RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

WALTER STREB

Zur Galoistheorie assoziativer Ringe

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 67 (1982), p. 111-129

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1982__67__111_0>

REND. SEM MAT. UNIV. PADOVA, Vol 67 (1982)

Zur Galoistheorie assoziativer Ringe.

WALTER STREB (*)

Einleitung.

Sei R halbprimer Ring, Aut* (R) die Gruppe der Automorphismen und Antiautomorphismen von R, Aut (R) die Gruppe der Automorphismen von R, G Untergruppe von Aut* (R) und $R^G := \{r \in R | r^g = r$ für alle $g \in G\}$ der Fix-Jordanring von G. Wir studieren in dieser Note verallgemeinerte Polynomidentitäten, Beziehungen zwischen G, R^G und R und zitieren meist nach den zusammenfassenden Darstellungen [4] und [7] zu diesem Thema.

I) *Verallgemeinerte Polynomidentitäten.* Verallgemeinerte Polynome (in nichtvertauschbaren Unbestimmten) erhält man durch Einbeziehung der «Unbestimmten» x^g, $g \in G$, wobei bei den Substitutionen $r \to x$, $r \in R$, x^g in r^g übergeht. Ein Ziel diesbezüglicher Untersuchungen ist die Angabe von Klassen verallgemeinerter Polynome f, so daß folgendes gilt: Ist f Identität von R, so ist R PI-Ring.

Amitsur [4; Theorem 6.5.1, p. 195] hat diese Fragestellung für $G = \{1, *|*$ Involution$\}$ behandelt. Kharchenko [7; Corollary 6.15, p. 105 und Example 6.13, p. 103] hat dieses Problem für prime Ringe R und $G \subset$ Aut (R), wobei G X-äußere Gruppe [7; p. 42] ist, bearbeitet und gezeigt, daß (abgesehen von Spezialfällen) die Beschränkung auf X-äußere Gruppen angebracht ist. Wir geben eine entsprechende Lösung dieses Problems für prime Ringe R und $G \subset$ Aut* (R). wobei $\tilde{G} := G \cap$ Aut (R) X-äußere Gruppe ist.

(*) Indirizzo dell'A.: Fachbereich 6 - Mathematik, Universität Essen - GHS, Universitätsstraße 3, D-4300 Essen 1, BRD.

II) *Wir beschränken jetzt die einführenden Erläuterungen.* Sei $G \subset \mathrm{Aut}\,(R)$ und R endliche direkte Summe zentral abgeschlossener primer Ringe. Für einen G-invarianten Unterring T von R sei $G|T$ das Bild von G unter dem kanonischen Gruppenmorphismus $G \to \mathrm{Aut}\,(T)$. Wir definieren eine $Z(R)$-Algebra $B = B(G)$ und Folgegruppen G^F, G^B, $G^{ab} \subset \mathrm{Aut}\,(R)$ von G mit folgenden Eigenschaften: G^F und G^B sind endliche Gruppen und G^{ab} ist endlich erzeugte abelsche Gruppe. Wir zeigen (jeweils unter gewissen Einschränkungen an die Torsionsfreiheit von R und die Beziehungen zwischen B, G^F und G^B) folgende Aussagen:

(1) $R^{G^F} = R^G Z(R)$ (Satz 13).

(2) Sei $G^{fix} = 1$. Dann gibt es $c \in Z(R)$, so daß $R = \bigoplus_{g \in G|Z(R)} R^G c^g = R^G \bigotimes_{Z(R)^G} Z(R)$ (Satz 16).

(3) Sei $(G|Z(B))^{fix} = 1$. Dann gibt es $c \in Z(B)$, so daß $R^{G^F} = \bigoplus_{g \in G|Z(B)} R^G c^g = R^G \bigotimes_{Z(B)^G} Z(B)$ (Satz 21).

(4) $R^{G^{ab}} = R^G Z(R) \bigotimes_{Z(B)} B$ (Satz 24).

(5) Sei $(G|Z(B))^{fix} = 1$. Dann gilt $R^{G^{ab}} = R^G \bigotimes_{Z(B)^G} B$ (Satz 24).

Die Situation « G^{ab}, $R^{G^{ab}}$, R » liegt nach Bildung geeigneter Tensorprodukte offen. Wir diskutieren weiterhin PI-Eigenschaften, Kompositionslängen und endliche zentralisierende Erzeugbarkeit.

1. Verallgemeinerte Polynomidentitäten.

Im folgenden sei R halbprimer Ring mit Zentrum $Z = Z(R)$ und R_F Martindale's Quotientenring von R [7; pp. 38-42]. $C = Z(R_F)$ heißt erweitertes Zentroid und RC zentrale Hülle von R.

Für $g \in \mathrm{Aut}\,(R)$ sei $\varphi_g := \{x \in R_F | xr^g = rx \text{ für alle } r \in R\}$. Für $G \subset \mathrm{Aut}\,(R)$ sei $G^{\mathrm{inn}} := \{g \in G | \varphi_g \neq 0\}$ die Menge der X-inneren Automorphismen und $\bar{G}$ der Normalteiler der inneren Automorphismen von G.

Mit der Menge X^G der « Unbestimmten » x_j^g, $j \in \mathbf{N}$ und $g \in G$ bildet man die freie C-Algebra $C\{X^G\}$. Für $f(y_1, \ldots, y_n) \in C\{X^G\}$ sei $f(R) := \{f(r_1, \ldots, r_n) | r_i \in R,\ 1 \leqslant i \leqslant n\}$. (Bei den Substitutionen $r_i \to y_i$ geht $y_i = x_j^g$ über in r_i^g). Sei $X := \{x_j | j \in \mathbf{N}\}$.

Wir beweisen den folgenden

SATZ 1. Sei R primer Ring, G Untergruppe von Aut* (R), $\tilde{G}^{\text{inn}} = 1$ und $f \in C\{X^G\}$ vom Grad $d > 0$, wobei wenigstens ein Monom von f vom Grad d den Koeffizienten 1 besitzt. Sei weiterhin $f(R) = 0$. Dann gilt $S_{2d}(R) = 0$. Hierbei sei S_{2d} das $2d$-te Standardpolynom.

(A) *Im folgenden sei R primer Ring.*

Der Beweis von Satz 1 wird vorbereitet durch einige Bemerkungen und Lemmata.

BEMERKUNG 2. (1) Durch naheliegende Kombination der Konstruktionen [4; Lemma 2.4.1, p. 88] und [7; p. 42] kann jedes Element $g \in \text{Aut}^*(R)$ eindeutig zu einem Element $g' \in \text{Aut}^*(RC)$ erweitert werden. Zur Vereinfachung notieren wir g und g' gleich.

(2) Wie in [7; p. 99] sei $R_F \coprod_C \{X^G\}$ das freie Produkt von R_F mit X^G über C und T das von

$$\{x_j^{hg} - s^{-1} x_j^h s \mid j \in \mathbf{N},\ h \in G,\ g \in \tilde{G}^{\text{inn}},\ s \in \varphi_g\}$$

erzeugte Ideal von $R_F \coprod_C \{X^G\}$. Ist B C-Basis von R_F mit $1 \in B$, so bilden die «formalen Produkte» mit abwechselnden Faktoren aus $B \cup X^G$ eine C-Basis von $R_F \coprod_C \{X^G\}$.

