

RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

S. BALDASSARRI-GHEZZO

S. CHIARUTTINI

Sulla rappresentazione di certi \tilde{A} -moduli

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 67 (1982), p. 161-169

http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1982__67__161_0

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1982, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Sulla rappresentazione di certi \tilde{A} -moduli.

S. BALDASSARRI GHEZZO - S. CHIARUTTINI (*)

Viene provato, sopra un esempio notevole, come possa costruirsi un fascio di moduli \mathcal{M}^* , isomorfo ad un dato \mathcal{A} -modulo localmente libero di rango $n > 1$ su una varietà algebrica affine $V = (V, \mathcal{A})$ con $\mathcal{A} \in \text{P.E.}$, (vedi n. 1), di dimensione maggiore di 1 su un corpo algebricamente chiuso, \mathcal{M}^* essendo siffatto da avere una sezione globale i cui germi sono fra i generatori liberi di \mathcal{M}_x^* su ogni punto $x \in V$.

Più in particolare:

Sulla varietà algebrica $V = (V, \mathcal{A})$ di anello

$$A = k[x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3]/(x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 - 1)$$

sopra un corpo k algebricamente chiuso, si considera il sotto- \mathcal{A} -modulo localmente libero \mathcal{M} di \mathcal{A}^2 generato in ogni punto da

$$m_1 = (-x_2, -x_3), \quad m_2 = (x_1, 0), \quad m_3 = (0, x_1);$$

e sull'aperto $D(x_1)$, complementare di $x_1 = 0$ in V , il sottofascio $\overline{\mathcal{M}}_{\mathbb{C}}(x_1)$ di $\mathcal{M}/D(x_1)$, generato da m_1 ed m_2 .

Sia H il chiuso $x_2 = x_3 = 0$ in V , allora è $H \subset D(x_1)$, inoltre $D(H)$ e $D(x_1)$ costituiscono un ricoprimento di V , e $\Gamma(D(H), \mathcal{M}) \cong \Gamma(V, \mathcal{M})$ perchè H ha codimensione maggiore di 1 in V e $V \in \text{P.E.}$

Associando ad ogni aperto U di V con $U \subset D(H)$, il $\Gamma(U, \mathcal{A})$ -modulo $\Gamma(U, \mathcal{M})$, e ad ogni altro aperto U di V , ($U \cap H \neq \emptyset$), il $\Gamma(U, \mathcal{A})$ -

(*) Indirizzo degli AA.: Istituto di Matem. Applicata, Università, Via Belzoni 7, Padova.

modulo generato da m_1 ed m_2 , ed inoltre ad ogni inclusione di aperti la restrizione canonica dei moduli associati, si ottiene un sottofascio proprio $\overline{\mathcal{M}'}$ di \mathcal{M} . $\overline{\mathcal{M}'}$ così definito, risulta localmente libero di rango 2, isomorfo ad \mathcal{M} fuori di H , ed esso ammette una sezione globale, quella rappresentata da m_1 , i cui germi sono fra i generatori liberi delle fibre $\overline{\mathcal{M}'}_x$ in ogni punto x di V .

Però $\overline{\mathcal{M}'}$ possiede fibre generate da germi non tutti appartenenti a sezioni globali, (per esempio sui punti x del chiuso $x_1 = x_3 = 0$ le fibre $\overline{\mathcal{M}'}_x$ sono generate da m_1 ed m_3 , ed m_3 non è sezione globale in $\overline{\mathcal{M}'}$).

In questo lavoro, tramite i fasci $(D(H), \mathcal{M}/D(H))$ e $(D(x_1), \overline{\mathcal{M}'_{(x_1)}})$, si dà una rappresentazione di un fascio \mathcal{M}^* riducibile e isomorfo ad \mathcal{M} .

I. Richiamiamo per comodità alcune notazioni usate in [1], [2] e [3], e che vengono qui conservate; in particolare i riferimenti a [1] indicano il verificarsi delle ipotesi richieste dal caso generale.

