

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

MARIA GRAZIA MAIA

**Una generalizzazione di certe algebre che
intervengono nella teoria dei sistemi**

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 67 (1982), p. 21-37

http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1982__67__21_0

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1982, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Una generalizzazione di certe algebre che intervengono nella teoria dei sistemi.

MARIA GRAZIA MAIA (*)

In [6] G. Darbo individua nell'algebra di convoluzione $\mathcal{A}$ delle misure reali localmente limitate a supporto in $\mathbb{R}_+$, e sue generalizzazioni, i naturali sostituti del corpo reale quando si vogliano costruire « efficaci » modelli matematici per i sistemi analogici, cioè modelli che assicurino a priori l'esistenza e unicità dei funzionamenti rispetto a opportune operazioni di composizione in rete. Di tali algebre vengono indicate alcune proprietà fondamentali (come ad esempio l'essere anelli locali), facendo uso della naturale metrica invariante di Fréchet.

In [2] si individuano invece le proprietà reticolari essenziali delle algebre considerate da G. Darbo. Precisamente si osserva che $\mathcal{A}$, in quanto spazio di Riesz, è regolare (σ -completezza, ℓ -separabilità, $\mathcal{A}$ -proprietà), mentre il prodotto di convoluzione garantisce un'ulteriore proprietà esprimibile alternativamente come quasi-nilpotenza degli elementi dell'ideale massimo oppure come esistenza e positività del reciproco di ogni elemento non negativo, non nullo e minore di 1.

Nel presente lavoro si studia dal punto di vista astratto l'assiomatica proposta in [2]. Si verifica che essa soddisfa le proprietà di struttura dovute (inclusa l'equivalenza tra le proprietà del prodotto di convoluzione ricordate sopra — vedi teorema 3.1) facendo esclusivo ricorso alle convergenze connaturali alla struttura di spazio di Riesz σ -completo e ℓ -separabile. Si prova inoltre che tale assiomatica è adeguata a descrivere una classe di algebre, chiamate « algebre cau-

(*) Indirizzo dell'A.: Istituto matematico dell'Università, via L. B. Alberti 4, 16132 Genova.

sali reali », tramite le quali si possono ottenere teoremi di punto fisso abbastanza generali rispetto alle esigenze prospettate in [6].

In [9] si è introdotto il complessificato Γ di A , ottenendo una teoria delle funzioni analitiche in Γ . Le « algebre causali complesse » saranno pertanto l'ambiente astratto che attualmente sembra adeguato per i modelli dei sistemi analogici introdotti in [6].

L'aggettivo « causale » adottato si riferisce essenzialmente alle caratteristiche del prodotto di convoluzione.

Nel seguito sono evitate le formulazioni generali, in molti casi immediate, che risulterebbero gratuite e comunque inessenziali rispetto alle applicazioni attualmente previste.

Introduzione alle algebre causali reali.

0. — Richiamiamo brevemente, tra le proprietà di uno spazio di Riesz L regolare (assiomi di σ -completezza, ℓ -separabilità, $\mathcal{A}$ -proprietà), quelle che utilizzeremo nel seguito sistematicamente.

Oltre all'archimedeità si ha la

(0.0) ℓ -completezza ([7], 23.6)

in virtù della quale in L

$$(0.1) \quad x_n \xrightarrow{(o)} x \text{ se e solo se } \maxlim_n x_n = \minlim_n x_n = x.$$

La topologia t generata dalla (o) -convergenza è quella per cui un sottoinsieme F di L è (o) -chiuso se e solo se F contiene il limite di ogni successione (o) -convergente di suoi punti. Conseguentemente un sottoinsieme U di L è (o) -aperto se e solo se per ogni successione $(x_n)_n$ in L (o) -convergente ad un punto di U , risulta $x_n \in U$, salvo al più un numero finito di x_n . Ne segue che:

(0.2) se f è un'applicazione definita in L a valori in uno spazio topologico X , f è continua (rispetto alla topologia t di L) se e solo se, per ogni successione $(x_n)_n$ in L , da $x_n \xrightarrow{(o)} x$ segue $f(x_n) \rightarrow f(x)$ (nella topologia di X).

È poi fondamentale il fatto che

(0.3) in L (o)-convergenza e (r)-convergenza sono equivalenti ([7], 70.2, 16.3).

Tra le proprietà legate alla (r)-convergenza ci interessa la seguente:

(0.4) L è (r)-completo ([7], 42.5).

Ricordiamo inoltre che

(0.5) L è uno spazio vettoriale topologico reticolato ([5], II.1, ex. 10), sicchè in particolare è Hausdorff ([4], II.2.7).

Ricordiamo infine che in L ogni sottoinsieme chiuso ⁽¹⁾ è (o)-chiuso, mentre un insieme (o)-chiuso non è necessariamente chiuso ⁽²⁾.

Se A è una parte non vuota di L , indicheremo con $A^\perp$ l'ortogonale di A (cioè l'insieme degli $x \in L$ tali che $|x| \wedge |a| = 0$ per ogni $a \in A$). Si ha in particolare: $A^\perp$ è una banda di L ; $A^{\perp\perp} \supset A$; $L = A^\perp \oplus A^{\perp\perp}$ (tale somma diretta essendo riferibile sia alla struttura di spazio vettoriale topologico reticolato regolare, sia ad una varietà di sue sottostrutture naturali); $L_+ = A_+^\perp + A_+^{\perp\perp}, \dots$ ⁽³⁾.

