RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

WOLFGANG NOLTE

Ein Zusammenhang zwischen affinen kinematischen Räumen und orthogonalen Gruppen

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 66 (1982), p. 173-180

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1982__66__173_0>

REND. SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol. 66 (1981)

Ein Zusammenhang zwischen affinen kinematischen Räumen und orthogonalen Gruppen.

WOLFGANG NOLTE (*)

RIASSUNTO - Si dimostra che attribuendo a certi speciali gruppi ortogonali F una opportuna struttura geometrica, questi possono essere considerati come spazi cinematici affini. Si dimostra anche che, viceversa, uno spazio cinematico pappiano affine (con caratteristica $\neq 2$) è una immagine omomorfa del prodotto diretto $F \times R$ (ove R è il gruppo additivo di un opportuno spazio vettoriale).

Für spezielle orthogonale Gruppen F wird gezeigt, daß sie nach Aufprägung einer geeigneten geometrischen Struktur zu pappusschen affinen kinematischen Räumen werden und daß man umgekehrt bei Charakteristik $\neq 2$ sämtliche pappusschen affinen kinematischen Räume als homomorphe Bilder der direkten Produkte $F \times R$ (R additive Gruppe eines Vektorraums) darstellen kann. Die orthogonalen Gruppen F sind Untergruppen vom Index 2 der in [6] § 2 beschriebenen Gruppen. Für die Beweise benutzen wir den in Bröcker [1] und Karzel [2], [3] dargestellten Zusammenhang zwischen kinematischen Räumen und kinematischen Algebren.

1. Affine kinematische Räume.

Affiner Raum bedeute im folgenden stets pappusscher affiner Raum mit mehr als zwei Punkten auf jeder Geraden. Für K-Vektor-

(*) Indirizzo dell'A.: Technische Hochschule Darmstadt, FB 4 / AG 2 Geometrie und Algebra, Schloßgartenstraße 7, D-6100 Darmstadt.

räume sei stets vorausgesetzt, daß der Körper K kommutativ und $|K| > 2$ ist.

Unter einem affinen kinematischen Raum verstehen wir einen affinen Raum, dessen Punktmenge N bezüglich einer binären Operation $\circ$ eine Gruppe ist, so daß die Abbildung $N \to N$; $x \mapsto x^{-1}$ eine Kollineation des affinen Raumes N ist. Nach [5] sind dann auch die Links- und Rechtstranslationen $a_l\colon N \to N$; $x \mapsto a \circ x$ und $a_r\colon N \to N$; $x \mapsto x \circ a$ Kollineationen von N. (Die letzte Eigenschaft wird gewöhnlich für kinematische Räume gefordert.) Aus [3] S. 162, 164 erhält man durch Betrachtung der Klasse 1 (in beiden Fällen Char. $K \neq 2$ und $= 2$) in der dort angegebenen Klassifizierung:

Satz 1 (Karzel). *Sei N ein K-Vektorraum mit einer assoziativen Multiplikation*

$$(1)\quad N \times N \to N;\ (x, y) \mapsto xy,$$

so daß $xx = 0$ für alle $x \in N$ und (1) *bilinear ist. Dann ist N bezüglich der Verknüpfung $\circ$*

$$(2)\quad \circ\colon N \times N \to N;\ x \circ y = x + y + xy$$

eine Gruppe, welche mit der zum Vektorraum N gehörenden affinen Struktur ein affiner kinematischer Raum ist. Umgekehrt läßt sich jeder affine kinematische Raum so darstellen.

Dabei verstehen wir unter dem zu N gehörenden affinen Raum den affinen Raum mit N als Punktmenge und den Restklassen nach den eindimensionalen Teilräumen von N als Geraden.

Im Hinblick auf die in [3] für die Klasse 1 gemachten Betrachtungen bemerken wir: Sei N ein K-Vektorraum mit einer bilinearen Multiplikation $N \times N \to N$; $(x, y) \mapsto xy$. Ist Char $K \neq 2$, so sind die folgenden Aussagen *a*), *b*) äquivalent:

a) $\forall x, y, z \in N\colon xy = -yx$ und $x(yz) = (xy)z$

b) $\forall x, y, z \in N\colon xx = 0$ und $(xy)z = 0$.