Precisamente: k è un corpo commutativo, algebricamente chiuso, ed $A = k[x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3]/(x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 - 1)$ è un dominio d'integrità noetheriano che gode della proprietà di estensione, cioè è tale che, per ogni suo ideale I di altezza maggiore di 1, nel corpo totale delle frazioni di A , risulta, per tutti gli ideali primi p di A che non contengono I , $\bigcap_{p \not\supset I} A_p = A$, ([1], nn. 1 e 2; [2], n. 1; [3], nn. 5 e 7).

M è il sottomodulo di A^2 generato su A dagli elementi $m_1 = (-x_2, -x_3)$, $m_2 = (x_1, 0)$, $m_3 = (0, x_1)$, i quali soddisfano alla relazione $\sum_{i=1}^3 x_i m_i = 0$, ([1], n. 3; [2], n. 1; [3], n. 7).

Indichiamo con $\mathcal{A} = \tilde{A}$ il fascio strutturale dello spettro primo $X = \text{Spec } A$, e con $\mathcal{M} = \tilde{M}$ il fascio associato ad M . Notiamo che \mathcal{M} è un \mathcal{A} -modulo localmente libero di rango 2, e quindi, al pari di \mathcal{A} , esso è coerente, privo di torsione, e gode della proprietà di estensione, ($\mathcal{A} \in \text{P.E.}$ ed $\mathcal{M} \in \text{P.E.}$), cioè ogni sezione definita fuori di un chiuso H di codimensione maggiore di 1 in X , è restrizione di una sezione globale, quindi, indicando con $D(H)$ il complementare di H in X , l'omomorfismo canonico iniettivo $\Gamma(X, \mathcal{M}) \rightarrow \Gamma(D(H), \mathcal{M})$ è anche suriettivo, ([2], n. 2; [3], nn. 6 e 7; [5], n. 4).

Consideriamo l'ideale $\bar{x} = \langle x_2, x_3 \rangle$ di A , generato dalle componenti della sezione m_1 di \mathcal{M} , esso individua nello spazio X un chiuso $H = V(\bar{x}) \subset D(x_1)$, di codimensione maggiore di 1 in X . Nelle fibre di \mathcal{M} sopra i punti di H , è $m_1 = -(x_2/x_1)m_2 - (x_3/x_1)m_3$. Allora se $\overline{M}_{\bar{x}}$ è il modulo delle frazioni di M con denominatori fuori di \bar{x} , consideriamo

il sottomodulo \bar{M} di \bar{M}_x generato su A_x da m_2 ed $\bar{m}_3 \equiv (x_3/x_1)m_3$, e sull'aperto $D(x_1)$ contenente H , rappresentiamo con $\bar{\mathcal{M}}_{(\bar{\omega})}$ il sotto- $\mathcal{A}/D(x_1)$ -modulo di $\mathcal{M}/D(x_1)$ generato liberamente da m_2 ed \bar{m}_3 , per cui è $\bar{\mathcal{M}}_{(\bar{\omega})} = \bar{M}$, ([4], (0, (5.3.11))).

Fra $\bar{\mathcal{M}}_{(\bar{\omega})}$ ed $\mathcal{M}/D(x_1)$ esiste l'isomorfismo ([6], prop. 1, p. 207) di $\mathcal{A}/D(x_1)$ -moduli

$$(1) \quad \varepsilon_x^-: \begin{cases} m_2 \rightarrow m_2 \\ \bar{m}_3 \rightarrow m_3 \end{cases}$$

ed $\bar{\mathcal{M}}_{(\bar{\omega})}$ ammette in ogni punto di $D(x_1)$ un sistema di generatori liberi contenente il germe della sezione $m_1 = -(x_2/x_1)m_2 - \bar{m}_3$, ([1], n. 6; [2], n. 3; [3], n. 7). Inoltre $D(x_1)$ e $D(H)$ costituiscono un ricoprimento di X , ed il fascio definito per incollamento da $(D(x_1), \bar{\mathcal{M}}_{(\bar{\omega})})$ e $(D(H), \mathcal{M}/D(H))$ è localmente isomorfo ad \mathcal{M} , e ad esso isomorfo fuori di H , perciò è ad esso isomorfo su X , ([2], n. 4); ne daremo un'altra rappresentazione.