Se L_1 e L_2 sono spazi di Riesz regolari, tale è anche lo spazio di Riesz $L_1 \times L_2$.

0.1. OSSERVAZIONI. i) I sottospazi di Riesz chiusi (in particolare le bande) di L sono spazi di Riesz regolari.

ii) Se A è una banda di L , allora L/A , essendo isomorfo ad $A^\perp$, è uno spazio di Riesz regolare e la proiezione canonica $p: L \rightarrow L/A$ è un morfismo di Riesz normale (preserva gli estremi superiori).

iii) Ogni morfismo $L \xrightarrow{f} M$ tra spazi di Riesz regolari (cioè ogni

⁽¹⁾ Essendo L ℓ -separabile e ℓ -completo, un sottoinsieme di L è chiuso se e solo se contiene l'estremo superiore di ogni successione di suoi elementi superiormente limitata in L .

⁽²⁾ L'opportunità di descrivere la topologia di L mediante la (o)-convergenza di successioni senza dover ricorrere a successioni generalizzate [12] oppure a filtri limitati [4], è fornita specificamente dall'assioma di ℓ -separabilità, in virtù del quale da ogni successione generalizzata (o)-convergente si può estrarre una successione (o)-convergente allo stesso limite ([12], Lemma VI.3.1 e Teorema VI.3.1).

⁽³⁾ Qui e nel seguito in scritture analoghe con $A_+^\perp$ intenderemo $(A^\perp)_+$.

morfismo di Riesz normale) è dotato di fattorizzazione canonica

$$L \xrightarrow{p} \text{Coim } f \xrightarrow{\bar{f}} \text{Im } f \xrightarrow{i} M,$$

dove $\text{Coim } f = L/\text{Ker } f$, $\text{Im } f$ è la banda di M generata da $f(L)$, $p, \bar{f}, i$ sono i morfismi canonici. Il morfismo $\bar{f}$ è iniettivo, ma in genere non suriettivo; tuttavia è cancellabile a destra.

1. – Chiameremo algebre di Riesz regolari le $\mathbb{R}$ -algebre (commutative) reticolate il cui spazio di Riesz soggiacente sia regolare; ℓ -ideali di una tale algebra saranno le bande che siano altresì ideali di anello. Le osservazioni fatte in 0.1 per spazi di Riesz regolari si traducono, con le opportune varianti, al caso delle algebre di Riesz regolari.

1.1. PROPOSIZIONE. *In un'algebra di Riesz regolare si ha:*

- i) da $a_n \xrightarrow{(o)} a$ e $b_n \xrightarrow{(o)} b$ segue $a_n b_n \xrightarrow{(o)} ab$,
- ii) il prodotto è continuo (L risulta pertanto un'algebra topologica rispetto alla topologia della (o) -convergenza).

i) Ricordato che ogni successione (o) -convergente è anche (o) -limitata, attraverso le solite maggiorazioni sui valori assoluti, si vede subito che è sufficiente provare che da $a_n \xrightarrow{(o)} a$ e $b \geq 0$ segue $ba_n \xrightarrow{(o)} ba$. A tal fine osserviamo che per (0.3) da $a_n \xrightarrow{(o)} a$ segue $a_n \xrightarrow{(r)} a$; siccome, se $r > 0$ è un regolatore per $(a_n)_n$, allora br è un regolatore per $(ba_n)_n$, si ottiene subito che $ba_n \xrightarrow{(r)} ba$; ancora per (0.3) si conclude che $ba_n \xrightarrow{(o)} ba$.

ii) Segue da i), visti (0.2) e (0.5) e osservato che la topologia $t \times t$ è identica alla topologia naturale di $L \times L$ in quanto spazio di Riesz regolare.

1.2. DEFINIZIONE. *Un elemento x di un'algebra di Riesz regolare dicesi quasi-nilpotente quando*

$$x^n \xrightarrow{(o)} 0 \quad (n \geq 1).$$

1.3. PROPOSIZIONE. *In un'algebra di Riesz regolare L sono equivalenti le seguenti condizioni:*

- a) per ogni $x \in L$ la successione $(x^n)_{n \geq 1}$ è limitata,
- b) ogni $x \in L$ è quasi-nilpotente,

c) per ogni $x \in L$ la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} x^n$ è (o)-convergente,

d) per ogni $x \in L_+$ la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} x^n$ è (o)-convergente.

Dimostriamo l'implicazione $a) \Rightarrow d)$. Sia $x \in L_+$; per ipotesi $((2x)^n)_n$ è limitata, pertanto per qualche $s \in L_+$ si ha:

$$x^n = \frac{1}{2^n} (2x)^n \leq \frac{1}{2^n} s$$

da cui

$$\sum_{k=1}^n x^k \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} s \uparrow s.$$

La successione $\left(\sum_{k=1}^n x^k\right)_{n \geq 1}$, crescente e superiormente limitata in uno spazio σ -completo, risulta allora (o)-convergente.

L'implicazione $d) \Rightarrow c)$ segue da $|x^n| \leq |x|^n$, per i criteri di assoluta convergenza e del confronto tra serie.

Le implicazioni $c) \Rightarrow b)$ e $b) \Rightarrow a)$ sono ovvie.