Den Beweis erhält man leicht mit den in [3] angegebenen Methoden und Überlegungen. Wir bemerken weiter, daß es K-Vektorräume mit Char. $K = 2$ gibt, für die *a*) erfüllt ist, aber nicht immer $xyz = 0$ ist. Trivialerweise folgt *a*) aus *b*).

2. Eine Klasse orthogonaler Abbildungen.

Sei V ein K-Vektorraum und $q\colon V \to K$ eine quadratische Form auf V; die zugehörige Bilinearform sei f. Wir benutzen die Bezeichnungen « orthogonal », « Radikal », « regulär » usw. wie in [6] § 2. Insbesondere sei für eine orthogonale Abbildung α von V die Bahn $B(\alpha) := \{x\alpha - x\colon x \in V\}$ und der Fixraum $F(\alpha) := \{x \in V\colon x\alpha = x\}$. Zu jedem eindimensionalen Teilraum Kc von V mit $c \notin V^{\perp}$, $q(c) \neq 0$ gibt es genau eine Isometrie σ_c mit $B(\sigma_c) = Kc$. Es gilt

$$x\sigma_c = x - \frac{f(x, c)}{q(c)}\, c \qquad \text{(Spiegelungsformel)}\,. \tag{3}$$

Seien $\overline{V}$, Ka, H Untervektorräume von V, so daß die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:

$$\overline{V} = Ka \oplus H\,, \qquad q(a) \neq 0\,, \qquad q(H) = \{0\}\,, \qquad H \subset \overline{V}^{\perp}\,. \tag{4}$$

Wir setzen $\Sigma := \{\sigma_x\colon x \in \overline{V} \setminus H\}$, $\Gamma := \langle \Sigma \rangle$ und $P := \{\alpha \in \Gamma\colon B(\alpha) \subset H\}$. Γ besteht dann genau aus denjenigen orthogonalen Abbildungen α von V, für die $B(\alpha) \subset \overline{V}$ und $\dim B(\alpha) < \infty$ ist.

Für $m \in \mathbb{N}$ bedeute Σ^m die Menge der Produkte von m Elementen aus Σ, $\Sigma^0 := \{1\}$. Von Bedeutung für unsere Überlegungen ist die Untergruppe $F := \bigcup\limits_{m \text{ gerade}} \Sigma^m$ von Γ.

Wir setzen ab jetzt voraus, daß V regulär ist.

LEMMA 1. *a) P ist eine Gruppe, welche im Zentrum von F liegt, und für alle $\varrho \in P$ gilt $\overline{V} \subset F(\varrho)$.*

b) Jedes Element $\gamma \in F$ läßt sich in eindeutiger Weise als $\gamma = \sigma_a \sigma_{a+h_1} \varrho$ mit $h_1 \in H$ und $\varrho \in P$ darstellen.

c) Zu $h_1, h_2 \in H$ gibt es genau Abbildung $\varrho \in P$, so daß $\sigma_a \sigma_{a+h_1} \sigma_a \sigma_{a+h_2} = \sigma_a \sigma_{a+(h_1+h_2)} \varrho$ ist. Für diese mit $\varrho = \varrho(h_1, h_2)$ bezeichnete Abbildung gilt

$$x\varrho(h_1, h_2) = x + \frac{1}{q(a)}\bigl(f(x, h_2)h_1 - f(x, h_1)h_2\bigr) \qquad \textit{für alle } x \in V\,. \tag{5}$$

d) Für h_1, h_1', $h_2 \in H$ und $\lambda \in K$ gilt

$$
(6) \qquad \begin{cases} \varrho(h_1, h_2) - 1 \;\; = -(\varrho(h_2, h_1) - 1)\,, \\ \varrho(h_1 + h_1', h_2) = \varrho(h_1, h_2)\varrho(h_1', h_2)\,, \\ \varrho(\lambda h_1, h_2) - 1 = \lambda(\varrho(h_1, h_2) - 1)\,. \end{cases}
$$

