà difficoltà a convincersi che senza ulteriore ipotesi valgono per $N^{\bar{G}}/N_{\bar{G}}$ ed $\bar{N}^{\bar{G}}/\bar{N}_{\bar{G}}$ le affermazioni contenute in theorem F_1 ed F_2, per $\bar{N}$ quelle contenute in theorem 4.6 e 4.7, dove per teorema C, $\bar{N}/\bar{N}'$ è periodico, e quelle del theorem G concernente il gruppo di automorfismi indotto da $\bar{G}$ in $\bar{N}^{\bar{G}}/\bar{N}_{\bar{G}}$ di [20].

Dal teorema D si vede che se $\sigma: G \to \bar{G}$ è una proiettività e se $N \lhd G$, allora sono equivalenti le affermazioni: i) $\bar{N} \underset{q}{<} \bar{G}$, ii) $\bar{N} \underset{a}{<} \bar{G}$,

(³) Vedi (**).

iii) esiste un $R \lhd G$ con $G/R \in P(n, p)$, $2 \leq n \leq \infty$, $\bar{R} \lhd \bar{G}$, $[N:N \wedge R] = p$, $[\bar{N}:\bar{N} \wedge \bar{R}] = q < p$. Vogliamo ora far vedere come i), ii) e iii) sono equivalenti se $N \underset{q}{<} G$ come pure ii) è equivalente a iii) dopo aver indebolita la condizione $N \lhd G$ a quella $N \underset{a}{\leq} G$. Premettiamo alcune proposizioni di carettere piuttosto tecnico.

3.8 Proposizione. *Sia σ: $G \to \bar{G}$ una proiettività, $K \lhd N \lhd G$, $\bar{K} \lhd \bar{N}$, $N/K \in P(n, p)$, $2 \leq n \leq \infty$ e σ singolare a p. Allora per ogni $X \lhd N$ e $K \leq X$ è $X \lhd G$.*

Dim. In virtù di 1.3 esiste $K_0 \leq K$, K_0 L-invariante in N, per cui $K_0 \lhd G$ ed $N/K_0 \in P(*, p)$. Per la singolarità a p esiste un $g \in N$ tale che $[\langle g, K\rangle:K] = p$ mentre $[\langle g, K\rangle^\sigma:\bar{K}] = q < p$. Sia ora $K_0 < T \leq N$ con $[T:K_0] = p^\beta$, $0 < \beta \neq \infty$, $g \in T$ e sia x un elemento di G; posto $H = \langle T, x\rangle$, è $[H:K_0] < \infty$ dovendo essere per 2.9 G/N periodico e $\langle N, x\rangle/K_0$ dunque localmente finito e così per 3.4 σ: $H/K_{0\bar{H}} \to \bar{H}/\bar{K}_{0\bar{H}}$ è una proiettività tra gruppi finiti. È $K_{0\bar{H}} \leq K_0 \leq \langle g, K_0\rangle \leq H$ per cui σ ha una singolarità a p su $H/K_{0\bar{H}}$. Distinguiamo le due possibilità:

a) σ ha una singolarità di prima specia a p.

Detto $S/K_{0\bar{H}}$ un p-Sylow di $H/K_{0\bar{H}}$, esso ha complemento normale $C/K_{0\bar{H}}$ in $H/K_{0\bar{H}}$ [22] per cui si avrà $H/K_0 = SK_0/K_0 \vee CK_0/K_0$ ove SK_0/K_0 è un p-Sylow e CK_0/K_0 un suo complemento normale in H/K_0. Sia R/K_0 il p-Sylow di N/K_0; è $R \lhd G$ per cui $R \wedge H \lhd H$ e da $K_0 < T \leq R \wedge H$ segue $R \wedge H/K_0 \times CK_0/K_0$; ne segue $L^x = L$ per ogni $K_0 \leq L \leq T$.

b) σ ha una singolarità di seconda specie a p.

Risulta $H/K_{0\bar{H}} = P/K_{0\bar{H}} \times C/K_{0\bar{H}}$ [22], per cui ogni p-sottogruppo di H/K_0 è normale in H/K_0, quindi di nuovo $L^x = L$ se $K_0 \leq L \leq T$.

Per l'arbitrarietà di $x \in G$ si conclude $L \lhd G$; ora ogni $X/K_0 \lhd N/K_0$ si esaurisce con gruppi L/K_0 quali considerati, per cui $X \lhd G$. //

3.9 Proposizione *Sia σ: $G \to \bar{G}$ una proiettività, $K \lhd N \lhd G$, N/K un P-gruppo d'ordine $p^\alpha r^\gamma$, $1 \leq \alpha \leq \infty$, $0 \leq \gamma \leq 1$, $r < p$, $\bar{K} \lhd \bar{N}$ e σ: $N/K \to \bar{N}/\bar{K}$ singolare a p. Allora esiste un $K_1 \lhd G$, $K \leq K_1$, G/K_1 un P-gruppo d'ordine $p^{\alpha_1} r^{\gamma_1}$, $\alpha \leq \alpha_1$, $\gamma \leq \gamma_1 \leq 1$ e l'omomorfismo canonico π: $G \to G/K_1$ subordina un monomorfismo su N/K. Inoltre $\bar{K}_1 \lhd \bar{G}$ ed esiste un $g \in N$ tale che*

$$[\langle g, K\rangle:K] = [\langle g, K_1\rangle:K_1] = p\,, \quad [\langle g, K\rangle^\sigma:\bar{K}] = [\langle g, K_1\rangle^\sigma:\bar{K}_1] = q < p\,.$$

DIM. Esiste un $K < T < N$ con $[T:K] = p$ mentre $[\bar{T}:\bar{K}] = q < p$; posto $T = \langle K, g\rangle$, $\langle \bar{g}\rangle = \langle g\rangle^\sigma$, sarà $\bar{T} = \langle \bar{g}, \bar{K}\rangle$, $g^p \in K$, $\bar{g}^q \in \bar{K}$. Per 3.8 è poi $T \lhd G$. Consideriamo ora il gruppo G/T; poichè $\bar{T} \underset{q}{<} \bar{N}$ sarà $\bar{T} \underset{q}{<} \bar{G}$. Così per 3.5 si avrà $G/T = R/T \times C/T$ ove $K < T < N \leq R$ ed è $K = T_{\bar{N}} = T_{\bar{R}}$ visto che $\bar{K} \lhd \bar{N}$; ancora è $R \wedge C = T$ e $\bar{T} \underset{q}{<} \bar{R}$ per cui $\bar{C} \not\lhd \bar{G}$ e così per 1.3 sarà $G \rhd C_{\bar{G}} = C_{\bar{R}} \geq R_{\bar{R}} \wedge C_{\bar{R}} = R \wedge C_{\bar{R}} = T_{\bar{R}} = K$; è $g \notin C_{\bar{G}} = K_1$ perchè altrimenti $g \in R \wedge C_{\bar{G}} = K$ una contraddizione. Ora $G/K_1 \simeq R/K \geq N/K$ (cf. formula (4) nella dim. di 3.5), il monomorfismo essendo indotto dalla restrizione di π: $G \to G/K_1$ su R/K per cui $N^\pi/K^\pi \simeq N/K$. E la conclusione è ora facile. //