(3) Nach [7; Lemma 3.4, p. 42] ist $\tilde{G}^{\text{inn}}$ Normalteiler von $\tilde{G}$. Sei $\tilde{G} = \dot{\bigcup}_{h \in H} h\tilde{G}^{\text{inn}}$ disjunkt und $1 \in H$. $\tilde{G}$ ist Normalteiler von G mit Index 2. Sei $G = \tilde{G} \,\dot\cup\, h^* \tilde{G}$ disjunkt.

(4) Für $A \subset R$ und $f \in R_F \coprod_C \{X^G\}$ sei $f(A) := \{f(r_1, \ldots, r_n) \mid r_i \in A,\ 1 \leqslant i \leqslant n\}$ und $f(A)^+$ der von $f(A)$ erzeugte C-Modul. (Bei den Substitutionen $r_i \to y_i$ geht $y_i = x_j^g$ über in r_i^g).

Wir gehen zunächst vor entlang der «Linie» [7; pp. 99-106]. Man hat unmittelbar

LEMMA 3. Seien $x \in R$, $a_i \in R_F$ und $h_i \in H$, $1 \leqslant i \leqslant n$.

(1) Ist $a_1 = \sum_{2 \leqslant i \leqslant n} a_i u_i$ mit $u_i \in \varphi_{h_i^{-1} h_1}$, $2 \leqslant i \leqslant n$, so gilt:

$$a_1 x^{h_1} = \sum_{2 \leqslant i \leqslant n} a_i x^{h_1} u_i \,.$$

(2) Gibt es $c_j, d_j \in R$, $1 \leqslant j \leqslant m$, so daß $\sum_{1 \leqslant j \leqslant m} c_j a_1 d_j^{h_1} \neq 0$ und $\sum_{1 \leqslant j \leqslant m} c_j a_i \cdot d_j^{h_i} = 0$, $2 \leqslant i \leqslant n$, so gilt:

$$\sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant m}} c_j a_i (d_j x)^{h_i} = \sum_{1 \leqslant j \leqslant m} c_j a_1 d_j^{h_1} x^{h_1}.$$

LEMMA 4. Sei $f \in R_F \coprod_C \{X^G\} \setminus T$ und $f(R)^+$ endlichdimensional über C. Dann ist RC primitiv mit minimalem Rechtsideal eRC, $0 \neq e^2 = e \in RC$ und $[eRCe : C] < \infty$.

BEWEIS. Man beachte, daß bei allen folgenden Operationen die Voraussetzungen gültig bleiben.

(1) Für $x_k, x_l \in X$ und $g \in G$ kann man in f die Substitution $x_l^g \to x_k$ vornehmen.

(2) O.E. sei $f \in R_F \coprod_C \{X^{H \cup h^*H}\}$ und multilinear, wobei dann $f \notin T$ gleichwertig zu $f \neq 0$ ist [7; Lemma 6.11, p. 99].

(3) f besitzt die Gestalt

$$f = \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} a_i x^{g_i} f_i' + \sum_{1 \leqslant j \leqslant m} b_j x^{h^* h_j} f_j'' + f'''$$

mit $x \in X$, $a_i \neq 0 \neq b_j \in R_F$, $f_i' \neq 0 \neq f_j''$, $g_i, h_j \in H$, $1 \leqslant i \leqslant n$, $1 \leqslant j \leqslant m$, wobei kein x^h, x^{h^*h} mit $h \in H$ in f''' an « erster Stelle » vorkommt. (Hierbei ist eine der beiden Summen möglicherweise leer). Durch Anwendung von (1) erreicht man, daß die erste Summe nichtleer ist.

Nach [7; Proposition 3.14, p. 50] kann man Lemma 3.(1) oder (2) anwenden und erreicht (in mehreren Schritten) $n = 1$. Falls die zweite Summe nichtleer ist, substituiert man $x^{h^*} \to x$, wendet (2) an und verfährt wie eben.

(4) f besitzt jetzt o.E. die Gestalt

$$f = axf' + bx^{h^*h} f'' + f'''$$

mit $x \in X$, $0 \neq a, b \in R$, $f' \neq 0 \neq f''$, $h \in H$ und f''' wie oben.

(5) Für $b \neq 0$ geht man vor wie folgt: Für alle $r \in R$ erhält man durch die Substitution $x(rb)^{(h^*h)^{-1}} \to x$ aus f ein

$$\text{Polynom} \equiv ax(rb)^{(h^*h)^{-1}} f' + brbx^{h^*h} f'' + f'''.$$

Subtrahiert man dies von brf, so erhält man

$$(brax - ax(rb)^{(h^*h)^{-1}})f' + brf''' - f''''$$

für alle $r \in R$.

Ist $bRa \subset Ca$, so erhält man die Behauptung mit [4; Lemma 1.3.3, p. 25]. Anderenfalls sei nach [7; Proposition 3.14, p. 50] und Lemma 3.(2) o.E.

$$f = axf' + f'''$$

mit $x \in X$, $0 \neq a \in R$, $f' \neq 0$ und f''' wie oben.

(6) Indem man mit allen an « erster Stelle » vorkommenden Elementen $x \in X$ analog verfährt und (1) beachtet erhält man o.E.

$$f = \sum_{1 \leqslant i \leqslant k} a_i x_i f_i$$

mit $0 \neq a_i \in R$ und $0 \neq f_i$, $1 \leqslant i \leqslant k$. Weiterhin sei k so klein wie möglich gewählt.

Wir schließen nun mit vollständiger Induktion nach der Anzahl der vorkommenden Elemente aus X. Den Induktionsbeginn liefert [4; Lemma 1.3.3, p. 25].

(7) Sei $k = 1$. Für $f_1(R) \neq 0$ verwenden wir den Induktionsbeginn und für $f_1(R) = 0$ den Induktionsschluß.

(8) Sei $k > 1$, $a := a_1$, $x := x_1$ und $f' := f_1 \cdot f$ besitze die Gestalt

$$f = axf' + \sum_i u_i x^{g_i} u_i' + \sum_j v_j x^{h^*h_j} v_j'$$

mit $u_i \neq 0 \neq v_j$, paarweise verschiedenen Basismonomen $x^{g_i}u_i'$, $x^{h^*h_j}v_j'$ (vgl. Bemerkung 2.(2)) und $g_i, h_j \in H$. (Hierbei ist eine der beiden Summen möglicherweise leer).

(9) Sei die erste Summe leer. Für $f'(R) = 0$ verwendet man den Induktionsschluß und für $f'(R) \neq 0$ den Induktionsbeginn.

(10) Sei die erste Summe nichtleer. Für alle $r \in R$ erhält man durch die Substitutionen $rax \to x$ aus f ein

$$\text{Polynom} \equiv araxf' + \sum_i u_i r^{g_i} a^{g_i} x^{g_i} u_i' + \sum_j v_j x^{h^*h_j} a^{h^*h_j} r^{h^*h_j} v_j' .$$

Subtrahiert man dies von arf, so erhält man

$$\sum_i (aru_i - u_i r^{g_i} a^{g_i}) x^{g_i} u_i' + \sum_j (arv_j x^{h^* h_j} - v_j x^{h^* h_j} a^{h^* h_j} r^{h^* h}) v_j'$$

für alle $r \in R$.