Beweis. *a)* folgt aus [6] Lemma 11, 12. Vorbereitend für den weiteren Beweis überlegen wir: Seien h_1, h_2, $1 \in H$ und $\alpha = \sigma_{a+h_1}\sigma_a\sigma_{a+h_2}\sigma_{a+1}$. Dann gilt

$$
(7) \qquad \alpha \in P \Leftrightarrow h_1 + h_2 = 1\,.
$$

Denn durch mehrfache Anwendung der Spiegelungsformel (3) erhält man im Full $h_1 + h_2 = 1$

$$
(8) \qquad x\alpha = x + \frac{1}{q(a)}\left(f(x, h_2)h_1 - f((x, h_1)h_2\right),
$$

also $B(\alpha) \subset Kh_1 + Kh_2 \subset H$, und im Fall $h_1 + h_2 \neq 1$ $B(\alpha) \not\subset H$.

Zu *b)* Sei $\gamma \in F$. Nach [6] Satz 6 gilt $F = \Sigma^2 P$, also $\gamma = \sigma_c\sigma_d\varrho'$ für geeignete $c, d \in \overline{V}$, $\varrho' \in P$. Es gibt $h_1, h_2 \in H$ mit $c = a + h_2$, $d = a + h_1 + h_2$. Nach (8) ist $\sigma_{a+h_1}\sigma_a\sigma_{a+h_2}\sigma_{a+h_1+h_2} =: \varrho'' \in P$, also $\sigma_c\sigma_d = \sigma_a\sigma_{a+h_1}\varrho''$ und $\gamma = \sigma_a\sigma_{a+h_1}\varrho$ mit $\varrho = \varrho'\varrho'' \in P$. h_1 und ϱ sind durch γ eindeutig bestimmt. Denn $\sigma_a\sigma_{a+h_1}\varrho = \sigma_a\sigma_{a+h_1^*}\varrho^*$ ist gleichbedeutend mit $\sigma_{a+h_1}\sigma_{a+h_1^*} = \varrho\varrho^{*-1}$; da $\Sigma^2 \cap P = \{1\}$ ist, folgt dann $h_1 = h_1^*$ und $\varrho = \varrho^*$. Damit gilt *b)*.

c) folgt aus (7), (8) und *d)* aus (5).

Wir betrachten P als Teilmenge des Endomorphismenringes $\mathrm{Hom}(V, V)$ und setzen $\tilde{\varrho} = \varrho - 1$ für $\varrho \in P$ und $\tilde{P} := \{\tilde{\varrho} \colon \varrho \in P\}$. Da mit $\varrho \in P$, $\lambda \in K$ auch $1 + \lambda(\varrho - 1) \in P$ ist, gilt $\lambda\tilde{\varrho} \in \tilde{P}$. Bezüglich dieser Skalarenmultiplikation und der durch

$$
\tilde{\varrho}_1 + \tilde{\varrho}_2 := \tilde{\varrho}_1\tilde{\varrho}_2 \qquad \text{für } \tilde{\varrho}_1, \varrho_2 \in \tilde{P}
$$

definierten Addition $+$ wird $\tilde{P}$ zu einem K-Vektorraum, wie man leicht nachweist.

Lemma 2. *$\tilde{P}$ ist bezüglich der Addition $+$ und der gewöhnlichen Skalarenmultiplikation ein K-Vektorraum.*

Sei R ein beliebiger K-Vektorraum und H, $\tilde{P}$ wie oben angegeben. Auf dem direkten Produkt $N = H \times \tilde{P} \times R$ definieren wir folgende Multiplikation von Vektoren. Für $n_i = (h_i, \tilde{\varrho}_i, r_i) \in N$, $i = 1, 2$ sei

$$(h_1, \tilde{\varrho}_1, r_1)(h_2, \tilde{\varrho}_2, r_2) = (0, \tilde{\varrho}(h_1, h_2), 0) . \tag{9}$$

Dann ist $N \times N \to N$; $(n_1, n_2) \mapsto n_1 n_2$ bilinear, und es gilt $n_1 n_1 = 0$, $(n_1 n_2) n_3 = 0$ für alle $n_1, n_2, n_3 \in N$, wie man mit Lemma 1 *d*) erhält.