1.4. DEFINIZIONE. *Un'algebra di Riesz regolare che soddisfi le condizioni equivalenti a), b), c), d) della Proposizione 1.3 si dirà brevemente RN-algebra.*

1.5. OSSERVAZIONI. i) Le sottoalgebre chiuse (in particolare gli ℓ -ideali) di una RN-algebra sono RN-algebre.

ii) I quozienti rispetto a ℓ -ideali di una RN-algebra sono RN-algebre.

iii) Se N_1 e N_2 sono RN-algebre, tale è anche l'algebra $N_1 \times N_2$.

iv) Ogni spazio di Riesz regolare individua canonicamente una zero-RN-algebra (prodotto identicamente nullo).

v) Ogni morfismo $N_1 \xrightarrow{f} N_2$ di RN-algebre (morfismi di Riesz normali che siano anche morfismi d'anello) è dotato di fattorizzazione canonica $N_1 \xrightarrow{p} \text{Coim } f \xrightarrow{\bar{f}} \text{Im } f \xrightarrow{i} N_2$ dove: $\text{Coim } f = N_1 / \text{Ker } f$, $\text{Im } f$ è l' ℓ -ideale generato da $f(N_1)$ e $p, \bar{f}, i$ sono i morfismi canonici con le usuali proprietà.

vi) Ogni morfismo di RN-algebre è dotato di nucleo e conucleo.

2. – Sia L un'algebra di Riesz regolare; con il prodotto

$$(\alpha, x) \cdot (\beta, y) = (\alpha\beta, \alpha y + \beta x + xy) \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{R}; x, y \in L)$$

lo spazio di Riesz $\mathbb{R} \oplus L$ diviene un'algebra di Riesz regolare unitaria, di unità $(1, 0)$, che risulta somma diretta di $\mathbb{R}$ e L in quanto algebre di Riesz regolari. La prima proiezione (valore iniziale)

$$\mathcal{I}_n: \mathbb{R} \oplus L \rightarrow \mathbb{R}$$

è un morfismo di algebre di Riesz regolari, mentre la seconda proiezione (valore ideale)

$$\mathcal{I}_d: \mathbb{R} \oplus L \rightarrow L$$

è un morfismo di spazi di Riesz regolari ma non di $\mathbb{R}$ -algebre (in accordo con il fatto che in questa struttura somma diretta e prodotto diretto non sono isomorfi).

Ricordato che $(\mathbb{R} \oplus L)_+ = \mathbb{R}_+ + L_+$, si ha:

2.1. PROPOSIZIONE. *Due elementi di $\mathbb{R} \oplus L$ tra loro reciproci non possono essere entrambi positivi, a meno che siano entrambi « reali ».*

Infatti se $(\alpha, x), (\beta, y) \in \mathbb{R}_+ + L_+$, da $(\alpha\beta, \alpha y + \beta x + xy) = (1, 0)$ segue in primo luogo $\alpha > 0$ e $\beta > 0$ e quindi $x = y = 0$.

Si vede subito che l'anello L , incluso canonicamente nell'anello $\mathbb{R} \oplus L$, ne diviene un ideale massimale, che peraltro in genere non è massimo: ad esempio, nel caso $L = \mathbb{R}$, l'ideale descritto da $(\alpha, -\alpha)$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ non è contenuto nell'immagine di L in $\mathbb{R} \oplus L$. Tuttavia, se N è una $\mathbb{R}N$ -algebra allora l'anello $\mathbb{R} \oplus N$ è locale. Infatti, identificando, quando non vi siano pericoli di confusione, $\mathbb{R}$ e N con le loro immagini in $\mathbb{R} \oplus N$, si ha:

2.2. PROPOSIZIONE. *Siano N una $\mathbb{R}N$ -algebra, $x \in N$. Allora $1 - x$ è dotato di reciproco in $\mathbb{R} \oplus N$ e:*

$$(1 - x)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n.$$

Osservato che se $y_n \xrightarrow{(o)} y$ in N allora $y_n \xrightarrow{(o)} y$ in $\mathbb{R} \oplus N$, la tesi

segue dalla:

$$(1-x) \sum_{k=0}^{n-1} x^k = 1 - x^n$$

passando all'(0)-limite per $n \rightarrow +\infty$ (cfr. 1.1, 1.3).

2.3. COROLLARIO. $\mathbf{R} \oplus N$ è un anello locale.

Infatti un generico elemento di $\mathbf{R} \oplus N$ si può esprimere nella forma $\alpha - x$ ($\alpha \in \mathbf{R}$, $x \in N$) e se $\alpha \neq 0$, $\alpha - x = \alpha(1 - x/\alpha)$, dunque è dotato di reciproco.

2.4. COROLLARIO. Si ha:

(R') qualunque sia $\alpha \in \mathbf{R} \oplus N$, se $a \not\leq 0$ e $a \leq 1$, allora esiste $b \geq 1$ tale che $ab = 1$.

Per la monotonia di $\mathcal{I}_n$ e $\mathcal{I}_d$, $a \not\leq 0$ e $a \leq 1$ se e solo se $a = \alpha - x$ ($0 < \alpha \leq 1$, $x \in N_+$). Il reciproco di $\alpha - x = \alpha(1 - x/\alpha)$ è pertanto $(1/\alpha) \sum_{n=1}^{+\infty} (x/\alpha)^n$, che risulta maggiore o uguale ad 1.

2.5. PROPOSIZIONE. Sia $a \in \mathbf{R} \oplus N$, dove N è una RN-algebra. Sono equivalenti le seguenti condizioni:

- a) $|\mathcal{I}_n(a)| < 1$,
- b) a è quasi-nilpotente,
- c) la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a^n$ è (0)-convergente.