Da k minimal gewählt ist und $x^{g_i} u_i'$, $x^{h^* h_j} v_j'$ paarweise verschiedene Basismonome sind, gilt insbesondere $aru_1 - u_1 r^{g_1} a^{g_1} = 0$ für alle $r \in R$. Für $u_1(R) \subset Ca$ verwendet man den Induktionsschluß. Für $u_1(R) \not\subset Ca$ und $g_1 = 1$ folgt die Behauptung mit [4; Lemma 1.3.3, p. 25]. Für $u_1(R) \neq 0$ und $g_1 \neq 1$ verwendet man den Induktionsbeginn.

(B) *Im folgenden sei* $R = \bigoplus_{1 \leqslant i \leqslant n} R_i$ *direkte Summe primer Ringe* R_i, $1 \leqslant i \leqslant n$.

BEMERKUNG 5. Sei $Z = Z(R)$ und $C = C(R)$.

(1) Es gilt $R_F = \bigoplus_{1 \leqslant i \leqslant n} (R_i)_F$ und $C = \bigoplus_{1 \leqslant i \leqslant n} C(R_i)$.

(2) Es gibt eindeutig $0 \neq e_i \in C$ mit $e_i^2 = e_i$, $e_i e_j = 0$, $1 \leqslant i \neq j \leqslant n$ und $\sum_{1 \leqslant i \leqslant n} e_i = 1$, so daß $(R_i)_F = e_i R_F$ und $C(R_i) = e_i C$, $1 \leqslant i \leqslant n$.

(3) Sei $G^{fix} := \{g \in G | \text{es gibt } i, \text{ so daß } g|e_i C = \text{Identität auf } e_i C\}$.

(4) Für G-invariante Unterringe T von R sei $G|T$ das Bild von G unter dem kanonischen Gruppenmorphismus $G \to \mathrm{Aut}^*(T)$.

LEMMA 6. Sei $G^{fix}|C = 1$. Dann ist G^{fix} Normalteiler von G. Sei $G = \dot{\bigcup}_{h \in H} hG^{fix}$ disjunkt. Sei weiter $f \in R_F \coprod_C \{X^G\}$ multilinear, $x \in X$ und $f = \sum_{h \in H} f_h$ mit $f_h \in R_F \coprod_C \{\{x\}^{hG^{fix}} \cup (X \setminus \{x\})^G\}$. Dann gibt es zu jedem Ideal $I \in F$ ein Ideal $J \in F$ und $D \subset C$, D endlich, so daß $f_h(J) \subset f(I)D$ für alle $h \in H$. Für $C = Z$ ist $J = I$ geeignet.

BEWEIS. Von den f_h sind nur endlich viele f_{h_k}, $1 \leqslant k \leqslant l$ von null verschieden. Wir wenden nun [7; Proposition 3.14, p. 50] auf C und $h_k|C$, $1 \leqslant k \leqslant l$ an. Es gibt $c_j, d_j \in C$, $1 \leqslant j \leqslant m$, so daß $\sum_{1 \leqslant j \leqslant m} c_j e_1 d_j^{h_1} \neq 0$ und $\sum_{1 \leqslant j \leqslant m} c_j e_1 d_j^{h_k} = 0$, $2 \leqslant k \leqslant l$. Weiterhin gibt es ein Ideal $J_1 \in F$, so daß $J_1 \subset I$ und $d_j J_1 \subset I$, $1 \leqslant j \leqslant m$. Substituiert man $d_j r \to x$, $r \in J_1$ in f, multipliziert man linksseitig mit c_j, summiert man dann über j und multipliziert man schließlich mit e_1, so sieht man, daß $e_1 f_{h_1}(J_1) \subset$

$\subset f(I)D_1$ mit geeignetem $D_1 \subset C$, D_1 endlich. Für e_i, $2 \leqslant i \leqslant n$ verfährt man analog und setzt dann $J := \bigcap_{1 \leqslant i \leqslant n} J_i$ und $D := \bigcup_{1 \leqslant i \leqslant n} D_i$.

SATZ 7. Sei $G^{fix}|C = 1$ und $\tilde{G}^{fix} = 1$. Dann ist $G^{fix} = 1$ bzw. $G^{fix} = \{1, *|* \text{ Involution}\}$. Sei $f \in C\{X^G\}$ vom Grad $d > 0$, wobei wenigstens ein Monom von f vom Grad d den Koeffizienten 1 besitzt. Sei weiterhin $f(R) = 0$. Dann gilt $S_d(R) = 0$ bzw. $S_{2d}(R) = 0$.

BEWEIS. O.E. sei f multilinear. Nach mehrmaliger Anwendung von Lemma 6 und geeigneten Substituionen $x^{h^{-1}} \to x$, $h \in H$ sei o.E. $f \in C\{X^{G^{fix}}\}$ und $f(CI) = Cf(I) = 0$ mit einem Ideal $I \in F$. Im ersten Fall sind wir fertig. Im zweiten Fall ist nach [4; Lemma 5.1.5, p. 195] $S_{2d}(CI) = 0$, also $S_{2d}(R) = 0$.

Satz 1 erhält man nun unmittelbar mit Satz 7, Lemma 4 und [7; Theorem 3.13, Proof, p. 48].

Für endliche G, $a \in R$ und $A \subset R$ sei

$$t_G(a) := \sum_{g \in G} a^g \qquad \text{und} \qquad t_G(A) := \{t_G(a) | a \in A\} .$$

Durch Anwendung von Lemma 6 erhält man

COROLLAR 8. Sei R prim und G endlich.

(1) Es gibt ein Ideal $I \neq 0$ von R, so daß

$$t_{G^{fix}}(I) \subset t_G(R)\, C .$$

(2) Ist $C = Z$ und $R|G^{fix}|$-torsionfrei, so gilt

$$R^{G^{fix}} = t_{G^{fix}}(R) = t_G(R)\, Z = R^G Z .$$

2. In diesem Kapitel sei $1 \in R$ und $R = \bigoplus_{1 \leqslant i \leqslant n} R_i$ direkte Summe zentral abgeschlossener primer Ringe R_i; $1 \leqslant i \leqslant n$.

BEMERKUNG 9. (1) Sei S_n das *n-te* Standardpolynom. Ist R kein *PI*-Ring, so setzen wir formal $S_\infty(R) = 0$. Sei weiterhin

$$PI(R) := \min \{n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\} | S_n(R) = 0\}$$

und

$$pi(R) := \min\{n \in \mathbf{N} \cup \{\infty\} | \text{ es gibt ein Ideal } I \neq 0 \text{ von } R, \text{ so daß } S_n(I) = 0\}.$$

(2) Es gibt eindeutig $0 \neq e_i \in Z(R)$ mit $e_i^2 = e_i$, $e_i e_j = 0$, $1 \leqslant i \neq j \leqslant n$ und $\sum_{1 \leqslant i \leqslant n} e_i = 1$, so daß $R_i = e_i R$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Wir setzen $L(R) := n$.