Daher ist N mit der Verknüpfung $n_1 \circ n_2 = n_1 + n_2 + n_1 n_2$ nach Satz 1 ein affiner kinematischer Raum.

LEMMA 3. $(N, \circ)$ *ist ein affiner kinematischer Raum.*

Es bezeichne $F \times R$ das direkte Produkt der othogonalen Gruppe F mit der additiven Gruppe des Vektorraums R. Nach Lemma 1 *b*) ist die Abbildung

$$\varphi\colon F \times R \to N ; \qquad (\sigma_a \sigma_{a+h} \varrho, r) \mapsto (h, \tilde{\varrho}, r)$$

eine Bijektion. Da nach Lemma 1*a*), *c*) für $\gamma_i = \sigma_a \sigma_{a+h_i} \varrho_i \in F$ $(i = 1, 2)$, $\gamma_1 \gamma_2 = \sigma_a \sigma_{a+(h_1+h_2)} \varrho(h_1, h_2) \varrho_1 \varrho_2$ gilt, erhalten wir mit $r_1, r_2 \in R$

$$\varphi\colon (\gamma_1, r_1)(\gamma_2, r_2) \mapsto (h_1 + h_2, \tilde{\varrho}(h_1, h_2) + \tilde{\varrho}_1 + \tilde{\varrho}_2, r_1 + r_2) =$$
$$= (h_1, \tilde{\varrho}_1, r_1) \circ (h_2, \tilde{\varrho}_2, r_2) .$$

Daher ist φ ein Gruppenisomorphismus. Durch φ^{-1} läßt sich der Gruppe $F \times R$ die geometrische Struktur von $N \times R$ aufprägen.

SATZ 2. *Die Gruppe* $F \times R$ *ist ein affiner kinematischer Raum.*

Insbesondere zeigt das Ergebnis für $R = 0$, daß F ein affiner kinematischer Raum ist.

ANMERKUNG. Setzen wir nicht mehr $V^\perp = 0$ voraus, wohl aber $a \notin V^\perp$, so erhalten wir ebenfalls, daß F ein affiner kinematischer Raum ist. Es sei $H \cap V^\perp =: H_0$ und $H = H_0 \oplus H_1$. Es gibt einen regulären Teilraum V_1 von V mit $\bar{V}_1 := Ka \oplus H_1 \subset V_1$, $H_0 \cap V_1 = 0$. Sei F_1 die entsprechend zu $\bar{V}_1$, V_1 (anstelle von $\bar{V}$, V) gehörige Gruppe orthogonaler Abbildungen von V_1 auf sich. Jedes $\gamma_1 \in F_1$ denken wir uns durch die Festsetzung $V_1^\perp | \gamma_1 = V_1^\perp | 1$ auf V fortgesetzt. Dann läßt sich jedes $\gamma \in F$ eindeutig als $\gamma = \gamma_1 \varrho_1$ mit $\gamma_1 \in F_1$ und $\varrho_1 \in R_1 :=$ $:= \{\sigma \in F\colon B(\sigma) \subset H_0\}$ darstellen. $\tilde{R}_1 := \{\sigma - 1 \colon \sigma \in R_1\}$ ist analog wie

$\tilde{P}$ in Lemma 2 ein K-Vektorraum, F ist isomorph zu $F_1 \times \tilde{R}_1$, also nach Satz 2 ein affiner kinematischer Raum.