Dimostriamo che $a) \Rightarrow c)$. Da

$$0 < 1 - |\mathcal{I}_n(a)| = 1 - \mathcal{I}_n(|a|) = \mathcal{I}_n(1 - |a|) \leq 1$$

$$\mathcal{I}_d(1 - |a|) = -\mathcal{I}_d(|a|) \leq 0$$

segue $1 - |a| \not\leq 0$ e $1 - |a| \leq 1$. Pertanto per 2.4 esiste $b > 0$ tale che $(1 - |a|)b = 1$. Moltiplicando per b ambo i membri della disuguaglianza:

$$(1 - |a|) \sum_{k=0}^{n-1} |a|^k = 1 - |a|^n \leq 1$$

si ottiene:

$$\sum_{k=0}^{n-1} |a|^k \leq b.$$

Pertanto la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a^n$ risulta assolutamente convergente e quindi (*o*)-convergente.

L'implicazione $c) \Rightarrow b)$ è ovvia, mentre l'implicazione $b) \Rightarrow a)$ segue da:

$$\mathcal{J}_n(|a^n|) = |\mathcal{J}_n(a^n)| = |(\mathcal{J}_n(a))^n| = |\mathcal{J}_n(a)|^n.$$

2.6. COROLLARIO. Se $|\mathcal{J}_n(a)| < 1$ allora:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a^n = (1 - a)^{-1}.$$

Basta applicare 1.1 e 2.5 all'uguaglianza $(1 - a) \sum_{k=0}^{n-1} a^k = 1 - a^n$.

2.7. PROPOSIZIONE. Sia N una RN -algebra

i) le sottoalgebre chiuse unitarie di $\mathbf{R} \oplus N$ sono tutte e sole le algebre del tipo $\mathbf{R} \oplus N'$, N' sottoalgebra chiusa di N .

ii) gli ℓ -ideali di $\mathbf{R} \oplus N$ sono tutti e soli gli ℓ -ideali di N ,

iii) se $\mathbf{I}$ è un ℓ -ideale di N allora $(\mathbf{R} \oplus N)/\mathbf{I} = \mathbf{R} \oplus (N/\mathbf{I})$.

3. - È noto che strutture come anello reticolato e algebra reticolata in generale non si prestano a trarre molte conclusioni sull'interazione della relazione d'ordine con la moltiplicazione (cfr. [3] Note ai capp. 8 e 9). Daltronde basta chiedere il « naturale » assioma di coerenza tra prodotto e struttura reticolare (« $a > 0$ implica $(ax) \vee 0 = a(x \vee 0)$ ») per cadere negli f -anelli, rispettivamente f -algebre, che sono poi le strutture su cui insiste la letteratura. Tuttavia, ad esempio il caso delle algebre di Riesz regolari realizza almeno la piena coerenza tra prodotto e ordine (cfr. 1.1). Molto più rigido è il caso delle algebre di Riesz regolari unitarie che soddisfano l'assioma (R') (cfr. 2.4): sono tutte e sole le algebre del tipo $\mathbf{R} \oplus N$, dove N è una RN -algebra, come afferma il seguente:

3.1. TEOREMA. Per un'algebra di Riesz regolare unitaria L sono equivalenti le seguenti condizioni:

- (D) $L = \mathbb{R} \oplus N$, dove N è una RN -algebra,
 (N) $\mathbb{R}^\perp$ è un ideale costituito da elementi quasi-nilpotenti,
 (R') qualunque sia $a \in L$ se $a \not\leq 0$ e $a \leq 1$, allora esiste $b \geq 1$ tale che $ab = 1$,
 (R) qualunque sia $a \in L$ se $a \not\leq 0$ e $a \leq 1$, allora esiste $b > 0$ tale che $ab = 1$.

Le implicazioni (D) $\Rightarrow$ (N) e (N) $\Rightarrow$ (R') seguono da 2.3 e 2.4. Proviamo che (R) $\Rightarrow$ (D).

Per brevità identificheremo $\mathbb{R}$ con la sottoalgebra di L generata dall'elemento unità. Dimostriamo per prima cosa che:

1) $\mathbb{R}^{\perp\perp}$ è una sottoalgebra reticolata archimedea unitaria di L .

In modo ovvio ci si riduce a provare che da $a, b \in \mathbb{R}_+^{\perp\perp}$ segue $ab \in \mathbb{R}_+^{\perp\perp}$. Posto $a_n = a \wedge n$, $b_n = b \wedge n$, dalle disuguaglianze $0 \leq a_n \leq n$, $0 \leq b_n \leq n$, $0 \leq a_n b_n \leq n^2$, per la solidità di $\mathbb{R}^{\perp\perp}$, si ha intanto $a_n, b_n, a_n b_n \in \mathbb{R}_+^{\perp\perp}$. Dalle $a = \bigvee_n a_n$, $b = \bigvee_n b_n$ (cfr. [3], 11.1.6) e dalla 1.1 segue $ab = \bigvee_n a_n b_n$, per la σ -completezza di $\mathbb{R}^{\perp\perp}$ si conclude. Si ha poi che:

2) 1 è unità in $\mathbb{R}^{\perp\perp}$ (ovvio)

e che:

3) se $0 < a \leq 1$ e $a \in \mathbb{R}^{\perp\perp}$ allora anche il reciproco di a , che è positivo, appartiene a $\mathbb{R}^{\perp\perp}$.