Weiterhin ist $R = \bigoplus_{1 \leqslant i \leqslant m} S_i$ eindeutig direkte Summe (G-invarianter) G-direkt unzerlegbarer Ringe S_i, $1 \leqslant i \leqslant m$ und es gibt eindeutig $0 \neq f_i \in Z(R)^G$ mit $f_i^2 = f_i$, $f_i f_j = 0$, $1 \leqslant i \neq j \leqslant m$ und $\sum_{1 \leqslant i \leqslant m} f_i = 1$, so daß $S_i = f_i S$, $1 \leqslant i \leqslant m$. Wir setzen $L_G(R) := m$.

(3) Sei $G_i := \{g \in G | e_i^g = e_i\}$ und $H_i := G_i | e_i R$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Sei

$$G^F := \underset{1 \leqslant i \leqslant n}{\times} H_i^{fix}, \quad G^{\tilde{F}} := \underset{1 \leqslant i \leqslant n}{\times} \tilde{H}_i^{fix} \quad \text{und} \quad G^B := \underset{1 \leqslant i \leqslant n}{\times} \tilde{H}_i^{inn}.$$

Dann gibt es kanonische Einbettungen $G^F \to \mathrm{Aut}^*(R)$ und $G^B \subset G^{\tilde{F}} \to \to \mathrm{Aut}(R)$.

Sei

$$B_i := \underset{g \in \tilde{H}_i^{inn}}{+} \varphi_g, \ 1 \leqslant i \leqslant n \quad \text{und} \quad B := \bigoplus_{1 \leqslant i \leqslant n} B_i.$$

Dann ist $B_i = e_i B$, $1 \leqslant i \leqslant n$.

(4) Sei $\bar{G} = G$. Zu den Beziehungen zwischen G^{fix}, G^{inn} und $\bar{G}$ beachte [7; Example 3.6, p. 44, Lemma 3.4, p. 42, Theorem 3.13, p. 48 und p. 55].

(*a*) Es gilt $\bar{H}_i \subset H_i^{inn} \subset H_i^{fix}$, $1 \leqslant i \leqslant n$.

(*b*) Ist R_i normal abgeschlossen, so gilt $\bar{H}_i = H_i^{inn}$, $1 \leqslant i \leqslant n$.

(*c*) Sind für R_i die Voraussetzungen von Lemma 4 erfüllt, so gilt $H_i^{inn} = H_i^{fix}$, $1 \leqslant i \leqslant n$.

(*d*) $(G|Z)^{inn} = (G|Z)^{fix}$.

(*e*) $G^{inn} = \bigcup_{1 \leqslant i \leqslant n} \{g \in G_i | g | e_i R \in H_i^{inn}\} \subset$
$\subset G^{fix} = \bigcup_{1 \leqslant i \leqslant n} \{g \in G_i | g | e_i R \in H_i^{fix}\} = \{g \in G | g | Z \in (G|Z)^{fix}\}$.

(5) Für $A \subset R$ sei $\langle A \rangle$ der von A erzeugte Unterring von R und

$$C_R(A) := \{r \in R \mid ra = ar \text{ für alle } a \in A\}.$$

Die Notationen aus Bemerkung 9 werden im folgenden stillschweigend verwendet.

LEMMA 10. Sei $E := \{e_i \mid 1 \leqslant i \leqslant n\}$ mit $e_i^2 = e_i$, $e_i e_j = 0$, $1 \leqslant i \neq j \leqslant n$ und $\sum_{1 \leqslant i \leqslant n} e_i = 1$. Dann gilt:

(1) $C_R(E) = \bigoplus_{1 \leqslant i \leqslant n} e_i R e_i =: R_E$.

(2) Für Unterringe T mit $E \subset T \subset R_E$ gilt:

$$C_R(T) = \bigoplus_{1 \leqslant i \leqslant n} e_i C_R(T) = \bigoplus_{1 \leqslant i \leqslant n} C_{e_i R e_i}(e_i T),$$

$$Z(T) = \bigoplus_{1 \leqslant i \leqslant n} e_i Z(T) = \bigoplus_{1 \leqslant i \leqslant n} Z(e_i T).$$

(3) Ist R einfacher Artinring, so gilt:

$$Z(e_i R e_i) = e_i Z(R), \qquad 1 \leqslant i \leqslant n.$$

BEWEIS.

(1) $C_R(E) = \bigoplus_{1 \leqslant i \leqslant n} e_i C_R(E) = \bigoplus_{1 \leqslant i \leqslant n} C_{e_i R e_i}(\{e_i\}) = \bigoplus_{1 \leqslant i \leqslant n} e_i R e_i$.

(2) ist nun trivial.

(3) erhält man durch Verfeinerung von E zu einem System primitiver orthogonaler Idempotenter.

Analog zu [7; Lemma 2.14, p. 31] gilt

LEMMA 11. Sei $R = \bigoplus_{1 \leqslant i \leqslant n} e_i R$ direkte Summe primer Ringe $e_i R$, $1 \leqslant i \leqslant n$ und G endlich. Dann gilt:

$$t_{H_i}(e_i R) = e_i t_G(R) \quad \text{und} \quad (e_i R)^{H_i} = e_i R^G, \qquad 1 \leqslant i \leqslant n.$$

LEMMA 12. Sei R 2-torsionsfreie direkte Summe einfacher Ringe, $*$ Involution auf R, $Z = Z(R)$ und $T := \langle R^{\{1,*\}} \rangle$. Dann gilt:

(1) Es gibt $u_k \in C_R(T)$, $1 \leqslant k \leqslant 4$, so daß $R = \sum_{1 \leqslant k \leqslant 4} T u_i$.

(2) $R = T + C_R(T)$ und $T \cap C_R(T) \subset Z$.

BEWEIS.

(1) O.E. sei R *-einfach. Nach [4; Theorem 2.1.5, p. 59] ist $T = R$ oder ($T \subset Z$ und $S_4(R) = 0$). O.E. sei $T \subset Z$ und $S_4(R) = 0$. Ist R kein einfacher Ring, so ist R kommutativ und * Austauschinvolution, also die Behauptung trivial. Ist R einfacher Ring und $T = Z$, so sind wir fertig. O.E. sei R einfacher Ring und $T \subsetneq Z$. Wähle $0 \neq z \in Z$ mit $z^* \neq z$. Dann gilt $R = T + T(z - z^*)$.

(2) erhält man mit ähnlichen Argumenten.

(A) *Im folgenden sei G endlich, $R_i|H_i^{fix}|$-torsionsfrei, $1 \leqslant i \leqslant n$ und $Z = Z(R)$.*

SATZ 13.

(1) $R^{G^F} = R^G Z = t_G(R) Z$.

(2) Sei $\tilde{G} = G$. Dann gilt: $PI(R) \leqslant \max\{|H_i^{fix}| \mid 1 \leqslant i \leqslant n\} PI(R^G)$.