3.10 PROPOSIZIONE. *Sia σ: $G \to \bar{G}$ una proiettività e sia $\{N_\beta\}_{0 \leq \beta \leq \mu}$ una catena normale ascendente da N a G. Supponiamo che sia $K \lhd N$ e N/K un P-gruppo d'ordine $p^{\alpha_0} r^{\gamma_0}$, $1 \leq \alpha_0 \leq \infty$, $0 \leq \gamma_0 \leq 1$, $r < p$, $\bar{K} \lhd \bar{N}$ e σ singolare a p su N/K.*

Allora per ogni β con $0 \leq \beta \leq \mu$, esiste un sottogruppo K_β di G soddisfacente alle seguenti condizioni:

i) *se $0 \leq \delta \leq \beta$ allora $K = K_0 \leq K_\delta \leq K_\beta$,*

ii) *$K_\beta \lhd N_\beta$, N_β/K_β è un P-gruppo relativo a p e se $\delta \leq \beta$ l'omomorfismo canonico π_β: $N_\beta \to N_\beta/K_\beta$ induce un monomorfismo su N_δ/K_δ,*

iii) *$\bar{K}_\beta \lhd \bar{N}_\beta$, σ è singolare a p su N_β/K_β.*

DIM. Per la dimostrazione usiamo induzione transfinita su β.

Per $\beta = 0$, il gruppo $K_0 = K$ soddisfa evidentemente alle tre condizioni i), ii), iii). Sia ora $\beta > 0$; supponiamo vera la proposizione per ogni $0 \leq \delta < \beta$ e proviamo che di conseguenza la proposizione è vera per β. Distinguiamo 2 casi.

a) β non è ordinale limite.

Posto $\varrho = \beta - 1$, per ipotesi induttiva esiste un $K_\varrho \leq G$ soddisfacente alle condizioni i), ii) e iii). Usando 3.9 possiamo affermare che a partire da K_ϱ esiste un $K_\beta \leq G$ tale che $K_\varrho \leq K_\beta \lhd N_\beta$ soddisfacente ad i), alla prima parte di ii) e alla iii). Per completare sia $\delta \leq \varrho < \beta$ e $xK_\delta \neq yK_\delta$ due elementi distinti di N_δ/K_δ; allora per ipotesi induttiva è $xK_\varrho \neq yK_\varrho$ e dunque per 3.9 è pure $xK_\beta \neq yK_\beta$.

b) β è un ordinale limite.

Risulta $N_\beta = \bigcup_{\varrho<\beta} N_\varrho$ e poichè $K_{\delta_1} \leq K_{\delta_2}$ se $\delta_1 \leq \delta_2 < \beta$, posto $K_\beta = \bigcup_{\varrho<\beta} K_\varrho$, sarà $K_\beta \leq G$. Esaminiamo in ordine le proprietà di K_β.

i): è ovviamente vera.

ii): è $K_\beta \leq N_\beta$ ed anzi $K_\beta \lhd N_\beta$: sia infatti $t \in K_\beta$ ed $x \in N_\beta$; allora esistono β', β'' con $\beta' < \beta, \beta'' < \beta$ tali che $t \in K_{\beta'}$ ed $x \in N_{\beta''}$; se $\beta' \leq \beta''$ allora $t \in K_{\beta''} \lhd N_{\beta''}$ per cui $t^x \in K_\beta$; se $\beta'' < \beta'$ sarà $x \in N_{\beta'}$, $t \in K_{\beta'} \lhd N_{\beta'}$ per cui di nuovo $t^x \in K_\beta$. Consideriamo l'omomorfismo canonico π_β: $N_\beta \to N_\beta/K_\beta$ e sia $\delta < \beta$; siano $xK_\delta \neq yK_\delta$ e $xK_\beta = yK_\beta$: sarà $y = xz$ con $z \in K_{\delta_0}$ $\delta_0 < \beta$ per cui $xK_{\delta_0} = yK_{\delta_0}$ e così $\delta < \delta_0$; ora l'omomorfismo canonico π_{δ_0}: $N_{\delta_0} \to N_{\delta_0}/K_{\delta_0}$, induce, per ipotesi induttiva un monomorfismo su N_δ/K_δ per cui $xK_{\delta_0} \neq yK_{\delta_0}$, una contraddizione. Pertanto π_β induce un monomorfismo su N_δ/K_δ per $\delta < \beta$, e poichè N_δ/K_δ è un P-gruppo, $N_\beta/K_\beta = \bigcup_{\delta<\beta} N_\delta K_\beta/K_\beta$ è un elemento di $P(m, p)$ con $\alpha_0 \leq m$.

iii): è per $\delta < \beta$, $\bar{K}_\delta \lhd \bar{N}_\delta$ per cui $\bar{K}_{\bar{\delta}} = \bigcup_{\delta<\beta} \bar{K}_\delta \lhd \bar{N}_\beta = \bigcup_{\delta<\beta} \bar{N}_\delta$. Infine sia $N \geqslant M = \langle g, K_0 \rangle$ con $[M : K_0] = p$ ed $[\bar{M} : \bar{K}_0] = q < p$. Posto $\langle \bar{g} \rangle = \langle g \rangle^\sigma$, sarà $g^p \in K_0$, $\bar{g}^q \in \bar{K}_0$ e poichè π_β è un monomorfismo su N_0/K_0 sarà $g \notin K_\beta$, $g^p \in K_\beta$, $\bar{g} \notin \bar{K}_\beta$, $\bar{g}^q \in \bar{K}_\beta$, e la conclusione è ora facile. //

TEOREMA F. *Sia σ: $G \to \bar{G}$ una proiettività ed $N \underset{a}{\leq} G$. Allora $\bar{N} \underset{\bar{a}}{\leq} \bar{G}$ se e solo se esiste un $R \lhd G$ tale che $G/R \in P(n, p)$, $\bar{R} \lhd \bar{G}$, $[N : N \wedge R] = p$, $[\bar{N} : \bar{N} \wedge \bar{R}] = q < p$.*

DIM. Sufficienza. Nel gruppo $\bar{G}/\bar{R} \in P(n, p)$, $\bar{N}\bar{R}/\bar{R}$ ($\simeq \bar{N}/\bar{N} \wedge \bar{R}$) è un sottogruppo d'ordine $q < p$ per cui $\bar{N}\bar{R} \underset{\bar{a}}{\leq} \bar{G}$ e poichè $\bar{R} \lhd \bar{G}$ non può neppure essere $\bar{N}$ ascendente in $\bar{G}$.