Infatti sia $b = h + k$ la decomposizione canonica in $\mathbb{R}_+^{\perp\perp} \oplus \mathbb{R}_+^\perp$ del reciproco di a (che esiste per l'assioma (R)); da $0 < a \leq 1$, $h > 0$, $k > 0$ segue $0 \leq ah \leq h \in \mathbb{R}_+^{\perp\perp}$, $0 \leq ak \leq k \in \mathbb{R}_+^\perp$ da cui $ah \in \mathbb{R}_+^{\perp\perp}$, $ak \in \mathbb{R}_+^\perp$; da $1 = ab = ah + ak$, per l'unicità della decomposizione, si ha $1 = ab = ah$, da cui $b = h \in \mathbb{R}_+^{\perp\perp}$. Proviamo inoltre che:

4) $\mathbb{R}^{\perp\perp}$ è un gruppo archimedeo totalmente ordinato.

Osserviamo preliminarmente che in conseguenza di 1), 2), $\mathbb{R}^{\perp\perp}$ è un f -anello (cfr. [3], 12.3.21). Ciò posto sia $a = a_+ - a_-$ (a_+ , a_- rispettivamente parte positiva e parte negativa di a) il generico elemento di $\mathbb{R}^{\perp\perp}$. Se $a_+ \wedge 1 = 0$, per 2) $a_+ = 0$, quindi $a = -a_- \leq 0$. Se invece $a_+ \wedge 1 > 0$ poniamo $x = a \wedge 1$; da $x_+ = a_+ \wedge 1$ segue $0 < x_+ \leq 1$ sicchè

da 3) segue $x_+b = 1$ per un $b \in \mathbb{R}_+^{\perp\perp}$; ricordato che $\mathbb{R}^{\perp\perp}$ è un f -anello, da $x_+ \wedge x_- = 0$, $b > 0$ segue $x_+b \wedge x_- = 1 \wedge x_- = 0$ (cfr. [3], 9.1.2) da cui, ancora per 2), $x_- = 0$; ma $x_- = (a \wedge 1)_- = a_-$ sicchè $a = a_+ \geq 0$.

Da 4) segue, per il teorema di Hölder, che $\mathbb{R}^{\perp\perp}$ è un sottogruppo di $\mathbb{R}$; ma $\mathbb{R}^{\perp\perp} \supset \mathbb{R}$. Quindi $\mathbb{R}^{\perp\perp} = \mathbb{R}$.

Abbiamo così dimostrato che, in quanto spazi di Riesz regolari, $L = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^\perp$. Proviamo ora che è una RN -algebra. Anche per questa parte procediamo a tappe.

i) Se $u, v \in \mathbb{R}_+^\perp$ allora è univocamente $1 - uv = \alpha - t$, $0 < \alpha \leq 1$, $t \in \mathbb{R}_+^\perp$.

Dalla monotonia delle proiezioni segue immediatamente che la proiezione di $1 - uv$ su $\mathbb{R}^\perp$ è negativa (o nulla) e che quella su $\mathbb{R}$ è minore o uguale a 1. Se per assurdo quest'ultima fosse minore o uguale a zero, sarebbe $1 - uv = 1 - u + u(1 - v) \leq 0$; siccome per (R) esistono $b, c > 0$ tali che $(1 - u)b = 1$, $(1 - v)c = 1$, si avrebbe allora

$$(1 - u)bc + u(1 - v)bc = c + ub \leq 0;$$

per contro da $c, u, b > 0$ segue $c + ub \geq c > 0$.

ii) Se $x, y \in \mathbb{R}_+^\perp$ allora $xy \in \mathbb{R}_+^\perp$.

Per i) si ha intanto $1 - xy = \alpha - t$ ($0 < \alpha \leq 1$, $t \in \mathbb{R}_+^\perp$). Se λ è un reale positivo arbitrario si deduce

$$1 - \lambda^2 xy = 1 - \lambda^2(1 - \alpha) - \lambda^2 t.$$

Osservato che $1 - \lambda^2(1 - \alpha) \in \mathbb{R}$, $\lambda^2 t \in \mathbb{R}_+^\perp$, utilizzando l'unicità della decomposizione in i) nel caso $u = \lambda x$, $v = \lambda y$, si ottiene in particolare

$$0 < 1 - \lambda^2(1 - \alpha)$$

da cui, per l'arbitrarietà di λ , si ricava $\alpha = 1$. Di conseguenza $xy = t \in \mathbb{R}_+^\perp$.

iii) Se $x \in \mathbb{R}_+^\perp$ allora la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ è (o) -convergente.

Per (R) esiste $b > 0$ tale che $(1 - x)b = 1$. Moltiplicando per b

ambo i membri della disuguaglianza:

$$(1-x) \sum_{k=0}^{n-1} x^k = 1 - x^n \leq 1$$

si ottiene

$$\sum_{k=0}^{n-1} x^k \leq b$$

da cui, essendo $x \geq 0$, la convergenza richiesta.

Dalle ii), iii) segue subito che $\mathbf{R}^\perp$ è una $\mathbf{RN}$ -algebra. A questo punto si deduce facilmente che L è somma diretta di $\mathbf{R}$ e $\mathbf{R}^\perp$ anche in quanto $\mathbf{R}$ -algebre di Riesz regolari.