(3) Sei R_i einfach, $1 \leqslant i \leqslant n$. Dann gilt:

(*a*) Es gibt $u_k \in C_{R^{G^F}}(\langle R^{G^F} \rangle)$, $1 \leqslant k \leqslant 4$, so daß

$$R^{G^{\tilde{F}}} = \sum_{1 \leqslant k \leqslant 4} \langle R^{G^F} \rangle u_k .$$

(*b*) $R^{G^{\tilde{F}}} = R^{G^F} + C_{R^{G^F}}(\langle R^{G^F} \rangle)$ und $R^{G^F} \cap C_{R^{G^F}}(\langle R^{G^F} \rangle) \subset Z$.

(4) Sei $\tilde{G} = G$. Dann gilt: $Z(R^G) = Z(R^{G^F})^G$.

BEWEIS.

(1) Nach Corollar 8.(2) und Lemma 11 ist

$$R^{G^F} = \bigoplus_{1 \leqslant i \leqslant n} (e_i R)^{H_i^{fix}} = \bigoplus_{1 \leqslant i \leqslant n} (e_i R)^{H_i} e_i Z = \bigoplus_{1 \leqslant i \leqslant n} e_i R^G e_i Z = R^G Z$$

und entsprechend $R^{G^F} = t_G(R) Z$.

(2) Nach (1) sei o.E. R prim und $G = G^{fix}$. Mit [7; Theorem 6.5, p. 93] erhält man die Behauptung.

(3) (*a*) Es operiert $H_i^{fix}/\tilde{H}_i^{fix} \subset \{1, *|* \text{ Involution}\}$ auf $(e_iR)^{\tilde{H}_i^{fix}}$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Mit [7; Theorem 2.15, p. 32] und Lemma 12 erhält man die Behauptung.

(3) (*b*) erhält man mit ähnlichen Argumenten wie (3) (*a*).

(4) erhält man unmittelbar mit (1).

ANMERKUNG. Z ist ein Z^G-Modul mit $m := \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} |H_i| e_i Z|$ Erzeugenden c_j, $1 \leqslant j \leqslant m$. Also gilt $R^{G^F} = \dotplus_{1 \leqslant j \leqslant m} R^G c_j$.

(B) *Im folgenden sei zusätzlich* $\tilde{G} = G$.

LEMMA 14. Sei T Unterring von R, $1 \in T$, $T = \bigoplus_{1 \leqslant i \leqslant n} e_i T$ mit einfachen Ringen e_iT, $1 \leqslant i \leqslant n$, $u_j \in C_R(T)$, $1 \leqslant j \leqslant m$ und $\bigoplus_{1 \leqslant j \leqslant m} Z(T) u_j$. Dann gilt $\bigoplus_{1 \leqslant j \leqslant m} T u_j$.

BEWEIS. Angenommen es gibt $0 \neq t_k \in T$ und $v_k \in \{u_j | 1 \leqslant j \leqslant m\}$, so daß $\sum_{1 \leqslant k \leqslant l} t_k v_k = 0$. Wähle l so klein wie möglich. O.E. sei $t_k \in e_1 T$, $1 \leqslant k \leqslant l$ und $t_1 = e_1$, da e_1T einfacher Ring ist. Nach Voraussetzung sind nicht alle $t_k \in Z(e_1T)$. Also gibt es $t \in e_1T$, so daß nicht alle $t_k t - t t_k$ gleich null, $e_1 t - t e_1 = 0$ und $\sum_{1 \leqslant k < l} (t_k t - t t_k) v_k = 0$ im Widerspruch zur minimalen Wahl von l.

ANMERKUNG. Lemma 14 gilt auch unter der folgenden schwächeren Voraussetzung:

$$I \cap Z(T) \neq 0 \qquad \text{für alle Ideal } I \neq 0 \text{ von } T.$$

In den folgenden Sätzen kann man deshalb alle Voraussetzungen, die lediglich dazu dienen auf « R^G ist direkte Summe einfacher Ringe » zu schließen, durch die Voraussetzung « $I \cap Z(R^G) \neq 0$ für alle Ideale $I \neq 0$ von R^G » ersetzen.

LEMMA 15. Sei $R = \bigoplus_{1 \leqslant i \leqslant n} e_i R$ mit einfachen Ringen e_iR, $1 \leqslant i \leqslant n$.

(1) Sei e_iR $|H_i|$-torsionsfrei, $1 \leqslant i \leqslant n$. Dann ist R^G direkte Summe von höchstens $\sum_{1 \leqslant i \leqslant n} |H_i|$ einfachen Ringen.

(2) Sei R Artinring und $H_i^{inn} = 1$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Dann ist R^G direkte Summe von höchstens n einfachen Artinringen.

(3) Sei $H_i^{inn} = 1$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Dann ist $t_G(R)$ direkte Summe von höchstens n einfachen Ringen und R^G halbprimitiv.

(4) Sei $H_i^{inn} = 1$ und ($e_i R$ $|H_i|$-torsionsfrei oder artinsch), $1 \leqslant$ $\leqslant i \leqslant n$. Dann ist R^G direkte Summe von höchstens n einfachen Ringen.

BEWEIS.

(1) Nach Lemma 11 ist $e_i R^G = (e_i R)^{H_i}$, $1 \leqslant i \leqslant n$, also R^G subdirektes Produkt der Ringe $(e_i R)^{H_i}$, $1 \leqslant i \leqslant n$. O.E. sei deshalb R einfach. Mit [7; Theorem 2.15, p. 32] erhält man die Behauptung.

(2), (3) und (4) erhält man ähnlich mit Lemma 11 und [7; Theorem 2.7, p. 23; Theorem 2.9, p. 25 und Corollary 2.6, p. 23].

SATZ 16. Sei $G^{fix} = 1$. Dann gilt:

(1) Es gibt $c \in Z(R)$, so daß $R = \underset{g \in G/Z(R)}{+} t_G(R)\, c^g$.

(2) Sei R_i $|H_i|$-torsionsfreier einfacher Ring oder einfacher Artinring, $1 \leqslant i \leqslant n$. Dann gibt es $c \in Z(R)$, so daß

$$R = \bigoplus_{g \in G/Z(R)} R^G c^g = R^G \bigotimes_{Z(R)^G} Z(R)\,.$$

BEWEIS. Nach Satz 13.(1) ist $R = t_G(R)\, Z(R) = R^G Z(R)$, insbesondere $C_R(R^G) = Z(R)$, also $Z(R^G) = Z(R)^G$. Nach [7; p. 28] gibt es $c \in Z(R)$, so daß $Z(R) = \bigoplus_{g \in G/Z(R)} Z(R)^G c^g$. Mit Lemma 14 und 15 erhält man nun alle Behauptungen.

LEMMA 17. Sei R einfacher Artinring. Dann gilt:

(1) $B = \bigoplus_{1 \leqslant i \leqslant n} e_i B$ mit einfachen Ringen $e_i B$, $1 \leqslant i \leqslant n$, und $[B : Z \cdot (R)] < \infty$.

(2) $e_i R e_i$ ist einfacher Artinring, $1 \leqslant i \leqslant n$.