2. Consideriamo ancora l'isomorfismo (1) del n. precedente

$$\varepsilon_x^-: \bar{\mathcal{M}}_{(\bar{\omega})} \rightarrow \mathcal{M}/D(x_1)$$

definito da $m_2 \mapsto m_2, \bar{m}_3 \mapsto m_3$, con $\bar{m}_3 = (0, x_3)$, e sia ϑ l'isomorfismo indotto da ε_x^{-1} fra i $\Gamma(D(x_1), \mathcal{A})$ -moduli $\Gamma(D(H) \cap D(x_1), \mathcal{M})$, (il quale per la P.E. è isomorfo a $\Gamma(D(x_1), \mathcal{M})$), e $\Gamma(D(x_1), \bar{\mathcal{M}}_{(\bar{\omega})})$. Esso opera moltiplicando le seconde componenti per x_3/x_1 .

Nell'insieme prodotto cartesiano

$$\Gamma(D(H), \mathcal{M}) \times \Gamma(D(H) \cap D(x_1), \mathcal{M}) \times \Gamma(D(x_1), \bar{\mathcal{M}}_{(\bar{\omega})}),$$

sia \mathfrak{J} il sottoinsieme delle terne rappresentate da

$$(m, m + a(0, x_3 - x_1), \vartheta(m + a(0, x_3 - x_1))),$$

con $m \in M$ ed $a \in A$, le quali saranno indicate con $(m; a)$.

3. Introduciamo in \mathfrak{J} la relazione d'equivalenza $R_{\mathfrak{J}}$

$$(m; a) R_{\mathfrak{J}} (n; b) \Leftrightarrow m = n,$$

e rappresentiamo gli elementi dell'insieme quoziente $\mathfrak{J}/R_{\mathfrak{J}}$ con

$$\{m\} = \{(m, m + a(0, x_3 - x_1), \vartheta(m + a(0, x_3 - x_1)))\}$$

dove a varia in A .

Esiste una biiezione naturale di $\mathfrak{J}/R_{\mathfrak{J}}$ su $\Gamma(D(H), \mathcal{M}) \cong M$.

Inoltre con la somma $\{m\} + \{n\} = \{m + n\}$, ed il prodotto $h\{m\} = \{hm\}$ per $h \in A$, $\mathfrak{J}/R_{\mathfrak{J}}$ diventa un A -modulo M^* privo di torsione, generato dagli elementi $\{m_1\} = \{(-x_2, -x_3)\}$, $\{m_2\} = \{(x_1, 0)\}$ ed $\{m_3\} = \{(0, x_1)\}$, con la relazione $\sum_{i=1}^3 x_i \{m_i\} = \left\{ \sum_{i=1}^3 x_i m_i \right\}$, e quindi isomorfo ad M .

4. Osserviamo ora che per ogni elemento

$$(2) \quad m = \bar{a}m_1 + \bar{b}m_2 + \bar{c}m_3 = (-\bar{a}x_2 + \bar{b}x_1, -\bar{a}x_3 + \bar{c}x_1)$$

di M , si può scegliere una rappresentazione nel modo seguente: se \bar{a} , (scritto senza somme parziali nulle, come $+h - h + \sum_{i=1}^3 x_i y_i - 1$), possiede addendi multipli di $x_2 y_2$, riduciamoli in A , modulo $\sum_{i=1}^3 x_i y_i - 1$, e sia \bar{a}' l'espressione così ottenuta, la quale fornisce un rappresentante di \bar{a} scelto in $k[x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3]$.

Mettiamo poi in evidenza in \bar{a}' tutti gli addendi che contengono il fattore x_1 , e scriviamo

$$(2)' \quad \bar{a}' = a_1 x_1 + a_2;$$

dunque a_2 appartiene a $k[x_2, x_3, y_1, y_2, y_3]$ ed è privo di addendi in $Ax_2 y_2$. Possiamo allora usare, per l'elemento $m \in M$ della (2), la seguente scrittura:

$$m^* = (-a_2 x_2 + (\bar{b} - a_1 x_2) x_1, -a_2 x_3 + (\bar{c} - a_1 x_3) x_1),$$

cioè dopo la riduzione in M modulo $\sum_{i=1}^3 x_i m_i$, e indicando con a_1 e a_2 anche gli elementi di A che essi rappresentano, si ottiene per m la

seguinte espressione, che diremo *ridotta*:

$$(3) \quad m^* = a_2 m_1 + (\bar{b} - a_1 x_2) m_2 + (\bar{c} - a_1 x_3) m_3 = a_2 m_1 + b m_2 + c m_3$$

con $b, c \in A$ ed a_2 è il rappresentante in $k[x_2, x_3, y_1, y_2, y_3]$, privo di addendi in $Ax_2 y_2$, di un elemento di A .