Necessità. Sia $\{N_\beta\}_{0 \leq \beta \leq \mu}$ una catena normale ascendente da N a G. Poniamo $A = \{\alpha \leq \mu | \bar{N} \underset{\bar{a}}{<} \bar{N}_\alpha\}$; da $\bar{N} \underset{\bar{a}}{<} \bar{G}$ segue $\mu \in A$ e così $A \neq \emptyset$; sia β il minimo di A; sarà $\beta > 0$ e per $\delta < \beta$ è $\bar{N} \underset{a}{<} \bar{N}_\delta$ per cui β non può essere un ordinale limite. Ora $N_{\beta-1} \lhd N_\beta$ e se fosse $\bar{N}_{\beta-1} \underset{\bar{q}}{<} \bar{N}_\beta$ sarebbe $\bar{N} \underset{a}{<} \bar{N}_\beta$, una contraddizione. Pertanto $\bar{N}_{\beta-1} \underset{\bar{q}}{<} \bar{N}_\beta$; in base al teorema D (le veci di N assume ora $N_{\beta-1}$ e quelle di G il gruppo N_β) esiste un naturale i tale che $N_{\beta-1} \leq C_i \lhd N_\beta$ e con $C_{i\bar{N}_\beta} \wedge \wedge N < N$: infatti altrimenti $\Gamma_{\bar{N}_\beta} \geq N$ e così $N \leq N_{\beta-1} \wedge \Gamma_{\bar{N}_\beta}$ e dunque $\bar{N} \underset{a}{\leq} \bar{\Gamma}_{\bar{N}_\beta} \wedge \bar{N}_{\beta-1} \underset{q}{<} \bar{N}_\beta$ ossia $\bar{N} \underset{a}{<} \bar{N}_\beta$ una contraddizione. Dunque $C_i \geq N$ e $K = C_{i\bar{N}_\beta} \ngeqslant N$; ora $[C_i : K] = p_i (= p)$ per cui $C_i = KN = KN_{\beta-1}$; $\bar{C}_i = \bar{K}\bar{N} = \bar{K}\bar{N}_{\beta-1}$ per cui $[N : N \wedge K] = [C_i : K] = p$ mentre $[\bar{N} : \bar{N} \wedge \wedge \bar{K}] = [\bar{C}_i : \bar{K}] = q < p$. Usando ora 3.10 esiste un $R = K_\mu \lhd G$ tale che $R \wedge N_\beta = K$ per cui $R \wedge N = (R \wedge N_\beta) \wedge N = K \wedge N$ e dunque $[N : : N \wedge R] = p$ mentre $[\bar{N} : \bar{N} \wedge \bar{R}] = [\bar{N} : \bar{N} \wedge \bar{K}] = q < p$; è ancora $\bar{R} \lhd \bar{G}$, $G/R \in P(n, p)$. //

OSSERVAZIONE 6. Sia ora $\sigma\colon G \to \bar{G}$ una proiettività ed $N \underset{q}{<} G$. Sarà $\bar{N} \underset{d}{<} \bar{G}$ e se $\bar{N} \underset{\bar{q}}{<} \bar{G}$ dovrà essere $\bar{N} \underset{\bar{a}}{\leq} \bar{G}$ [19] e il viceversa è noto [18]. Se poi $N \underset{a}{\leq} G$, teorema F ci dice che ii) e iii) a pag. 63 sono equivalenti.

Terminiamo il presente numero mettendo in evidenza alcuni interessanti corollari.

3.11 COROLLARIO. *Sia $\sigma\colon G \to \bar{G}$ una proiettività. Allora G è semplice se e solo se tale è $\bar{G}$.*

Dim. Da $\{1\} \neq \bar{N} \underset{\neq}{\lhd} \bar{G}$ segue per teorema D che $N \underset{|q}{<} G$ essendo G perfetto; ma allora G non è semplice [18].

3.12 COROLLARIO. *Sia $\sigma\colon G \to \bar{G}$ una proiettività, $N \lhd G$ e G/N un gruppo privo di sottogruppi normali nilpotenti non banali. Allora $\bar{N} \lhd \bar{G}$.*

DIM. Sia $\bar{N} \ntriangleleft \bar{G}$; esiste un $\bar{g} \in \bar{G}$ con $N^{\bar{g}} \vee N > N$; per teorema D deve essere $N^{\bar{g}} \underset{q}{<} G$ e così $N \vee N^{\bar{g}}/N$ è un sottogruppo ciclico finito (teorema B) non identico e quasinormale di G/N; ciò basta per dire [2] che G/N contiene un sottogruppo nilpotente normale non identico. //

Facciamo qualche ulteriore considerazione. All'uopo sia, di nuovo, $\sigma\colon G \to \bar{G}$ una proiettività ed $N \underset{a}{\leq} G$. Se $\bar{N} \underset{\bar{a}}{\leq} \bar{G}$ per il teorema F esiste un $R \lhd G$ tale che $\bar{R} \lhd \bar{G}$, $G/R \in P(*, p)$ e σ ha una singolarità a p su G/R. Definiamo il seguente insieme π di numeri primi: $p \in \pi$ se e solo se esiste un $K \lhd G$ con $\bar{K} \lhd \bar{G}$, $G/K \in P(n, p)$ e σ è singolare a p su G/K. Per ogni $p \in \pi$ consideriamo il gruppo K_p quale definito in 1.3 v) e poniamo $\mathcal{K} = \bigwedge_p K_p$. Il gruppo $\mathcal{K}$ è un sottogruppo L-invariante univocamente definito da σ e usando le considerazioni in teorema D *e*) si vede che $G/\mathcal{K}$ è un prodotto diretto (discreto) di P-gruppi di Hall e su ciascun fattore H σ presenta una singolarità a p se $H \in P(*, p)$; essendo $G/\mathcal{K}$ e $\bar{G}/\bar{\mathcal{K}}$ metabeliano sarà $G'' \leq \mathcal{K}$ e $\bar{G}'' \leq \bar{\mathcal{K}}$. Usando teorema D e 3.10 è non difficile vedere che $\bar{N} \underset{a}{\leq} \bar{N}\bar{\mathcal{K}}$ (4) e dunque pure $\bar{N} \wedge \bar{\mathcal{K}} \underset{a}{<} \bar{\mathcal{K}} \lhd \bar{G}$. Quanto detto ci porta a formulare questo altro interessante

3.13 COROLLARIO. *Sia $\sigma\colon G \to \bar{G}$ una proiettività ed $N \leq G$*

(4) Devo ad una gentile comunicazione scritta di Rips una simile osservazione.

i) *se* $N \underset{a}{\leq} G$ *allora* $\bar{N} \underset{a}{\leq} \bar{N} \vee (G'')^{\sigma} \vee \bar{G}''$, *mentre* $\bar{N} \wedge (G'')^{\sigma}$, $\bar{N} \wedge \bar{G}''$ *e* $\bar{N} \wedge (G'')^{\sigma} \wedge \bar{G}''$ *sono ascendenti in* $\bar{G}$,

ii) *se* $N \underset{q}{<} G$ *allora* $\bar{N} \underset{q}{<} \bar{N} \vee (G'')^{\sigma} \vee \bar{G}''$ *mentre se* $N \lhd G$ *è* $\bar{N} \wedge \wedge (G'')^{\sigma} \underset{q}{<} \bar{G}$.