(3) $Z(e_i R e_i) = e_i Z(R) \subset Z(e_i B) \subset e_i B$,

$$[Z(e_i B) : e_i Z(R)] \leqslant [e_i B : e_i Z(R)] < \infty\,,$$

$C_{e_i R e_i}(e_i B)$ und $C_{e_i R e_i}(Z(e_i B))$ sind einfache Ringe,

$$C_{e_i R e_i}(C_{e_i R e_i}(e_i B)) = e_i B \quad \text{und} \quad Z(e_i B) = Z(C_{e_i R e_i}(e_i B))\,, \qquad 1 \leqslant i \leqslant n\,.$$

(4) $C_R(B)$ ist direkte Summe einfacher Ringe, $C_R(C_R(B)) = B$ und $Z(B) = Z(C_R(B))$.

Sei nun zusätzlich R PI-Ring.

(5) $C_{e_iRe_i}(Z(e_iB)) = e_iB \bigotimes_{Z(e_iB)} C_{e_iRe_i}(e_iB)$ ist einfacher Ring,

$$[e_iRe_i : e_iZ(R)] = [e_iB : e_iZ(R)][C_{e_iRe_i}(e_iB) : e_iZ(R)], \qquad 1 \leqslant i \leqslant n .$$

(6) $B \bigotimes_{Z(B)} C_R(B) = BC_R(B) = C_R(Z(B))$ ist direkte Summe einfacher Ringe.

BEWEIS. Verwende Lemma 10:

(1) gilt nach [7; Lemma 2.12, p. 28].

(2) Ist I Ideal (Linksideal) von e_iRe_i, so gilt

$$I = e_iRe_iIe_iRe_i \qquad (I = e_iRe_iI), \qquad 1 \leqslant i \leqslant n .$$

(3) gilt nach [3; Theorem 4.3.2, p. 104].

(4) Es ist $C_R(B) = \bigoplus_{1 \leqslant i \leqslant n} C_{e_iRe_i}(e_iB)$,

$$C_R(C_R(B)) = \bigoplus_{1 \leqslant i \leqslant n} C_{e_iRe_i}(e_iC_R(B)) = \bigoplus_{1 \leqslant i \leqslant n} C_{e_iRe_i}(C_{e_iRe_i}(e_iB)) = \bigoplus_{1 \leqslant i \leqslant n} e_iB = B .$$

Die letzte Behauptung ist nun trivial.

(5) gilt nach [2; Theorem 5, p. 365].

(6) Nach (5) ist

$$BC_R(B) = \Big(\bigoplus_{1 \leqslant i \leqslant n} e_iB\Big)\Big(\bigoplus_{1 \leqslant i \leqslant n} C_{e_iRe_i}(e_iB)\Big) =$$

$$= \bigoplus_{1 \leqslant i \leqslant n} e_iBC_{e_iRe_i}(e_iB) = \bigoplus_{1 \leqslant i \leqslant n} C_{e_iRe_i}(Z(e_iB)) = C_R(Z(B)) .$$

(C) *Im folgenden sei zusätzlich* $B \subset R$, $Z(C_R(B)) = Z(B)$ *und* $R^{G^F} = R^{G^B}$ $(= C_R(B))$.

ANMERKUNG.

(1) Sei R normal abgeschlossen. Dann gilt $B \subset R$.

(2) Sei R Artinring. Dann ist R normal abgeschlossen. Nach Lemma 17.(4) gilt $C_R(C_R(B)) = B$, insbesondere $Z(C_R(B)) = Z(B)$.

(3) Sei R PI-Ring. Dann ist R Artinring und $H_i^{inn} = H_i^{fix}$, $1 \leqslant i \leqslant n$, insbesondere $R^{G^F} = R^{G^B}$.

LEMMA 18. Sei R primer Ring. Dann gilt:

(1) $Z(R^G) = Z(B)^G$.

(2) B und $Z(B)$ bzw. $C_R(B)$ und $BC_R(B)$ ist direkte Summe einfacher bzw. direkt unzerlegbarer Ringe mit demselben zugeordneten System orthogonaler zentraler Idempotenter e_i, $1 \leqslant i \leqslant n$.

(3) $BC_R(B) = B \bigotimes_{Z(B)} C_R(B)$. Ist R einfacher Ring, so ist $C_R(B)$ und $BC_R(B)$ direkte Summe einfacher Ringe.

(4) Sei zusätzlich $C_R(C_R(B)) = B$. Dann gilt: $C_R(t_G(R)) = B$.

BEWEIS.

(1) erhält man mit $Z(C_R(B)) = Z(B)$ und Satz 13.(4).

(2) Nach [7; Lemma 2.12, Proof, p. 28] ist B und $Z(B)$ direkte Summe einfacher Ringe. Mit $Z(B) = Z(C_R(B)) = Z(BC_R(B))$ erhält man die Behauptung.

(3) Beachte Lemma 10: Zunächst ist $e_i Z(B) = e_i Z(C_R(B)) = e_i \cdot Z(BC_R(B))$, $1 \leqslant i \leqslant n$, Nach [2; Corollary, p. 364] ist $e_i BC_R(B) = e_i B \bigotimes_{e_i Z(B)} e_i C_R(B)$, $1 \leqslant i \leqslant n$, also $BC_R(B) = B \bigotimes_{Z(B)} C_R(B)$. Mit [7; Theorem 2.15, p. 32] und [2; Theorem 2, p. 363] erhält man die Zusatzbehauptungen.

(4) Nach Lemma 8.(2) sei o.E. $G^{fix} = G$. Dann ist $t_G(R) = R^G = R^{G^{inn}} = C_R(B)$, also $C_R(t_G(R)) = B$.

LEMMA 19. Es gilt ohne Zusatzvoraussetzung: Lemma 18.(1)-(4).

BEWEIS. Sei $R = \bigoplus_{1 \leqslant i \leqslant n} e_i R$ mit primen Ringen $e_i R$, $1 \leqslant i \leqslant n$.

(1) erhält man analog zu Lemma 18.(1).

(2) und (3) folgen unmittelbar mit Lemma 18.(2) und (3).

(4) Nach Lemma 11 und Lemma 18.(4) ist

$$C_R(t_G(R)) \subset \bigoplus_{1\leqslant i\leqslant n} C_{e_iR}(e_i t_G(R)) = \bigoplus_{1\leqslant i\leqslant n} C_{e_iR}(t_{H_i}(e_iR)) = \bigoplus_{1\leqslant i\leqslant n} B_i = B =$$
$$= C_R(C_R(B)) \subset C_R(t_G(R)) .$$

LEMMA 20. Sei $R = \bigoplus_{1\leqslant i\leqslant n} e_iR$ direkte Summe einfacher Artinringe und $(H_i|Z(B_i))^{fix} = 1$. Dann ist R^G direkte Summe einfacher Artinringe.

BEWEIS. Wie in Beweis von Lemma 15 sei o.E. R einfacher Artinring. Nach [7; Theorem 1.15, p. 15] ist $C_R(B)$ direkte Summe einfacher Artinringe. Mit $(G|Z(B))^{fix} = 1$ ist auch $(G|C_R(B))^{fix} = 1$. O.E. sei wie im Beweis von Lemma 15 R einfacher Artinring und $G^{fix} = 1$. Mit [7; Theorem 2.7, p. 23] erhält man die Behauptung.