Le rappresentazioni ridotte degli elementi di M , con le operazioni di M , e con le relazioni

$$x_2 y_2 m_1 = (1 - x_3 y_3) m_1 + y_1 (x_2 m_2 + x_3 m_3) \quad \text{e} \quad x_1 m_1 = -x_2 m_2 - x_3 m_3,$$

sono un sistema di generatori del modulo M , anzi costituiscono un insieme di rappresentanti in A^2 degli elementi di M stesso. Si osservi che se per ogni $\alpha \in A$ si prende la rappresentazione come la (2)', si ha

$$\alpha m^* = \alpha_2 a_2 m_1 + (\alpha \bar{b} - \alpha_1 a_2 x_2) m_2 + (\alpha c - \alpha_1 a_2 x_3) m_3,$$

e riducendo ulteriormente $\alpha_2 a_2$, nel caso contenesse addendi in $Ax_2 y_2$, si ottiene $(\alpha m^*)^* = (\alpha m)^*$.

5. Torniamo ora all'insieme $\mathfrak{J}/R_{\mathfrak{J}}$ degli elementi di M^* , (n. 3). Con la rappresentazione del numero precedente ogni elemento di $\mathfrak{J}/R_{\mathfrak{J}}$ può scriversi

$$\{m\} = \{m^*\} = \left\{ (m^*, m^* + a(0, x_3 - x_1), \vartheta(m^* + a(0, x_3 - x_1))) \right\},$$

ed allora esso individua quel suo rappresentante in \mathfrak{J} , indichiamolo con $\{m\}^* = (m^*; a_2)$, che si ottiene per $a = a_2$, cioè

$$(4) \quad \begin{aligned} \{m\}^* &= (m^*, m^* + a_2(0, x_3 - x_1), \vartheta(m^* + a_2(0, x_3 - x_1))) = \\ &= (a_2 m_1 + b m_2 + c m_3, a_2(m_1 + (0, x_3 - x_1)) + b m_2 + c m_3, \\ &\quad a_2 m_1 + b m_2 + c(x_3/x_1) m_3) \end{aligned}$$

con $a_2 \in k[x_2, x_3, y_1, y_2, y_3]$, e $b, c \in A$, e dove a_2 è anche privo di addendi multipli di $x_2 y_2$.

Posto $\bar{m}_1 = m_1 + (0, x_3 - x_1)$ ed $\bar{m}_3 = (x_3/x_1) m_3$, è

$$(4)' \quad \begin{aligned} \{m\}^* &= (a_2 m_1 + b m_2 + c m_3, a_2 \bar{m}_1 + b m_2 + c m_3, \\ &\quad a_2 m_1 + b m_2 + c \bar{m}_3). \end{aligned}$$

Si noti che per $\alpha \in A$ risulta $\alpha\{m\}^* \in \{\alpha m^*\} = \{(\alpha m)^*\}$.

Osserviamo infine che qui, non solo $\{m\}$ individua $\{m\}^*$ e viceversa, ma anche ciascuna delle proiezioni $\text{pr}_1(\{m\}^*)$, $\text{pr}_2(\{m\}^*)$ e $\text{pr}_3(\{m\}^*)$ individua $\{m\}$. Infatti da $\text{pr}_2(\{m\}^*) = \vartheta^{-1} \cdot \text{pr}_3(\{m\}^*) = (-a_2x_2 + bx_1, \gamma x_1)$ si ottiene $\text{pr}_1(\{m\}^*) = (-a_2x_2 + bx_1, -a_2x_3 + (\gamma + a_2)x_1)$.

6. Sia \mathcal{J}^* l'insieme degli $\{m\}^* = (m^*; a_2)$ definiti al numero precedente, che rappresentano, in \mathcal{J} , gli elementi di $\mathcal{J}/R_{\mathcal{J}}$, e quindi del modulo M^* .