OSSERVAZIONE 7. La 3.13 in particolare ci dice che se G o $\bar{G}$ è perfetto allora σ e σ^{-1} preservano la quasi-normalità. Sfruttando tale fatto Napolitani [8] ha provato recentemente che la classe dei gruppi perfetti è proiettivamente invariante e che $S^{\sigma}(G) = S(G^{\sigma})$ qualora $S(G) = \bigwedge_{\alpha} G^{(\alpha)}$ ove $\{G^{(\alpha)}\}_{\alpha}$ è la serie transfinita dei derivati successivi di G. Se G/N è finito, $\sigma\colon G/N_{\bar{G}} \to \bar{G}/\bar{N}_{\bar{G}}$ è una proiettività tra gruppi finiti ed allora si sa [22] che se G/N è perfetta risulta $\bar{N} \lhd \bar{G}$; se la cosa sia vera anche se G/N non è finito non ci è noto; per 3.12 possiamo certo affermare che $\bar{Z} \lhd \bar{G}$ se Z/N è il centro di G/N visto che G/Z è privo di sottogruppi nilpotenti normali.

4. Le considerazioni che svolgeremo nel presente numero intendono principalmente estendere ai gruppi infiniti diverse affermazioni contenute in [15] e [16].

4.1 LEMMA. *Sia* G *un gruppo,* $M \underset{q}{<} G$, $|M| = p$, *un primo, ed* $M_G = \{1\}$. *Allora valgono i seguenti fatti*: i) M^G *è un* p*-gruppo abeliano elementare non ciclico ed* $M^G \leq \operatorname{Norm} G \leq Z_2(G)$; ii) $M^G = M \times \times M^G \wedge \Omega(Z(G))$ (5); iii) *se* $x \in G - \mathcal{C}(M)$, *allora* $\langle x \rangle \wedge Z(G) \wedge M^G \neq \{1\}$ *ed è* $\mathcal{C}(M) = \mathcal{C}(M^G)$; iv) $G/\mathcal{C}(M)$ *è* p*-abeliano elementare e* $G - \mathcal{C}(M)$ *è formato da elementi periodici a* p*-componente non identica.*

DIM. i) Per 1.3 in [2] è $M^G \leq \mathcal{C}\langle x \in G \,|\, |x| = 0$ o x un p'-elemento$\rangle$; se poi x è un p-elemento di G è $\langle x \rangle \leqq\cdot \langle M, x \rangle$ per cui $M \leq \mathcal{N}\langle x \rangle$, sicchè $M \leq \bigwedge_{X \leqslant G} \mathcal{N}(X) = \operatorname{Norm} G \leq Z_2(G)$; ii) per i) è $MZ(G) \lhd G$ e così $MZ(G) = M^G Z(G)$ per cui $M^G = M^G \wedge (MZ(G)) = M \times (M^G \wedge Z(G))$ iii) è $[G', Z_2] = \{1\}$ per cui $[M, G'] = \{1\}$ e così $G' \leq \mathcal{C}(M) \lhd G$ e dunque anche $\mathcal{C}(M) = \mathcal{C}^g(M) = \mathcal{C}(M^g)$ per cui $\mathcal{C}(M) = \mathcal{C}(M^G)$; ora $\langle x \rangle \wedge M^G = \{1\}$ implica $\langle x \rangle \times M^G$ visto che $\mathcal{N}\langle x \rangle \geq M^G$ e così $x \in \mathcal{C}(M)$; se $\langle x \rangle \wedge M^G \wedge \Omega(Z(G)) = \{1\}$ allora per ii) è $M^G = (\langle x \rangle \wedge M^G) \times (M^G \wedge \wedge \Omega(Z(G)))$ visto che $\langle x \rangle \wedge M^G \neq \{1\}$ e dunque $M^G \leq \mathcal{C}(x)$ una contraddizione; iv) sia $M = \langle a \rangle$; per i) è $[x, a] = z \in Z(G)$ per cui $a^x = az$, $z \in \Omega(Z(G))$ per cui $a^{x^p} = az^p = a$, ossia $x^p \in \mathcal{C}(M)$ e dunque il gruppo

(5) $\Omega(Z(G))$ è il gruppo generato dagli elementi d'ordine primo di $Z(G)$.

abeliano $G/\mathcal{C}(M)$ è p-abeliano elementare per iii) ed i) ogni $x \in G - \mathcal{C}(M)$ è periodico con ordine divisibile per p. //

4.2 Proposizione. *Sia $\sigma\colon G \to \bar{G}$ una proiettività. Allora*

$$\Omega^\sigma(Z(G)) \lhd \bar{G}.$$

Dim. Sia $\Omega_p(Z(G))$ una componente p-primaria di $\Omega(Z(G))$ e distinguiamo 3 casi:

a) $N^\tau \lhd G$ per ogni $\{1\} < N \leq \Omega(Z(G))$ ed ogni $\tau \in P(G)$.

Da $N^\tau \lhd G$ segue che $N^\tau \leq Z(G)$ e dunque $\left(\Omega_p^\sigma(Z(G))\right)^{\bar{g}} \leq \Omega^\sigma(Z(G))$ per ogni $\bar{g} \in \bar{G}$.

b) Esiste un $\tau \in P(G)$ ed un $\{1\} < N \leq \Omega_p(Z(G))$ tale che $N^\tau \underset{q}{<} G$ e $N^\tau \ntriangleleft G$.