Wir setzen nun wieder $V^\perp = 0$ voraus und machen für § 3 einige vorbereitende Überlegungen. Zur genaueren Untersuchung von P wählen wir einen singulären Teilraum H' von V, so daß $H + H'$ regulär ist. Dann ist $H \cap H' = 0$ und H isomorph zu H'. Sei $\{h_i : i \in I\}$ (I Indexmenge) eine Basis von H. Es gibt eine Basis $\{h_i' : i \in I\}$ von H', so daß $f(h_i, h_j') = \delta_{ij}$ für $h_i \in H$, $h_j' \in H'$ ist. Sei $\varrho \in P$. Da $F(\varrho) = B(\varrho)^\perp$ ist (vgl. etwa [6] Satz 3b), ist ϱ auf $(H + H')^\perp + H$ gleich 1. Daher ist ϱ durch seine Wirkung auf H' eindeutig bestimmt, und es ist

$$h_j' \varrho = h_j' + \sum_i \alpha_{ij} h_i \tag{10}$$

für geeignete $\alpha_{ij} \in K$, $i, j \in I$. Da ϱ f und q invariant läßt, ist $\alpha_{ij} = -\alpha_{ji}$ und $\alpha_{jj} = 0$. Es gilt:

$$(*) \quad \alpha_{ij} = -\alpha_{ji} \quad \text{und} \quad \alpha_{jj} = 0 \quad \text{für } i, j \in I;\ \text{nur endlich viele } \alpha_{ij} \neq 0.$$

Die durch ϱ bestimmte Matrix (α_{ij}) bezeichnen wir mit $M(\tilde{\varrho})$. Umgekehrt bestimmt jede Matrix (α_{ij}) mit $(*)$ durch (10) ein $\varrho \in P$. Für $\varrho, \sigma \in P$ und $\lambda \in K$ gilt darüberhinaus

$$M(\tilde{\varrho} + \tilde{\sigma}) = M(\tilde{\varrho}) + M(\tilde{\sigma}), \qquad M(\lambda \tilde{\varrho}) = \lambda M(\tilde{\varrho}).$$

Der Vektorraum $\tilde{P}$ ist isomorph dem Vektorraum W der Matrizen (α_{ij}), für die $(*)$ erfüllt ist.

Für $k, 1 \in I$, $k \neq 1$ sei w_{kl} die Matrix $w_{kl} = (\alpha_{ij}^{(k1)})$ mit $\alpha_{k1}^{(k1)} = 1 = -\alpha_{1k}^{(kl)}$ und $\alpha_{ij}^{(k1)} = 0$ sonst. Die Teilmenge J von $I \times I$ bestehe aus Elementen (k, l) mit $k \neq l$ und enthalte genau eines von (k, l), (l, k). Dann bilden diese w_{k1} eine Basis von W. Diesen Basiselementen entsprechen in $\tilde{P}$ die Elemente $\tilde{\varrho}_{kl}$ mit $\varrho_{k1} = \sigma_{a+h_k}\sigma_a\sigma_{a+h_1}\sigma_{a+h_k+h_1}$, denn es gilt $h_1'\varrho_{kl} = h_1' + h_k$, $h_k'\varrho_{k1} = h_k' - h_1$, also $M(\tilde{\varrho}_{k1}) = w_{k1}$. Mithin bilden die $\tilde{\varrho}_{k1}$ eine Basis von $\tilde{P}$.

3. Affine kinematische Räume als homomorphe Bilder der kinematischen Räume $F \times R$.

Sei N ein affiner kinematischer Raum; dessen Gruppenmultiplikation sei $\circ$. N läßt sich nach Satz 1 mit einer K-Vektorraumstruktur versehen, so daß die Abbildung

$$(11) \qquad N \times N \to N\,; \qquad (x, y) \mapsto xy := x \circ y - x - y$$

bilinear ist und $xx = 0$, $(xy)z = x(yz)$ für $x, y, z \in N$ gilt. Wir setzen zusätzlich

$$(**) \qquad (xy)z = 0 \qquad \text{für alle } x, y, z \in N$$

voraus (vgl. § 1 unter *b*). Ist Char. $K \neq 2$, so ist $(**)$ stets erfüllt. Die Teilmenge $N_1 := \{x \in N \colon xN = 0\}$ ist ein Untervektorraum von N. Sei H ein zu N_1 komplementärer Unterraum von N, $N = H \oplus N_1$. Für $H^2 := \{xy \colon x, y \in H\}$ gilt wegen $(**)$ $H^2 \subset N_1$, also für den von H^2 erzeugten Untervektorraum P_1 dann $P_1 \subset N_1$. Sei R ein Teilraum mit $N_1 = P_1 \oplus R$, also $N = H \oplus P_1 \oplus R$.