Essi, con le relazioni

$$(5) \quad \alpha\{m\}^* = \{\alpha m\}^*, \quad \text{per } \alpha \in A, \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^3 x_i\{m_i\}^* = 0,$$

costituiscono dunque un insieme di generatori di un modulo \mathcal{J}^* , di rappresentanti degli elementi di M^* .

Inoltre l'insieme $\text{pr}_2(\mathcal{J}^*)$ delle seconde componenti degli elementi di \mathcal{J}^* , con la relazione $x_1\bar{m}_1 + x_2m_2 + x_1m_3 = 0$, cioè con la

$$(6) \quad x_1(-x_2, -x_1) + x_2(x_1, 0) + x_1(0, x_1) = 0,$$

sono i generatori di un sotto A -modulo G di $\Gamma(D(H) \cap D(x_1), \mathcal{M})$. Allora la biiezione $h: \text{pr}_2(\mathcal{J}^*) \rightarrow M^*$, esistente per l'osservazione finale del n. precedente, si estende ad un omomorfismo δ di G in M^* , perchè la relazione (6) su $\text{pr}_2(\mathcal{J}^*)$ si trasforma, mediante h , in una combinazione lineare delle relazioni (5) su \mathcal{J}^* .

Infatti la (6) in $\text{pr}_2(\mathcal{J}^*)$ equivale alla

$$(6)' \quad \text{pr}_2(\{x_1m_1\}^*) + (x_3 - x_1)\text{pr}_2(\{m_3\}^*) + x_2\text{pr}_2(\{m_2\}^*) + x_1\text{pr}_2(\{m_3\}^*) = 0,$$

e la sua trasformata in \mathcal{J}^* è

$$\begin{aligned} \{x_1m_1\}^* + (x_3 - x_1)\{m_3\}^* + x_2\{m_2\}^* + x_1\{m_3\}^* = \\ = \sum_{i=1}^3 x_i\{m_i\}^* + \{x_1m_1\}^* - x_1\{m_1\}^* = 0. \end{aligned}$$

Inoltre l'omomorfismo δ risulta suriettivo, e il suo inverso a sinistra è $\delta^{-1} = h^{-1}$, il quale è un monomorfismo di M^* su $\text{pr}_2\{\mathcal{J}^*\}$ con la struttura di G . Risulta allora anche l'esistenza di un monomorfismo di M^* su $\text{pr}_3\{\mathcal{J}^*\} \subset \Gamma(D(x_1), \bar{U}_{(\bar{a})})$.

Infine osserviamo che, se per ogni $\{m\}^* \in \mathfrak{J}^*$ consideriamo la coppia $\varphi(\{m\}^*) = (m^*, \vartheta(m^* + a_2(0, x_3 - x_1)))$, otteniamo in

$$\Gamma(D(H), \mathcal{M}) \times \Gamma(D(x_1), \overline{\mathcal{M}}_{\overline{\mathbb{Q}}})$$

un insieme $\varphi(\mathfrak{J}^*)$ di elementi, i quali con le relazioni

$$(8) \quad \alpha(\varphi\{m\}^*) = \varphi(\{\alpha m\}^*) \quad \text{per ogni } \alpha \in A, \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^3 x_i \varphi(\{m_i\}^*) = 0,$$

generano un modulo che indichiamo con $\varphi(M^*)$, isomorfo ad M .

7. Costruiamo ora, conservando le notazioni (3), (4) e (4)' fin qui usate, il seguente funtore \mathcal{M}^* :

Per ogni aperto U di X ,

I) se è $U \not\subset D(H)$ e $U \not\subset D(x_1)$, gli associamo il $\Gamma(U, \mathcal{A})$ -modulo $\Gamma(U, \mathcal{A}) \otimes_A \varphi(M^*)$, rappresentando convenientemente, tramite \mathfrak{J}^* , i suoi elementi $\alpha \otimes_A \varphi(\{m\}^*)$, e precisamente, se f/g è la frazione irriducibile che rappresenta $\alpha \in \Gamma(U, \mathcal{A})$, (qui $g \notin Ax_1$), dividiamo g ed m^* (v. (4)', n. 5; e (3), n. 4) per gli eventuali fattori ad essi comuni e scriviamo $\alpha \otimes_A \varphi(\{m\}^*) = (1/g') \otimes_A f \cdot \varphi(\{m'\}^*) = (1/g') \otimes_A \varphi(\{fm'\}^*)$; di modo che gli elementi di $\Gamma(U, \mathcal{A}) \otimes_A \varphi(M^*)$ possono tutti scriversi nella forma $(1/g) \otimes_A \varphi(\{m\}^*)$ con $\{m\}^* \in \mathfrak{J}^*$, (e $g \notin Ax_1$).