Posto $M = N^\tau$, sia $q = |M| \neq p$. Detto S un p-Sylow di G, sarà $N \leq S$ e poichè per ogni $x \in S$ da $|\langle N, x\rangle| \neq |\langle N, x\rangle^\tau|$ e $N^\tau \underset{q}{<} G$ segue che $\langle N, x\rangle$ è ciclico, S è necessariamente uno $Z(p^\alpha)$-gruppo $1 \leq \alpha \leq \infty$; ciò comporta che $N^\tau \lhd S^\tau$ e dunque $N^\tau \lhd G$ contro ipotesi. Si ha dunque $|M| = p = |N|$. Per ogni p-elemento x di $G - \mathcal{C}(M)$ è $\Omega(Z(G)) = \Omega\big(\Omega(Z(G)) \vee \langle x\rangle\big)$: infatti da $\Omega(Z(G)) \leq \Omega(Z(G)) \vee \langle x\rangle$ segue $\Omega(Z(G)) \leq \Omega\big(\Omega(Z(G)) \vee \langle x\rangle\big)$; sia $y \in \Omega\big(\Omega(Z(G)) \vee \langle x\rangle\big)$ e possiamo supporre y d'ordine primo q; se $q \neq p$, poichè x è un p-elemento, sarà $y \in \Omega(Z(G))$; se poi $q = p$ da $y = zx^r$ con $[z, x] = 1$ e $z^p = 1$ si ha $1 = y^p = z^p x^{rp} = x^{rp}$ per cui $|x^r| \leq p$ e così per 4.1 iii) è $x^r \in \langle x\rangle \wedge \Omega(Z(G))$ e infine $y \in \Omega(Z(G))$. Pertanto si ha $\Omega^\sigma(Z(G)) = \Omega^\sigma\big(\Omega(Z(G)) \vee \langle x\rangle\big) = \Omega\big(\Omega^\sigma(Z(G)) \vee \langle x\rangle^\sigma\big) \lhd \Omega^\sigma(Z(G)) \vee \langle x\rangle^\sigma$; $\Omega_p^\sigma(Z(G))$ è centralizzato da $\langle g\rangle^\sigma$ se $|g| = 0$ o p'-elemento; per $x \in G - \mathcal{C}(M)$ scomposto $\langle x\rangle = \langle x_p\rangle \times \langle x'\rangle$, $\langle x_p\rangle$ la p-componente, da $\Omega_p^\sigma(Z(G)) \underset{c}{<} \Omega^\sigma(Z(G))$ segue che $\Omega_p^\sigma(Z(G))$ è normalizzato da $\langle x_p\rangle^\sigma$ e centralizzato da $\langle x'\rangle^\sigma$ per cui $\langle x\rangle^\sigma$ normalizza $\Omega_p^\sigma(Z(G))$; ma $\bigvee_{x \in G - \mathcal{C}(M)} \langle x\rangle = G$ per cui $\Omega_p^\sigma(Z(G)) \lhd \bar{G}$.

c) Esiste un $\{1\} < N \leq \Omega(Z(G))$ e un $\tau \in P(G)$ con $N^\tau \underset{q}{<} G$.

Posto $G^\tau = \bar{G}$, in virtù del teorema E è $G = \bar{G} = (N^\tau)^{\bar{g}} \times T$ con $(N^\tau)^{\bar{g}} = P$ un P-gruppo e fattore di Hall di $\bar{G} = G$; ne segue che P è L-invariante per cui $N \leq P$ e così P è abeliano elementare essendo $N \leq Z(P)$; ma allora $N^\tau \lhd G$, una contraddizione.

Per *a*) e *b*) abbiamo dunque che per ogni $\bar{g} \in \bar{G}$, $\left(\Omega_p^\sigma(Z(G))\right)^{\bar{g}} \leq \Omega^\sigma(Z(G))$ e da qui $\left(\Omega^\sigma(Z(G))\right)^{\bar{g}} = \left(\bigvee_p \Omega_p^\sigma(Z(G))\right)^{\bar{g}} = \bigvee_p \left(\Omega_p^\sigma(Z(G))\right)^{\bar{g}} \leq \Omega^\sigma(Z(G))$ ossia $\Omega^\sigma(Z(G)) \lhd \bar{G}$. //

4.3 TEOREMA. *Sia* $\sigma\colon G \to \bar{G}$ *una proiettività ed* N *un sottogruppo normale d'ordine primo* p. *Allora una ed una sola delle seguenti circostanze è presente*: i) $\bar{N} \lhd \bar{G}$, ii) $N^{\bar{G}} \leq \Omega(Z(G))$ *e* $\bar{N}^{\bar{G}} = \bar{N} \times \big(\bar{N}^{\bar{G}} \wedge \Omega(Z(\bar{G}))\big) \leq$ $\leq Z_2(\bar{G})$ *con* $\bar{N}^{\bar{G}}$ p*-gruppo abeliano elementare non ciclico isomorfo ad* $N^{\bar{G}}$, iii) $G = (P = N^{\bar{G}}) \times T$, $\bar{G} = \bar{P} \times \bar{T}$, G *e* $\bar{G}$ *periodici*, P, $\bar{P}$ *in* $P(n, p)$, $2 \leq n \leq \infty$ *e fattori di Hall*, $\bar{P}$ *non abeliano e* σ *singolare a* p *su* P.

DIM. Sia $\bar{N} \ntriangleleft \bar{G}$. Se $\bar{N} \underset{q}{<} \bar{G}$, per 4.1 è $\bar{N}^{\bar{G}} = \bar{N} \times \bar{N}^{\bar{G}} \wedge \Omega(Z(\bar{G})) \leq Z_2(\bar{G})$. Sia $q = |\bar{N}|$; per 1.3 in [2] esiste un q-elemento $\bar{x} \in \bar{G}$ con $\bar{x} \notin \mathcal{N}(\bar{N})$; pertanto [22] $|\langle \bar{N}, \bar{x} \rangle| = |\langle \bar{N}, \bar{x} \rangle^{\sigma^{-1}}|$ sicchè $q = |\bar{N}| = |N| = p$. Se ora $|x| = 0$ o p'-elemento, per 1.3 in [2] sarà $\langle x \rangle^{\sigma} \times \bar{N}$ e così $\langle x \rangle \times N$ per cui $N \leq Z(G)$. Abbiamo così $N \leq \Omega(Z(G))$ e dunque per 4.2 sarà $P = N^{\bar{G}} \leq \Omega(Z(G))$ e $\bar{P} = \bar{N}^{\bar{G}}$ p-abeliano elementare per cui $P \simeq \bar{P}$. Se poi $\bar{N} \underset{q}{<} \bar{G}$, si usi teorema E per concludere. //

OSSERVAZIONE 8. Sia $\sigma\colon G \to \bar{G}$ una proiettività ed N un sottogruppo normale minimo di G. Se $\bar{N} \ntriangleleft \bar{G}$, N è necessariamente p-abeliano elementare: infatti da $N' = N$ segue $\bar{N} \lhd \bar{G}$ (1.7); sarà $N' = \{1\}$ e dunque N abeliano privo di sottogruppi caratteristici e non divisibile (1.7); ma allora N è p-abeliano elementare. Se poi N non è ciclico è $\bar{N} \underset{q}{<} \bar{G}$: infatti per 3.4 è $N_{\bar{G}} = \{1\}$ e per teorema E se $\bar{N} \underset{q}{<} \bar{G}$ è $[N : N_{\bar{G}}] = p$, una contraddizione. È poi anche N isomorfo ad $\bar{N}$ dovendo essere $\bar{N}$ residualmente nilpotente finito (3.7), sempre se N non è ciclico. Ne viene anche che σ conserva l'ordine dei p-gruppi ciclici. Se N è finito, inoltre, e non ciclico è $\bar{N} \lhd \bar{G}$: infatti se no è $\bar{N} \underset{q}{<} \bar{G}$ con $\bar{N}_{\bar{G}} = \{1\}$; allora Busetto (6) ha provato che $[\bar{G} : \mathrm{C}(\bar{N})] = p^m$ per cui $N \leq Z_\infty(G)$ e questo implica $|N| = p$, una contraddizione.