3.2. DEFINIZIONE. *Si dicono algebre causali reali le algebre di Riesz regolari unitarie che soddisfano le condizioni equivalenti (D), (N), (R'), (R) del Teorema 3.1.*

3.3. ESEMPI.

- 1) $\mathbf{R}$ è l'unica algebra causale reale che sia anche un f -anello.
- 2) Se L è una zero-algebra di Riesz regolare, $\mathbf{R} \oplus L$ è un'algebra causale reale.
- 3) Sia $L = \mathbf{R} \oplus N$ un'algebra causale reale:
 - i) se N' è una sottoalgebra chiusa (in particolare un $\mathcal{L}$ -ideale) di N , allora $\mathbf{R} \oplus N'$ è un'algebra causale reale.
 - ii) se $\mathfrak{I}$ è un $\mathcal{L}$ -ideale di N , allora $\mathbf{R} \oplus (N/\mathfrak{I})$ è un'algebra causale reale.
- 4) $\mathbf{R} \oplus (N_1 \times N_2)$ è il prodotto diretto delle algebre causali reali $\mathbf{R} \oplus N_1$, $\mathbf{R} \oplus N_2$.
- 5) La $\mathbf{R}$ -algebra di convoluzione $\mathcal{A}$ delle misure reali localmente finite aventi il supporto in $\mathbf{R}_+$ è un'algebra causale reale.
- 6) La $\mathbf{R}$ -algebra delle serie formali $\mathbf{R}[[X]]$, con l'ordine prodotto $\left(\sum_n a_n X^n \geq 0 \text{ se e solo se } a_n \geq 0 \text{ per ogni } n \in \mathbf{N} \right)$ è un'algebra causale reale (può essere immersa in $\mathcal{A}$, come sottoalgebra causale reale, in infiniti modi).

7) La $\mathbf{R}$ -algebra $\mathbf{R}[\![X]\!]/(X)$ è isomorfa a $\mathbf{R}$. Per $n > 1$, $\mathbf{R}[\![X]\!]/(X^n)$ è un'algebra causale reale non integra. È isomorfa allo spazio di Riesz $\mathbf{R}^n$ col prodotto generato da:

$$e_i \cdot e_j = \begin{cases} e_{i+j} & \text{se } i + j < n \\ 0 & \text{se } i + j \geq n \end{cases}$$

$\{e_0, e_1, \dots, e_{n-1}\}$ essendo la base canonica di $\mathbf{R}^n$.

7.1) Per $n = 2$, $\mathbf{R}[\![X]\!]/(X^2) \simeq \mathbf{R} \oplus \mathbf{R}_0$ ($\mathbf{R}_0$ la zero- RN -algebra associata allo spazio di Riesz regolare $\mathbf{R}$).

8) La $\mathbf{R}$ -algebra di convoluzione $\mathcal{A}_n$ delle misure reali localmente finite aventi il supporto nel cono positivo $\mathbf{R}_+^n$ è un'algebra causale reale.

9) La $\mathbf{R}$ -algebra $\mathbf{R}[\![X_1, \dots, X_n]\!]$ con l'ordine prodotto può essere immersa, in infiniti modi, come sottoalgebra causale reale, in $\mathcal{A}_n$.

10) La $\mathbf{R}$ -algebra $\mathbf{R}[\![X_1, \dots, X_n]\!]/(X_1^{h_1}, \dots, X_n^{h_n})$ è un'algebra causale reale, isomorfa ad $\mathbf{R}$ se $h_1 = h_2 = \dots = h_n = 1$, non integra se $h_i > 1$ per almeno un i .

10.1) Se $h_1 = \dots = h_n = 2$, $\mathbf{R}[\![X_1, \dots, X_n]\!]/(X_1^2, \dots, X_n^2) \simeq \mathbf{R} \oplus \mathbf{R}_0^n$ (cfr. 7.1).

11) Gli ideali di $\mathbf{R}[\![X_1, \dots, X_n]\!]$ generati da insiemi finiti di monomi sono ℓ -ideali. Per 3. ii) i quozienti per essi di $\mathbf{R}[\![X_1, \dots, X_n]\!]$ sono algebre causali reali.

3.4. OSSERVAZIONE. La $\mathbf{R}$ -algebra delle matrici reali di tipo $n \times n$ ($n > 2$) triangolari con diagonale principale costante soddisfa tutti gli assiomi di algebra causale reale salvo la commutatività del prodotto, che risulta pertanto indipendente dagli altri assiomi (viceversa nel caso degli f -anelli o delle f -algebre la sola archimedeità è sufficiente per implicare la commutatività ([3], 12.3.2)).

3.5. OSSERVAZIONE. Un morfismo di algebre causali reali è « necessariamente » un morfismo di Riesz normale che sia anche morfismo di anelli unitari (in particolare è continuo, anzi preserva le successioni (o) -convergenti). Pertanto è somma diretta dell'identità in $\mathbf{R}$ e

di un morfismo di RN -algebre. Conseguente è la fattorizzazione canonica.

Si osserverà che, a differenza di quanto accade per le RN -algebre, i morfismi di algebre causali non hanno nuclei nè conuclei.

Spazi L -metrici e teoremi di punto fisso.

4. — In [6] si stabiliscono teoremi di punto fisso per trasformazioni pseudolipschitziane di uno spazio pseudometrico. Considereremo qui alcune generalizzazioni.