II) se è $U \subset D(H)$ e $U \not\subset D(x_1)$, gli associamo il $\Gamma(U, \mathcal{A})$ -modulo $\Gamma(U, \mathcal{M})$, il quale è isomorfo al modulo $\Gamma(U, \mathcal{A}) \otimes_A \varphi(M^*)$ (rappresentato come detto in I)) nell'isomorfismo pr_1 , definito da

$$\text{pr}_1 \left((1/g) \otimes_A \varphi(\{m\}^*) \right) = (1/g) m^*.$$

III) se $U \subset D(x_1)$ e $U \not\subset D(H)$, e quindi $U \neq U \cap D(H)$, gli associamo il modulo $\Gamma(U, \overline{\mathcal{M}}_{\overline{\mathbb{Q}}})$ generato su $\Gamma(U, \mathcal{A})$ da $m_2 = (x_1, 0)$ ed $\bar{m}_3 = (0, x_3)$.

IV) se è $U \subset D(H) \cap D(x_1)$, gli associamo il $\Gamma(U, \mathcal{A})$ -modulo $\Gamma(U, \mathcal{A}) \otimes_A \varphi(M^*)$ rappresentato come detto in I), ricordando che m^* può contenere il fattore x_1 se e solo se $a_2 = 0$, cioè se è $m^* = bm_2 + cm_3$, nel qual caso però, per conservare la rappresentazione tramite gli elementi di J^* , la riduzione di fattori x_1 comuni con g , sarà fatta se e solo se, qualora non sia più $b = x_1 b'$ e $c = x_1 c'$, sia tuttavia ancora $b = hx_2$ e $c = hx_3$, per cui è $bm_2 + cm_3 = -hx_1 m_1$.

Inoltre alle inclusioni degli aperti U' dei tipi II), III), e IV), in quelli, U , del tipo I), associamo come morfismi ϱ_u^v , fra i moduli corrispondenti, rispettivamente le iniezioni pr_1 , pr_2 e l'iniezione naturale fornita dalla restrizione, con

$$\text{pr}_i \left((1/g) \otimes_A \varphi(\{m\}^*) \right) = (1/g) \otimes_A \text{pr}_i \left(\varphi(\{m\}^*) \right).$$

All'inclusione d'un aperto del tipo IV) in uno del tipo II), associamo l'iniezione pr_1^{-1} , che si ottiene fra i moduli associati, tramite l'isomorfismo pr_1 , di cui è detto in II).

Per definire la restrizione $\varrho_{v'}^v$, corrispondente all'inclusione d'un aperto del tipo IV) in uno del tipo III), osserviamo che ogni elemento $\xi = \alpha m_2 + \beta \bar{m}_3 \in \Gamma(U, \overline{\mathcal{M}}_{(\bar{\omega})})$ può scriversi dapprima $\xi = (f_2 m_2 + f_3 \bar{m}_3)/g_1$, dove f_2 ed f_3 non abbiano un fattore in comune con g_1 , dopo di che ancora, se è simultaneamente

$$(9) \quad g_1 = x_1 g, \quad f_2 = bx_1 - a_2 x_2 \quad \text{ed} \quad f_3 = cx_1 - a_2 x_1$$

si scriverà $\xi = (1/g) \otimes_A \text{pr}_2 \left(\varphi(\{a_2 m_1 + bm_2 + cm_3\}^*) \right)$; e in caso contrario, se qualcuna delle (9) non vale, si scriverà $\xi = (1/g_1) \otimes_A \text{pr}_2 \left(\varphi(\{f_2 m_2 + f_3 \bar{m}_3\}^*) \right)$.