4.4 PROPOSIZIONE. *Sia* $\sigma\colon G \to \bar{G}$ *una proiettività ed* N *un sottogruppo normale ciclico di* G. *Allora i gruppi* $N^{\bar{G}}$, $\bar{N}^{\bar{G}}$ *sono iperciclicamente immersi.*

DIM. *a*) N d'ordine finito.

Se $|N| = p$, un primo, la cosa consegue da 4.3; usando 3.4 ed induzione sul numero dei fattori primi di $|N|$ si conclude.

b) N è d'ordine infinito.

È ora $\bar{N} \underset{q}{<} \bar{G}$ (teorema C) e così per 2.2 e 2.9 in [2] è $\bar{N}^{\bar{G}} = \bar{N}\mathcal{T}(\bar{N}^{\bar{G}})$ con $\mathcal{T}(\bar{N}^{\bar{G}}) \leq Z_\omega(\bar{G})$ per cui $\bar{N}^{\bar{G}}$ è iperciclicamente immerso in $\bar{G}$. È $\mathcal{T}(N^{\bar{G}}) \underset{c}{<} N^{\bar{G}} \lhd G$ (3.4) per cui per concludere basta provare che $\mathcal{T}(N^{\bar{G}})$

(6) Communicazione orale.

è iperciclicamente immerso in G. All'uopo basterà provare che se $K \lhd G$, se K è periodico e iperciclicamente immerso in G allora $\bar{K}$ è iperciclicamente immerso in $\bar{G}$. Esiste una catena ascendente $\{K_\alpha\}_{0 \leq \alpha \leq \gamma}$ di sottogruppi normali di G con $K_0 = \{1\}$, $K_\gamma = K$ e $K_{\alpha+1}/K_\alpha$ d'ordine primo. Ora usando 3.4 e 4.3, mediante un ragionamento d'induzione transfinita su α, si conclude che $\bar{K}^{\bar{G}}$ e dunque anche $\bar{K}$ è iperciclicamente immerso in $\bar{G}$. //

4.5 Teorema. *Sia $\sigma: G \to \bar{G}$ una proiettività. Posto $\varrho(G) = \langle X \leq G | X$ iperciclicamente immerso in $G \rangle$, risulta $\varrho^\sigma(G) = \varrho(\bar{G})$.*

Dim. Esiste una catena ascendente $\{N_\alpha\}_{\alpha \leq \gamma}$ di sottogruppi normali di G con $N_{\alpha+1}/N_\alpha$ ciclico, $N_0 = \{1\}$, $N_\gamma = \varrho(G)$. Posto $K_\alpha = N_\alpha^{\bar{G}}$ per 3.4 è $\{K_\alpha\}_{\alpha \leq \gamma}$ una catena ascendente di sottogruppi normali di G per cui si ha $\sigma: G/K_\alpha \to \bar{G}/\bar{K}_\alpha$; ora $N_{\alpha+1}K_\alpha/K_\alpha$ è ciclico e normale in G/K_α e si ha $(N_{\alpha+1}K_\alpha/K_\alpha)^{\bar{G}} = K_{\alpha+1}/K_\alpha$; per 4.4 sono dunque $K_{\alpha+1}/K_\alpha$ e $\bar{K}_{\alpha+1}/\bar{K}_\alpha$ iperciclicamente immersi. Ne segue che $\varrho^\sigma(G) \leq \bar{K}_\gamma \leq \varrho(\bar{G})$; similmente $\varrho^{\sigma^{-1}}(\bar{G}) \leq \varrho(G)$ e dunque $\varrho^\sigma(G) = \varrho(\bar{G})$. //

Volgiamo ora la nostra attenzione al comportamento del radicale di Hirsch-Plotkin rispetto alle proiettività.

4.6 Lemma. *Sia $\sigma: G \to \bar{G}$ una proiettività ed N un p-gruppo normale di G contenuto nel radicale di Hirsch-Plotkin di G. Se $\bar{N} \underset{\bar{G}}{\leq} \bar{G}$ allora $G = N^{\bar{G}} \times T$ con $N^{\bar{G}}$ un P-gruppo e fattore di Hall di G; σ è singolare su N.*

Dim. N è localmente finito è da $\bar{N} \underset{\bar{G}}{\leq} \bar{G}$ segue che σ ha una singolarità su N per cui N è p-abeliano elementare oppure uno $Z(p^\alpha)$-gruppo.

a) N è uno $Z(p^\alpha)$-gruppo.

a_1) $\alpha = 1$.

Per 4.3 si conclude

a_2) $\alpha > 1$.

Per teorema E è $G/N_{\bar{G}} = P/N_{\bar{G}} \times G/N_{\bar{G}}$ ove $P/N_{\bar{G}} = (N/N_{\bar{G}})^{\bar{G}}$ è un P-gruppo; ora P è localmente finito con il p-Sylow S normale e σ su S ha una singolarità per cui P stesso è un P-gruppo relativo a p e dunque $|N| = p$ una contraddizione.

b) N abeliano elementare non ciclico.

Per ogni $X \leq N$ è $X \lhd G$ (3.8); ora esiste un $\{1\} < M \leq N$ con

$\bar{M} \underset{q}{<} \bar{N}$ e da qui abbiamo $M \lhd G$, $\bar{M} \underset{q}{<} \bar{G}$. Per 4.3 è ora $G = M^{\bar{G}} \times T$ con $M^{\bar{G}} \geq N$ e risulta un S-fattore relativo a p; dunque $N^{\bar{G}} \leq M^{\bar{G}}$ e così $N^{\bar{G}} = M^{\bar{G}}$ e $G = N^{\bar{G}} \times T$, $N^{\bar{G}} \in P(n, p)$. //

Sia σ: $G \to \bar{G}$ una proiettività; diremo che σ ha *una p-singolarità su G* se e solo se G è un S-gruppo e vi esiste un S-fattore $P \in P(n, p)$ tale che σ è singolare a p su P o σ^{-1} è singolare a p su $\bar{P}$. Ciò premesso passiamo a dimostrare

TEOREMA G. *Sia σ: $G \to \bar{G}$ una proiettività ed $R(G)$ il radicale di Hirsch-Plotkin di G. Allora risulta $R^\sigma(G) = R(\bar{G})$ se e solo se σ non ha alcuna p-singolarità su G.*

DIM. *a*) G gruppo misto.