4.1. DEFINIZIONI. Sia L un'algebra causale reale

a) una L -metrica su un insieme X è un'applicazione

$$\varrho: X \times X \rightarrow L_+$$

sottoposta alle usuali condizioni:

- i) $\varrho(x, y) = 0$ se e solo se $x = y$,
- ii) $\varrho(x, y) = \varrho(y, x)$,
- iii) $\varrho(x, z) \leq \varrho(x, y) + \varrho(y, z)$,

qualunque siano $x, y, z \in X$;

b) un insieme X munito di una L -metrica si dirà spazio L -metrico.

L'algebra L è canonicamente uno spazio L -metrico rispetto al proprio valore assoluto, cioè rispetto alla L -metrica $\varrho: L \times L \rightarrow L_+$ per cui

$$\varrho(a, b) = |a - b| \quad (a, b \in L).$$

I sottoinsiemi di L ereditano la L -metrica indotta dal valore assoluto di L .

Come nel caso reale, uno spazio L -metrico ha una struttura canonica di spazio uniforme e relativa topologia. Precisamente:

4.2. OSSERVAZIONI. Siano (X, ϱ) uno spazio L -metrico, $\mathfrak{B}_0$ un sistema fondamentale di vicinanze dello zero in L_+ :

- i) $\varrho^{-1}(V)$ descrive al variare di $V \in \mathfrak{B}_0$ un sistema fondamentale di entourage di una struttura uniforme $\mathcal{U}_\varrho$ su X , indotta da ϱ ,

- ii) in conseguenza di i) risulta disponibile la nozione di $\mathcal{U}_\varrho$ -completezza per lo spazio X ,
- iii) al variare di $V \in \mathfrak{B}_0$, $\varrho^{-1}(V)(x) = \{y | y \in X, \varrho(x, y) \in V\}$ descrive un sistema fondamentale di vicinanze di $x \in X$ per la topologia t_ϱ associata ad $\mathcal{U}_\varrho$.

4.3. DEFINIZIONE. Sia (X, ϱ) uno spazio L -metrico. Una trasformazione $T: X \rightarrow X$ si dice ϱ -contrazione quando esiste una costante quasi-nilpotente $l \in L_+$ tale che

$$\varrho(T(x), T(y)) \leq l \varrho(x, y)$$

qualunque siano $x, y \in X$.

(Le ϱ -contrazioni risultano pertanto, rispetto all'ovvia definizione, particolari trasformazioni ϱ -lipschitziane).

4.4. TEOREMA (del punto fisso). Siano $T: X \rightarrow X$ una trasformazione, $\varrho, \bar{\varrho}$ L -metriche sullo spazio X , che soddisfino le seguenti condizioni:

- i) T è continua rispetto a t_ϱ ,
- ii) X è $\mathcal{U}_\varrho$ -completo,
- iii) T è una $\bar{\varrho}$ -contrazione,
- iv) esiste una funzione $\varphi: L_+ \rightarrow L_+$ crescente, (t) -infinitesima in zero, tale che

$$\varrho(x, y) \leq \varphi(\bar{\varrho}(x, y))$$

qualunque siano $x, y \in X$.

Allora T ha uno ed un solo punto fisso in X .

Sia $x_0 \in X$; posto

$$x_{n+1} = T(x_n) \quad (n \geq 0)$$

con i soliti passaggi si ottiene:

$$\bar{\varrho}(x_{n+p}, x_n) \leq \bar{\varrho}(x_1, x_0) \sum_{k=n}^{n+p-1} l^k \leq \frac{l^n}{1-l} \bar{\varrho}(x_1, x_0) \quad (n \geq 0, p \geq 1)$$

da cui

$$\varrho(x_{n+p}, x_n) \leq \varphi \left(\frac{l^n}{1-l} \bar{\varrho}(x_1, x_0) \right).$$

Siccome l'argomento di φ è (0)-infinitesimo, e quindi (t)-infinitesimo, per $n \rightarrow +\infty$, e φ è (t)-infinitesima in zero, $\varrho(x_m, x_n)$ risulta infinitesima rispetto al filtro standard su $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Pertanto $(x_n)_n$ è una successione di Cauchy e quindi (cfr. ipotesi ii)) convergente; detto x il suo (t)-limite, dall'ipotesi i) si deduce allora:

$$x = (t)\text{-}\lim_n x_{n+1} = (t)\text{-}\lim_n T(x_n) = T(x).$$

L'unicità del punto fisso si ottiene in modo standard utilizzando l'ipotesi iii).

4.4.1. CASI PARTICOLARI.

i) Un esempio particolarmente semplice è dato dal caso $\bar{\varrho} = b\varrho$ dove b è un elemento positivo invertibile di L . Ricordato che non si può pretendere di dividere per b e conservare le disuguaglianze, a meno che b sia reale (cfr. 2.1), il problema si risolve scegliendo $\varphi(x) = (\mathcal{I}_n(b))^{-1}x$.

ii) Per $\varphi = id_{L_+}$ si ottiene una generalizzazione di [8]; in particolare per $\varrho = \bar{\varrho}$ si ottiene la generalizzazione del Teorema 6 di [6].

4.4.2. OSSERVAZIONI. L'ipotesi i) di 4.4 non sembra affatto ridondante dal momento che si vuol dare un teorema di esistenza oltre che di unicità. Naturalmente se si vuole solo un teorema di unicità, essendo l'esistenza nota per altra via, allora la condizione iii) (o anche meno) è sufficiente (cfr. [11]).

Le generalizzazioni del Teorema 1 di [8], considerate ad esempio in [1], [10], possono essere utilmente riformulate nel presente contesto (cfr. anche [6]).