Poniamo allora comunque $\varrho_{v'}^v = \text{pr}_2^{-1} \left(1/g \otimes \text{pr}_2 \left(\varphi(\) \right) \right) = 1/g \otimes \varphi(\)$.

(Per es.: per $\xi = (x_2, x_3) = (x_2 m_2 + x_1 \bar{m}_3)/x_1 \in \Gamma(U, \overline{\mathcal{M}}_{(\bar{\omega})})$, essendo allora qui, per le (9), $b = c = 0$ e $a = -1$, risulta $\xi = -\text{pr}_2 \varphi(\{m_1\}^*)$, infatti, ((4) n. 5; e (6) n. 6), $\vartheta^{-1}(\xi) = (x_2 m_2 + x_1 m_3)/x_1 = -x_1 \bar{m}_1/x_1 = -\bar{m}_1 = -\text{pr}_2 \{m_1\}^*$. Invece per $\xi = (x_2, (x_3^2/x_1)) = (x_2 m_2 + x_3 \bar{m}_3)/x_1$, risulta

$$\vartheta^{-1}(\xi) = (x_2 m_2 + x_3 m_3)/x_1 = (1/x_1) \otimes_A \text{pr}_2 \left(\{x_2 m_2 + x_3 m_3\}^* \right)$$

e quindi $\xi = (1/x_1) \otimes \text{pr}_2 \varphi(\{x_2 m_2 + x_3 m_3\}^*)$. E ancora se $\xi = (x_1 x_2, x_1 x_3) = (x_2 m_2 + x_1 \bar{m}_3)$, per cui la prima delle (9) non vale, è $\vartheta^{-1}(\xi) = x_2 m_2 + x_1 m_3 = 1 \otimes \text{pr}_2(\{x_2 m_2 + x_1 m_3\}^*)$ e $\xi = 1 \otimes \text{pr}_2 \varphi(\{x_2 m_2 + x_1 m_3\}^*)$.

Infine alle altre inclusioni degli aperti dello spazio, associamo le restrizioni canoniche fra i moduli corrispondenti.

8. Il funtore \mathcal{M}^* costruito al n. precedente è un fascio, ed è isomorfo ad \mathcal{M} nell'isomorfismo ψ definito da: $\psi_\sigma = \text{pr}_1$, fra i moduli sugli aperti del tipo I); $\psi_\sigma = 1$, sugli aperti del tipo II); $\psi_\sigma = \text{pr}_1 \cdot \text{pr}_2^{-1}$, fra i moduli sugli aperti del tipo III) (tenuto conto dell'osservazione fatta al n. prec. a proposito della rappresentazione degli elementi di $\Gamma(U, \overline{\mathcal{M}}_{(\sigma)})$; $\psi_\sigma = \text{pr}_1$, sugli aperti del tipo IV).

Infatti di questi ψ_σ si verifica facilmente la compatibilità con le restrizioni di \mathcal{M}^* ed \mathcal{M} .

Inoltre in ogni punto $x \in X$, il germe della sezione rappresentata da $\varphi(\{m_1\}^*)$ di \mathcal{M}^* è fra i generatori liberi di \mathcal{M}_x^* , come volevasi.

BIBLIOGRAFIA

- [1] S. BALDASSARRI GHEZZO, *Riduzione di moduli proiettivi a somme dirette*, C.E.D.A.M., Padova (1974).
- [2] S. BALDASSARRI GHEZZO, *Un esempio della riduzione di moduli proiettivi a somme dirette*, Soc. Coop. Tip., Padova (1977).
- [3] S. BALDASSARRI GHEZZO, *Un modello riducibile per somma diretta d'un dato \mathcal{A} -modulo localmente libero, con $\mathcal{A} \in P.E.$* , Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, **60** (1978).
- [4] A. GROTHENDIECK - J. A. DIEUDONNÉ, *Eléments de Géométrie Algébrique, I*, Springer-Verlag, Berlin (1971).
- [5] M. RAYNAUD, *Modules projectifs universels*, Inventiones Math., **6**, Berlin (1968), pp. 1-26.
- [6] J. P. SERRE, *Faisceaux algébriques cohérents*, Ann. of Math., **61**, U.S.A. (1955), pp. 197-278.

Manoscritto pervenuto in redazione il 12 giugno 1981.