Posto $\mathfrak{T} = \mathfrak{T}(R(G))$, se $\mathfrak{T} = R(G)$, poichè $G/\mathfrak{T}$ è misto, sarà $R^\sigma(G) \underset{q}{<} \bar{G}$ (teorema B) e σ su $\mathfrak{T}$ conserva gli indici (2.9) per cui $\mathfrak{T}$ è pure localmente nilpotente e dunque $R^\sigma(G) \leq R(\bar{G})$ [12]; se poi $R(G)$ è misto, è ancora $R^\sigma(G) \underset{q}{<} \bar{G}$ (teorema C) ed $R^\sigma(G)$ è anche localmente nilpotente, sicchè di nuovo $R^\sigma(G) \leq R(\bar{G})$; in definitiva, per simmetria, $R^\sigma(G) = R(\bar{G})$.

b) G gruppo periodico.

$R(G)$ si presenta come il prodotto diretto dei suoi Sylow-gruppi, che risultano localmente nilpotenti. Sia ora G non S-gruppo ed S un Sylow-gruppo di $R(G)$; è $S \lhd G$ e per 4.6 sarà $\bar{S} \underset{q}{<} \bar{G}$ ed $\bar{S}$ ancora localmente nilpotente a meno che S non sia abeliano elementare non ciclico e σ singolare su S. Esiste allora un $\{1\} < M \leq S$ con $\bar{M} \underset{q}{<} \bar{G}$ e per 3.8 è $M \lhd G$. Ma allora per 4.3 G è un S-gruppo, contro ipotesi. Dunque, in ogni caso, $\bar{S}$ è localmente nilpotente e quasi-normale in $\bar{G}$ per cui $\bar{S} \leq R(\bar{G})$ e in definitiva $R^\sigma(G) \leq R(\bar{G})$. Se G non è un S-gruppo tale non è $\bar{G}$ per cui, in definitiva, $R^\sigma(G) = R(\bar{G})$; ed ora è facile raggiungere la sufficienza.

Sia viceversa $R^\sigma(G) = R(\bar{G})$; è allora di immediata verifica che σ non può avere alcuna p-singolarità. //

4.7 COROLLARIO. *Sia $G = P_1 \times \ldots \times P_i \times \ldots \times K$ la scomposizione del gruppo periodico G nel prodotto dei suoi S-fattori e K non S-gruppo. Allora $\bigvee_{\tau \in P(G)} R^\tau(G) = P_1 \times \ldots \times P_i \times \ldots \times R(K)$.*

DIM. È $R^\tau(K) = R(K)$ per $\tau \in P(G)$ (teorema G) mentre $\bigvee_{\tau \in P(G)} S_i^\tau = P_i$ se S_i è il p_i-Sylow normale di P_i. //

4.8 COROLLARIO [9]. *Sia* $\sigma\colon G \to \bar{G}$ *una proiettività. Allora* $\mathfrak{R}^\sigma(G) = \mathfrak{R}(\bar{G})$ *se* $\mathfrak{R}(G)$ *è l'iperradicale di Hirsch-Plotkin di* G.

OSSERVAZIONE 9. Sia $\sigma\colon G \to \bar{G}$ una proiettività, G non S-gruppo ed $R_n(G)$ l'n-esimo termine della serie ascendente degli iterati radicali di Hirsch-Plotkin. Allora $R_n^\sigma(G) = R_n(\bar{G})$ come si desume facilmente nel caso di G misto dal fatto che $R_n^\sigma(G) \underset{q}{\leq} \bar{G}$ (teorema B e C) ed usando teorema G; per G periodico si usi ancora teorema G e che $R_i(G)$ è localmente finito per cui se σ ha una singolarità di seconda specie su $R_i(G)/R_{i-1}(G)$, σ ne ha una su $R(G)$ e G sarebbe un S-gruppo. Da qui è poi anche facile vedere che $R_n^\sigma(G) = R_n(\bar{G})$ sempre se n è naturale maggiore o uguale a 2.

4.9 COROLLARIO. *Sia* $\sigma\colon G \to \bar{G}$ *una proiettività non* p*-singolare su* G *per alcun primo* p. *Allora* $g^\sigma(G) = g(\bar{G})$ *se* $g(G)$ *è il radicale di Gruenberg* (7) *di* G.

DIM. Sia $\langle x\rangle \underset{a}{\leq} G$; allora $\langle x\rangle \leq R(G)$ e per teorema G ed F sarà $\langle x\rangle^\sigma \underset{a}{\leq} R(\bar{G}) \lhd \bar{G}$ per cui $g^\sigma(G) \leq g(\bar{G})$ e dunque, per simmetria, $g^\sigma(G) = g(\bar{G})$. //

Terminiamo il numero rivolgendo la nostra attenzione al comportamento dell'ipercentro $Z_\infty(G)$ di G rispetto alle proiettività.

Osserviamo che $Z_\infty(G) \leq R(G) \wedge \varrho(G)$ e che da $N \lhd G$ ed $N \leq Z_\infty(G)$ segue $Z_\infty(G/N) = Z_\infty(G)/N$ ed $R(G/N) = R(G)/N$. In $Z_\infty(G)$ gli elementi periodici formano un sottogruppo $\mathfrak{T}$; definiamo in $\mathfrak{T}$ la seguente serie centrale ascendente: $H_0 = \{1\}$, $H_{\alpha+1}$ la controimmagine nell'omomorfismo canonico $G \to G/H_\alpha$ del gruppo $\Omega(Z(G/H_\alpha))$ e $H_\alpha = \bigvee_{\beta<\alpha} H_\beta$ se α è ordinale limite. Risulta $\mathfrak{T} = H_\mu$ per un certo ordinale μ. Sia $\sigma\colon G \to \bar{G}$ una proiettività; usando 4.2 abbiamo $\bar{H}_\alpha \lhd \bar{G}$ per $\alpha \leq \mu$. Fatte queste premesse passiamo a dimostrare il seguente

TEOREMA H. *Sia* $\sigma\colon G \to \bar{G}$ *una proiettività. Allora* $Z_\infty^\sigma(G) = Z_\infty(\bar{G})$ *se e solo se* σ *e* σ^{-1} *sugli eventuali* S*-fattori abeliani di* G *e* $\bar{G}$ *conservano la abelianità.*

DIM. Sufficienza. Non sarà restrittivo supporre G (e dunque anche $\bar{G}$) privo di eventuali S-fattori non abeliani. Da $N \lhd G$ ed $N \leq R(G)$, poichè per teorema G è $R^\sigma(G) = R(\bar{G})$, sarà $\bar{N} \underset{q}{<} \bar{G}$. Da qui ed usando

(7) Per la definizione vedasi [12].

