

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

MAURIZIO CHICCO

**Osservazione sulla risolubilità del problema di
Dirichlet per una classe di equazioni ellittiche
a coefficienti discontinui**

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 66 (1982), p. 137-141

http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1982__66__137_0

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1982, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Osservazione sulla risolubilità del problema di Dirichlet per una classe di equazioni ellittiche a coefficienti discontinui.

MAURIZIO CHICCO (*)

SUMMARY - I prove the solvability of the Dirichlet problem for a previously considered class of linear second order elliptic equations with discontinuous coefficients, under less stringent hypotheses.

1. Introduzione.

Si considera, in un sottoinsieme aperto limitato Ω di R^n , un operatore lineare uniformemente ellittico del tipo

$$(1) \quad L = - \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial}{\partial x_i} + c.$$

I coefficienti a_{ij} appartengono ad $L_\infty(\Omega)$ e soddisfano alla successiva condizione (3): tale condizione, introdotta in [1], è verificata ad esempio se tali coefficienti appartengono a $C^0(\bar{\Omega})$, oppure a $H^{1,n}(\Omega)$, oppure se soddisfano ad un'ipotesi « di tipo Cordes », cioè

$$\operatorname{ess\,inf}_\Omega \left(\sum_{i=1}^n a_{ii} \right)^2 \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}^2 \right)^{-1} > n - 1.$$

(*) Indirizzo dell'A.: Istituto Matematico, Via Alberti 4 - 16132 Genova.

Lavoro eseguito nell'ambito dell'Istituto per la Matematica Applicata del C.N.R., Via L. B. Alberti 4 - 16132 Genova.

Il problema di Dirichlet

$$(2) \quad \begin{cases} Lu + \lambda u = f & \text{q.o. in } \Omega, \\ u \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega), \end{cases}$$

ammette una e una sola soluzione u , per ogni scelta di f in $L_2(\Omega)$, non appena il numero reale λ è abbastanza grande: ciò è stato provato in [1]. Inoltre in [7] è stato dimostrato che il problema (2) ammette una ed una sola soluzione, qualunque sia il numero reale λ , purchè l'insieme Ω sia convesso e di misura abbastanza piccola. Scopo della presente nota è provare l'esistenza e l'unicità della soluzione del problema (2) nell'ipotesi che $\text{ess inf}_{\Omega} c > 0$ e $\lambda \geq 0$, senza limitazioni sull'insieme Ω (salvo il fatto di avere la frontiera sufficientemente regolare).

2. Notazioni ed ipotesi.

Sia Ω un sottoinsieme aperto limitato di R^n ($n \geq 3$) dotato di frontiera $\partial\Omega$ rappresentabile localmente come grafico di una funzione di classe C^2 . Siano $a_{ij} \in L_{\infty}(\Omega)$, $a_{ij} = a_{ji}$ q.o. in Ω , $b_i \in L_n(\Omega)$ ($i, j = 1, 2, \dots, n$), $c \in L_p(\Omega)$ con $p = 2$ per $n = 3$, $p > 2$ per $n = 4$, $p = n/2$ per $n \geq 5$.

Sia A la classe delle matrici quadrate così definita:

$$A = \left\{ \langle (\alpha_{ij}) \rangle : \alpha_{ij} \in H^{1,n}(\Omega) \cap L_{\infty}(\Omega), \alpha_{ij} = \alpha_{ji} \text{ q.o. in } \Omega \ (i, j = 1, 2, \dots, n), \right. \\ \left. \sum_{i,j=1}^n \alpha_{ij} t_i t_j \geq |t|^2 \text{ q.o. in } \Omega, \text{ per ogni } t \in R^n \right\}.$$

Posto

$$G = \{g \in L_{\infty}(\Omega) : \text{ess inf}_{\Omega} g > 0\}$$

supponiamo che esistano una matrice $\langle (\alpha_{ij}) \rangle \in A$ e una funzione $g \in G$ tali che

$$(3) \quad \text{ess sup}_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n (\alpha_{ij} - g\alpha_{ij})^2 < 1.$$

L'ipotesi (3) implica l'uniforme ellitticità dell'operatore L : si veda [4].