H läßt sich in einen Obervektorraum V so einbetten, daß $V = (Ka \oplus Ka') \oplus H \oplus H'$ ist, wobei Ka, Ka' eindimensional und H isomorph H' ist. Auf V gibt es eine quadratische Form q, so daß $q(a) \neq 0$, $q(H) = \{0\} = q(H')$ gilt und die beiden Unterräume $Ka + Ka'$, $H + H'$ regulär und zueinander orthogonal sind—also auch V regulär ist. Für $\overline{V} := Ka \oplus H$ sind die Bedingungen (4) erfüllt. Daher läßt sich wie in § 2 eine orthogonale Gruppe F angeben. Es bezeichne $N' := H \times \tilde{P} \times R$ den gemäß Lemma 3 konstruierten kinematischen Raum mit der Gruppenmultiplikation $\circ'$. Weiter seien Basen $\{h_i \colon i \in I\}$, $\{h'_i \colon i \in I\}$ von H bzw. H', die Teilmenge $J \subset I \times I$ und $\tilde{\varrho}_{ij}$ wie in § 2 definiert. Dann ist die durch $\tilde{\varrho}_{ij} \mapsto h_i h_j$ für $(i, j) \in J$ definierte lineare Abbildung $\psi \colon \tilde{P} \to P_1$ ein Epimorphismus. Daher ist die Abbildung $N' \to N$; $(h, \tilde{\varrho}, r) \mapsto h + \psi(\tilde{\varrho}) + r$ ein Gruppenhomorphismus von $(N', \circ')$ auf $(N, \circ)$, durch welchen kollineare Punkte des affinen Raumes N' auf kollineare Punkte des affinen Raumes N abgebildet werden. Wir nennen eine solche Abbildung einen Homomorphismus des affinen kinematischen Raumes N' auf N. Da nach § 2 $F \times R$ und N' isomorph sind, erhalten wir:

Satz 3. *Zu jedem affinen kinematischen Raum N mit der Eigenschaft $(**)$—also insbesondere bei Charakteristik $K \neq 2$—gibt es eine orthogonale Gruppe F (vom Typ wie in § 2) und einen Vektorraum R, so daß N homomorphes Bild von $F \times R$ ist.*

Die Gruppen $F \times R$ können also als «universelle Elemente» in der Klasse der affinen kinematischen Räume mit der Eigenschaft $(**)$ aufgefaßt werden.

LITERATUR

[1] L. Bröcker, *Kinematische Räume*, Geom. Dedicata, **1** (1972), pp. 241-268.

[2] H. Karzel, *Kinematic Spaces*, Istituto Nazionale di Alta Matematica, Symposia Mathematica, **11** (1973), pp. 413-439.

[3] H. Karzel, *Kinematische Algebren und ihre geometrischen Ableitungen*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, **41** (1974), pp. 158-171.

[4] H. Karzel - I. Pieper, *Bericht über geschlitzte Inzidenz-gruppen*, J. Ber. Deutseh. Math. Verein., **72** (1970), pp. 70-114.

[5] G. Kist, *Theorie der verallgemeinerten kinematischen Räume*, Habilitationsschrift TU München, 1980.

[6] W. Nolte, *Affine Räume als Gruppenräume orthogonaler Gruppen*, Geom. Dedicata, **7** (1978), pp. 21-35.

[7] I. Pieper, *Zur Darstellung zweiseitiger affiner Inzidenz-gruppen*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, **35** (1971), pp. 121-130.

Manoscritto pervenuto in redazione l'8 aprile 1981.