4.3 si ricava che $\bar{H}_{\alpha+1}/\bar{H}_\alpha \leq Z_2(\bar{G}/\bar{H}_\alpha)$; si ha ora $\bar{H}_\alpha \leq \mathfrak{T}(Z_\infty(\bar{G}))$: è $\bar{H}_1 \leq \leq \mathfrak{T}(Z_2(\bar{G})) \leq \mathfrak{T}(Z_\infty(\bar{G}))$ per 4.3 e da $\bar{H}_\alpha \leq Z_\infty(\bar{G})$, poichè $\bar{H}_{\alpha+1}/\bar{H}_\alpha \leq \leq \Omega(Z_2(\bar{G}/\bar{H}_\alpha))$ segue $\bar{H}_{\alpha+1} \leq \mathfrak{T}(Z_\infty(\bar{G}))$; infine se α è ordinale limite, da $\bar{H}_\beta \leq \mathfrak{T}(Z_\infty(\bar{G}))$ per $\beta < \alpha$ segue $\bar{H}_\alpha = \bigvee_{\beta<\alpha} \bar{H}_\beta \leq \mathfrak{T}(Z_\infty(\bar{G}))$; pertanto $\bar{\mathfrak{T}} \leq \mathfrak{T}(Z_\infty(\bar{G}))$ e per simmetria sarà $\mathfrak{T}^\sigma(Z_\infty(G)) = \mathfrak{T}(Z_\infty(\bar{G}))$.

Se allora $Z_\infty(G)$ è periodico, abbiamo la conclusione. Sia dunque $Z_\infty(G)$ misto e visto che $\bar{\mathfrak{T}} = \bar{H}_\mu \lhd \bar{G}$, ragioniamo modulo $\mathfrak{T}$. Sia $\{1\} < < Z_1 < \ldots < Z_\alpha < \ldots < Z_\gamma = Z_\infty(G)$ la serie centrale ascendente di G; poniamo per induzione transfinita su α che $Z_\alpha^\sigma(G) = Z_\alpha(\bar{G})$: la cosa è banale se $\alpha = 0$ oppure se α è un ordinale limite. Poichè Z_∞ è senza torsione tale è Z_∞/Z_α; sia $\bar{Z}_\alpha = Z_\alpha(\bar{G})$ e $Z_{\alpha+1}/Z_\alpha = Z(G/Z_\alpha)$. Ragionando modulo Z_α siamo ricondotti a provare che $\bar{Z}(G) = Z(\bar{G})$. La cosa è chiara se $Z(G)$ non ha rango inferiore a 2 [22]. Abbia dunque $Z(G)$ rango 1 e sia $1 \neq z \in Z(G)$; è (teorema C) $\langle \bar{z} \rangle \underset{q}{<} \bar{G}$ e se $\langle \bar{z} \rangle \lhd \bar{G}$ è anche $\langle \bar{z} \rangle \leq \leq Z(\bar{G})$. Sia dunque, per ipotesi assurda, $\langle \bar{z} \rangle \ntriangleleft G$; per 2.1 in [2] sarà $\{1\} \neq \mathfrak{T}(\langle \bar{z} \rangle^{\bar{G}}) \leq Z^\infty(\bar{G})$; ma allora è pure $\mathfrak{T}(Z_\infty(G)) \neq \{1\}$, una contraddizione. In definitiva $Z^\sigma(G) \leq Z(\bar{G})$ e per simmetria $Z^\sigma(G) = Z(\bar{G})$.

La necessità è ovvia. //

BIBLIOGRAFIA

[1] G. Birkhoff, *Lattice theory*, Colloquim Publ. 25, New York (1948).

[2] G. Busetto, *Proprietà di immersione dei sottogruppi modulari localmente ciclici nei gruppi*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, **62** (1980), pp. 269-84.

[3] G. Busetto, *Sottogruppi normali e proiettività*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, **67** (1982).

[4] L. Fuchs, *Infinite abelian groups I*, Acad. Press, New York (1970).

[5] F. Gross, *p-subgroups of core free quasinormal subgroups*, Rochy Mountain J. Math., **1** (1971), pp. 541-50.

[6] F. Menegazzo, *Normal subgroups and projectivities of finite groups*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, **59** (1978), pp. 11-15.

[7] F. Menegazzo, *Immagini di sottogruppi normali nelle proiettività tra gruppi*, Coferenza - Convegno di teoria dei gruppi, 4-9 giugno 1979, Povo (TN).

[8] F. Napolitani, *Isomorfismi reticolari e gruppi perfetti*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, **67** (1981).

[9] A. S. Pekelis, *Lattice isomorphisms of radical groups*, Soviet Math. Doklady, **13** (1972), pp. 649-53.

[10] B. I. PLOTKIN, *Radical and semisimple groups*, Trudy Moscow Mat. Obsc., **6** (1957), pp. 299-36.

[11] E. RIPS, *Lattice isomorphism of groups, subgroups of finite index and normality*, manoscritto.

[12] D. J. S. ROBINSON, *Finiteness conditions and generalized soluble groups*, Erg. der Math., **62**, Springer-Verlag, Berlin.

[13] R. SCHMIDT, *Modulare Untergruppen endlicker Gruppen*, Ill. J. Math., **13** (1969), pp. 538-77.

[13] R. SCHMIDT, *Modular subgroups of finite groups II*, Ill. J. Math., **14** (1970), pp. 344-62.

[15] R. SCHMIDT, *Verbandsisomorphismen endlicher auflösbarer Gruppen*, Arch. Math., **23** (1972), pp. 449-58.

[16] R. SCHMIDT, *Normal subgroups and lattice isomorphisms of finite groups*, Proc. London Math. Soc., **30** (1975), pp. 287-300.

[17] R. SCHMIDT, *Untergruppenverbände involutorisch erzeugter Gruppen*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, **63** (1980).

[18] S. E. STONEHEWER, *Permutable subgroups of infinite groups*, Math. Z., **125** (1972), pp. 1-16.

[19] S. E. STONEHEWER, *Modular subgroups of infinite groups*, Symposia Mathematica, **17** (1976), pp. 207-14.

[20] S. E. STONEHEWER, *Modular subgroup structure in infinite groups*, Proc. London Math. S., **32** (1976), pp. 63-100.

[21] M. SUZUKI, *On the lattice of subgroups of finite groups*, Trans. Amer. Math. S., **70** (1951), pp. 345-71.

[22] M. SUZUKI, *Structure of a group and the structure of its lattice of subgroups*, Erg. der Math., 10, Springer-Verlag, Berlin (1956).

[23] G. ZACHER, *Una caratterizzazione reticolare della finitezza dell'indice di un sottogruppo in un gruppo*, Att. Acc. Naz., dei Lincei in corso di stampa).

[24] H. ZASSENHAUS, *The theory of groups*, Chelsea, New York, second edition (1958).

Manoscritto pervenuto in redazione il 21 aprile 1981, ed in forma revisionata il 1° settembre 1981.