Il Teorema 4.4 è formulato in termini di strutture uniformi e topologie canonicamente individuate da L -metriche. In pratica (anzi già nella dimostrazione del teorema) è al solito più comodo usare successioni. Le definizioni di riferimento sono ovvie: ad esempio una successione $(x_n)_n$ di elementi di uno spazio L -metrico (X, ϱ) si dirà (o)-convergente ad $x \in X$ rispetto alla L -metrica ϱ se e solo se $\varrho(x_n, x) \xrightarrow{(o)} 0$; analogamente si definisce successione (r)-convergente, (o)-limitata, ecc.

È tuttavia il caso di osservare che se $r \in L_+^*$, la palla di centro $x \in X$ e raggio r , cioè l'insieme $P_r = \{y | y \in X, \varrho(x, y) \leq r\}$ in genere non è una vicinanza di x per la topologia t_ϱ .

In quest'ambito è di uso comune il lemma seguente, che dimostra l'equivalenza dei concetti di successione (o)-Cauchy rispetto ad una stessa L -metrica:

4.6. LEMMA. *Per una qualsiasi successione $(x_n)_n$ di elementi di uno spazio L -metrico (X, ϱ) sono equivalenti le seguenti condizioni:*

a) esiste una successione $q_n \downarrow 0$ di elementi di L tale che

$$\varrho(x_{n+p}, x_n) \leq q_n$$

qualunque siano i naturali n, p ,

b) la successione $(x_n)_n$ è (o)-limitata e si ha:

$$\bigwedge_n \bigvee_p \varrho(x_{n+p}, x_n) = 0,$$

c) esiste un regolatore $u \in L_+$ tale che per ogni reale positivo ε esiste un naturale n_0 tale che

$$\varrho(x_{n+p}, x_n) \leq \varepsilon u$$

per ogni $n \geq n_0$ e per ogni $p \geq 0$.

a) $\Rightarrow$ c). Da $q_n \downarrow 0$ segue l'esistenza di $u \in L_+$ tale che, per ogni reale positivo ε , sia $q_n \leq \varepsilon u$ definitivamente.

c) $\Rightarrow$ b). Dall'ipotesi segue subito che per ogni reale positivo si ha:

$$\bigvee_p \varrho(x_{n+p}, x_n) \leq \varepsilon u \quad \text{per } n \geq n_0,$$

$$\bigwedge_n \bigvee_p \varrho(x_{n+p}, x_n) \leq \bigwedge_{n \geq n_0} \bigvee_p \varrho(x_{n+p}, x_n) \leq \varepsilon u$$

da cui la tesi, per l'arbitrarietà di ε e l'archimedeità di L .

b) $\Rightarrow$ a). Basta scegliere $q_n = \bigvee_p \varrho(x_{n+p}, x_n)$.

È facile elencare altre condizioni equivalenti alle a), b), c) del lemma

precedente: ad esempio

$$(r)\text{-}\lim_{m,n} \varrho(x_m, x_n) = 0$$

e così via. Ricordiamo che tali condizioni non sono sempre equivalenti alla $\mathcal{U}_\varrho$ -Cauchy cioè alla condizione:

per ogni $V \in \mathfrak{B}_0$ esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $\varrho(x_m, x_n) \in V$ per $m, n \geq n_0$

o, equivalentemente, alla condizione:

$$(t)\text{-}\lim_{m,n} \varrho(x_m, x_n) = 0.$$

Infatti le successioni che soddisfano tali condizioni non sono necessariamente (o)-limitate.

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

- [1] M. ALBU, *A fixed point theorem of Maia-Perov type*, Studia Univ. Babeş-Bolyai, Math., **1** (1978), pp. 76-79.
- [2] P. ARDUINI, *Proprietà reticolari delle algebre di Darbo*, manoscritto.
- [3] A. BIGARD - K. KEIMEL - S. WOLFENSTEIN, *Groupes et anneaux réticulés*, Lect. Notes in Math., vol. 608, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1977.
- [4] N. BOURBAKI, *Esp. vect. top.*, ch. 1, 2, 2^e ed., Hermann, Paris, 1966.
- [5] N. BOURBAKI, *Intégration*, ch. 1, 2, 3, 4, 2^e ed., Hermann, Paris, 1965.
- [6] G. DARBO, *Un'algebra locale reticolata che interviene nella teoria dei sistemi*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, **60** (1978), pp. 115-139.
- [7] W. A. J. LUXEMBURG - A. C. ZAAENEN, *Riesz spaces I*, North Holland Publ. Co., Amsterdam London 1971.
- [8] M. G. MAIA, *Un'osservazione sulle contrazioni metriche*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, **40** (1968), pp. 139-143.
- [9] M. G. MAIA, *Un primo approccio alla teoria delle funzioni analitiche in un'algebra di misure complesse*, lavoro in preparazione.
- [10] I. A. RUS, *On a fixed point theorem of Maia*, Studia univ. Babeş-Bolyai, Math., **1** (1977), pp. 40-42.
- [11] S. P. SINGH, *On a fixed point theorem in metric spaces*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, **43** (1970), pp. 229-231.
- [12] B. Z. VULIKH, *Introduction to the theory of partially ordered spaces* (trad. dal russo), Wolters-Noordhoff Sci. Pu., Groningen, 1967.

Manoscritto pervenuto in redazione il 2 aprile 1981.