SATZ 21. Sei $(G|Z(B))^{fix} = 1$ und (R_i $|H_i|$-torsionsfreier einfacher Ring oder Artinring, $1 \leqslant i \leqslant n$). Dann gibt es $c \in Z(B)$, so daß

$$R^{G^F} = \bigoplus_{g\in G|Z(B)} R^G c^g = R^G \bigotimes_{Z(B)^G} Z(B) .$$

BEWEIS. Nach Satz 13.(1) und Lemma 19.(1) ist $R^{G^F} = R^G Z(R) = R^G Z(B)$ und $Z(R^G) = Z(B)^G$. Nach [7; p. 28] gibt es $c \in Z(B)$, so daß $Z(B) = \bigoplus_{g\in G|Z(B)} Z(B)^G c^g$. Mit Lemma 14, 15.(1) und 20 erhält man die Behauptung.

LEMMA 22. Sei R primer Ring und char $(R) \neq 2$. Sei weiter $B = \bigoplus_{1\leqslant i\leqslant n} e_iB$ mit einfachen Ringen e_iB, $1 \leqslant i \leqslant n$. Dann gibt es eine endlich erzeugte abelsche Gruppe $G^{ab} \subset \overline{\mathrm{Aut}\,(R)}$ und zyklische Gruppen $G_i^{ab} \subset \overline{\mathrm{Aut}\,(e_iRe_i)}$, so daß $B(G^{ab}) = Z(B)$, $B(G_i^{ab}) = e_iZ(B)$ und

$$R^{G^{ab}} = C_R(Z(B)) = \bigoplus_{1\leqslant i\leqslant n} C_{e_iRe_i}(e_iZ(B)) = \bigoplus_{1\leqslant i\leqslant n} (e_iRe_i)^{G_i^{ab}} , \qquad 1 \leqslant i \leqslant n .$$

Hierbei ist $B = B(G)$.

BEWEIS. Nach [7; Lemma 2.12, Proof, p. 28] und [2; Proposition 6, p. 387] ist $Z(B) = \bigoplus_{1\leqslant i\leqslant n} e_iZ(B)$ mit $e_iZ(R)$-separablen Körpern $e_iZ(B)$ und $[e_iZ(B) : e_iZ(R)] < \infty$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Seien genauer $e_iZ(B) =$

$= e_i Z(R)$ für $1 \leqslant i \leqslant m$ und $e_i Z(B) \neq e_i Z(R)$ für $m < i \leqslant n$. Wähle $a_i \in e_i Z(B)$, so daß $a_i = (-2)e_i$ für $1 \leqslant i \leqslant m$ und $e_i Z(B) = e_i Z(R)[a_i]$ für $m < i \leqslant n$. Seien $b_i \in e_i Z(B)$, so daß $(b_i + e_i)(a_i + e_i) = e_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Dann sind

$$g_i\colon x \mapsto (b_i + 1)x(a_i + 1) \in \overline{\mathrm{Aut}\,(R)}\,, \qquad 1 \leqslant i \leqslant n$$

und erzeugen eine Gruppe G^{ab}. Es gilt $g_i^2 = 1$ für $1 \leqslant i \leqslant m$. Weiterhin sind

$$h_i\colon \mathrm{x} \mapsto (b_i + e_i)x(a_i + e_i) \in \overline{\mathrm{Aut}\,(e_i R e_i)}$$

und erzeugen je eine zyklische Gruppe G_i^{ab}, $1 \leqslant i \leqslant n$. Die weiteren Behauptungen sind leicht zu verifizieren.

Zu den in Lemma 22 definierten $a_i + 1$, $1 \leqslant i \leqslant n$ machen wir noch folgende

ANMERKUNG. Sei $Z = Z(R)$ und $e_i f_i(x)$ mit $f_i(x) \in Z[x]$ das $e_i Z$-Minimalpolynom von $a_i + e_i \in e_i Z(B)$. Dann gilt:

(1) $f_i(x)$ ist Z-separabel, $1 \leqslant i \leqslant n$.

(2) $\{f(x) \in Z[x] \mid f(a_i + 1) = 0\} = f_i(x)(x - 1)Z[x]$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Sei formal $(a_i + e_i)^\infty := e_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Dann gilt:

(3) Die Ordnung von g_i ist $\min \{k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\} \mid (a_i + e_i)^k = e_i\}$.

(4) Es ist $\underset{1 \leqslant i \leqslant m}{\times} \{g_i, 1\}$ für $m < n$ und $G^{ab} = \underset{1 \leqslant i \leqslant m}{\times} \{g_i, 1\}$ für $m = n$.

(5) Ist $\mathrm{char}\,(R) = 2$ und $Z \neq \{0, 1\}$, so wählt man $z \in Z \setminus \{0, 1\}$ und $a_i := e_i z$ für $1 \leqslant i \leqslant m$.

(6) Sei H Untergruppe von $\overline{\mathrm{Aut}\,(R)}$ mit $BC_R(B) \subset R^H$. Dann gilt: $C_R(Z(B)) \subset R^H$.

LEMMA 23. Sei R 2-torsionsfreier Ring und $G^{ab} := \underset{1 \leqslant i \leqslant n}{\times} H_i^{ab}$. Dann gilt:

G^{ab} ist endlich erzeugte abelsche Untergruppe von $\overline{\mathrm{Aut}\,(R)}$,

$B(G^{ab}) = Z(B)$ und $R^{G^{ab}} = C_R(Z(B))$, wobei $B = B(G)$.

BEWEIS. Sei $R = \underset{1 \leqslant i \leqslant n}{\oplus} e_i R$ mit primen Ringen $e_i R$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Dann

gilt

$$B(G^{ab}) = \bigoplus_{1\leqslant i\leqslant n} B(H_i^{ab}) = \bigoplus_{1\leqslant i\leqslant n} Z(B_i) = Z(B)\,,$$

$$R^{G^{ab}} = \bigoplus_{1\leqslant i\leqslant n} (e_i R)^{H_i^{ab}} = \bigoplus_{1\leqslant i\leqslant n} C_{e_iR}(Z(B_i)) = C_R(Z(B))\,.$$

(D) *Im folgenden sei zusätzlich* $C_R(Z(B)) = BC_R(B)$.

ANMERKUNG. Sei R *PI*-Ring. Nach Lemma 17.(6) gilt $C_R(Z(B)) = BC_R(B)$.

SATZ 24. Sei R 2-torsionsfreier Ring. Dann gilt:

(1) $R^{G^{ab}} = R^G Z(R) \bigotimes_{Z(B)} B$.

(2) Sei zusätzlich $(G|Z(B))^{fix} = 1$ und (R_i $|H_i|$-torsionsfreier einfacher Ring oder Artinring), $1\leqslant i\leqslant n$. Dann gibt es $c\in Z(B)$, so daß

$$R^{G^{ab}} = \Big(\bigoplus_{g\in G|Z(B)} R^G c^g\Big) \bigotimes_{Z(B)} B = R^G \bigotimes_{Z(B)^G} B\,.$$

BEWEIS.

(1) Nach Satz 13.(1) und Lemma 23 ist $R^G Z(R) = R^{G^F} = C_R(B)$ und $R^{G^{ab}} = C_R(Z(B))$. Mit Lemma 19.(3) erhält man die Behauptung.

(2) folgt aus (1) mit Satz 21.

ANMERKUNG. Sei R 2-torsionsfreier Ring. Dann gilt:

$$B \text{ ist } Z(B)\text{-Modul mit } l := \max\left\{|H_i^{inn}|\,|1\leqslant i\leqslant n\right\}$$

Erzeugenden d_k, $1\leqslant k\leqslant l$. Also ist

$$R^{G^{ab}} = \sum_{1\leqslant k\leqslant l} R^{G^F} d_k\,.$$

Nach der Anmerkung zu Satz 13 ist

$$R^{G^F} = \sum_{1\leqslant j\leqslant m} R^G c_j\,.$$

Insgesamt hat man $R^{G^{ab}} = \sum_{\substack{1\leqslant j\leqslant m\\ 1\leqslant k\leqslant l}} R^G c_j d_k$ mit $c_j d_k \in B = C_R(R^G)$.

SATZ 25. Sei R einfacher PI-Ring und $Z(R) \neq \{0, 1\}$. Dann gilt:

(1) $L(R^G) = L_G(R^{G^B})$, $pi(R^G) = pi(R^{G^B})$, $PI(R^G) = PI(R^{G^B})$, falls R $|G|$-torsionsfrei.

(2) $L(R^{G^B}) = L(R^{G^{ab}})$, $L_G(R^{G^B}) = L_G(R^{G^{ab}})$,

$$2^{-1}pi(R^{G^B})pi(B) \leqslant pi(R^{G^{ab}}) \leqslant \min\{2^{-1}pi(R^{G^B})PI(B), 2^{-1}PI(R^{G^B})pi(B)\} \leqslant$$
$$\leqslant \max\{2^{-1}pi(R^{G^B})PI(B), 2^{-1}PI(R^{G^B})pi(B)\} \leqslant$$
$$\leqslant PI(R^{G^{ab}}) \leqslant 2^{-1}PI(R^{G^B})PI(B)\,.$$

(3) $pi(R^{G^{ab}})L(R^{G^{ab}}) \leqslant PI(R) \leqslant PI(R^{G^{ab}})L(R^{G^{ab}})[Z(B):Z(R)]$.

BEWEIS. Nach Satz 13.(1) und Lemma 22 ist $R^{G^F} = R^{G^B} = C_R \cdot (B) = R^G Z(R)$ und $R^{G^{ab}} = C_R(Z(B))$.

(1) Die L-Aussage erhält man über die den direkten Zerlegungen zugeordneten Systeme von Idempotenten. Die PI-Aussage ist trivial.

Zur pi-Aussage: Sei $0 \neq X$ Ideal von R^G und $S_m(X) = 0$. Dann ist $0 \neq XZ$ Ideal von R^{G^B} und $S_m(XZ) = 0$. Sei $0 \neq Y$ Ideal von R^{G^B} und $S_m(Y) = 0$. O.E. sei Y G-invariant. Dann gibt es $0 \neq e^2 = e \in \in Z(R^{G^B})^G$, so daß $Y = eR^{G^B}$. Nun ist $0 \neq eR^G$ Ideal von R^G und $S_m(eR^G) = 0$.

(2) Verwende Lemma 17: Die L-Aussagen sind klar.

Zu den pi- und PI-Aussagen: Nach [2; Corollary, p. 371 und p. 61], [5; Proposition 1.(2), p. 103] und [8; Theorem 1.4.1, p. 21 und Theorem 1.4.5, p. 22] ist

$$2PI\big(C_{e_iRe_i}(Z(e_iB))\big) = PI(e_iB)PI\big(C_{e_iRe_i}(e_iB)\big)\,, \qquad 1 \leqslant i \leqslant n\,,$$

und damit alles weitere trivial.

(3) Ähnlich wie bei (2) erhält man

$$PI(e_iRe_i) = PI\big(C_{e_iRe_i}(Z(e_iB))\big)[Z(e_iB):e_iZ(R)]\,, \qquad 1 \leqslant i \leqslant n\,.$$

Indem man $\{e_i | 1 \leqslant i \leqslant n\}$ zu einem System primitiver orthogonaler Idempotenter verfeinert ersieht man $PI(R) = \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} PI(e_iRe_i)$. Nun ist die Behauptung abzulesen.

SATZ 26. Sei R 2-torsionsfreier PI-Ring. Dann gilt:

$$L(R^G) = L_G(R^{G^B}), \qquad pi(R^G) = pi(R^{G^B}), \qquad PI(R^G) = PI(R^{G^B}),$$

falls R_i $|H_i|$-torsionsfrei, $1 \leqslant i \leqslant n$.

BEWEIS. Nach Satz 13 ist $R^{G^F} = R^{G^B} = C_R(B) = R^G Z(R)$. Nun folgt man dem Beweis von Satz 25.

(E) *Im folgenden sei* $G \subset \mathrm{Aut}^*(R)$ *endliche Gruppe und zunächst keine weitere Voraussetzung gemacht.*

BEMERKUNG 27.

(1) Seien die Voraussetzungen von Satz 16 für $\tilde{G}$ erfüllt. Dann gilt: $R = R^{\tilde{G}} Z$ und G ist eindeutig bestimmt durch $G|R^{\tilde{G}} \subset \{1, *|* \text{ Involution}\}$ und $G|Z \subset \mathrm{Aut}(Z)$.

(2) Seien die Voraussetzungen von Satz 24 für $\tilde{G}$ erfüllt. Dann gilt: $R^{\tilde{G}^{ab}} = R^{\tilde{G}} B$ und $G|R^{\tilde{G}^{ab}}$ ist eindeutig bestimmt durch $G|R^{\tilde{G}} \subset \subset \{1, *|* \text{ Involution}\}$ und $G|B$.

LITERATUR

[1] S. A. AMITSUR, *Identities in rings with involution*, Israel J. Math., **7** (1969), pp. 63-68.

[2] P. M. COHN, Algebra, Vol. 2, John Wiley & Sons, London, New York, Sydney, Toronto (1977).

[3] I. N. HERSTEIN, *Noncommutative rings*, The Mathematical Association of America (1973).

[4] I. N. HERSTEIN, *Rings with involution*, The University of Chicago Press, Chicago (1976).

[5] N. JACOBSON, *Structure of rings*, American Mathematical Society (1968).

[6] V. K. KHARCHENKO, *Identities involving automorphisms*, Siberskii Matem. Zhurnal, **17** (1976), pp. 446-467. (English transl. December 1976, pp. 349-363).

[7] S. MONTGOMERY, *Fixed rings of finite automorphism groups of associative rings*, Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York (1980).

[8] L. H. ROWEN, *Polynomial identities in ring theory*, Academic Press, New York, London, Toronto, Sydney, San Francisco (1980).

Manoscritto pervenuto in redazione il 2 giugno 1981.