3. Risultato.

TEOREMA. *Oltre alle ipotesi elencate sopra, supponiamo che sia $\lambda + \operatorname{ess\,inf}_{\Omega} c > 0$. Allora il problema di Dirichlet (2) ammette una ed una sola soluzione, qualunque sia $f \in L_2(\Omega)$.*

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo provvisoriamente che f, b_i, c appartengano ad $L_{\infty}(\Omega)$ ($i = 1, 2, \dots, n$). Per i risultati di [1] esistono un numero reale λ^0 e una costante K (dipendenti dai coefficienti di L , da n e da Ω), tali che

$$(4) \quad \|u\|_{H^1(\Omega)} \leq K \|Lu + \lambda^0 u\|_{L_2(\Omega)}$$

per ogni $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$. Consideriamo la successione di funzioni $a_{ij}^{(m)} \in C^{\infty}(\bar{\Omega})$ ($m = 1, 2, \dots$) definita nel modo seguente (vedi [1]). Siano $g \in G$, $\alpha_{ij} \in A$ ($i, j = 1, 2, \dots, n$) funzioni soddisfacenti alla (3); è possibile prolungare la definizione delle funzioni α_{ij} a tutto R^n in modo che appartengano ad $H^{1,n}(R^n) \cap L_{\infty}(R^n)$ (indichiamo per semplicità colle stesse lettere le funzioni così prolungate). Poniamo poi

$$q_{ij} = \begin{cases} ga_{ij} & \text{in } \Omega, \\ \alpha_{ij} & \text{in } R^n \setminus \Omega, \end{cases} \quad (i, j = 1, 2, \dots, n),$$

e sia θ una funzione tale che $\theta \in C_0^{\infty}(R^n)$, $\theta(x) = 0$ per $|x| \geq 1$, $\int_{R^n} \theta(x) dx = 1$. Per ogni numero naturale m e per ogni $x \in R^n$ sia

$$a_{ij}^{(m)}(x) = m^n \int_{R^n} \theta(mx - my) q_{ij}(y) dy \quad (i, j = 1, 2, \dots, n).$$

Consideriamo le soluzioni u_m dei problemi di Dirichlet

$$(5) \quad \begin{cases} L_m u_m + \lambda u_m = f & \text{q.o. in } \Omega, \\ u_m \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) & (m = 1, 2, \dots), \end{cases}$$

essendo L_m l'operatore definito da

$$L_m = - \sum_{i,j=1}^n a_{ij}^{(m)} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial}{\partial x_i} + c.$$

Le soluzioni dei problemi (5) esistono e sono uniche per risultati noti, essendo i coefficienti $a_{ij}^{(m)}$ di classe $C^\infty(\bar{\Omega})$. Posto $c_0 = \lambda + \inf_{\Omega} c$ (positivo per ipotesi), risulta

$$(6) \quad \|u_m\|_{L_\infty(\Omega)} \leq c_0^{-1} \|f\|_{L_\infty(\Omega)} \quad (m = 1, 2, \dots)$$

(vedi ad esempio [6] teorema 4.1, [5] lemma 1.1). Per i risultati di [1] la maggiorazione (4) è valida anche per gli operatori L_m ($m = 1, 2, \dots$) e le costanti K , λ^0 non dipendono da m . Pertanto dalle (4), (6) segue

$$(7) \quad \|u_m\|_{H^1(\Omega)} \leq K \|f + (\lambda^0 - \lambda) u_m\|_{L_2(\Omega)} \leq \\ \leq K(\text{mis } \Omega)^{\frac{1}{2}} (1 + |\lambda^0 - \lambda|/c_0) \|f\|_{L_\infty(\Omega)}.$$

Per la (7) un'estratta dalla successione $\{u_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ converge debolmente ad una funzione u la quale, tenendo conto delle (5), è soluzione del problema (2); risulta inoltre evidentemente

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq K(\text{mis } \Omega)^{\frac{1}{2}} (1 + |\lambda^0 - \lambda|/c_0) \|f\|_{L_\infty(\Omega)}.$$

Ciò prova che esiste (almeno) una soluzione u del problema (2) se, come si è supposto, $f \in L_\infty(\Omega)$. Sia G l'operatore inverso di $L + \lambda^0 I$; G è un operatore lineare e limitato da $L_2(\Omega)$ sopra $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ e quindi compatto da $L_2(\Omega)$ in sè. Il problema (2) si può riscrivere, se $\lambda \neq \lambda^0$ (cioè non è restrittivo):

$$(8) \quad Gu - (\lambda - \lambda^0)^{-1} u = (\lambda - \lambda^0)^{-1} Gf.$$

Per quanto già osservato, il problema (2) (e quindi la (8)) ha (almeno) una soluzione $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ non appena $f \in L_\infty(\Omega)$. Lo spazio $G(L_\infty(\Omega))$ è denso in $L_2(\Omega)$, come si può facilmente verificare, quindi per il teorema dell'alternativa il nucleo dell'operatore $[G - (\lambda - \lambda^0)^{-1} I]^*$ (aggiunto di $G - (\lambda - \lambda^0)^{-1} I$) si riduce allo zero di $L_2(\Omega)$. Ancora per il teorema dell'alternativa l'equazione (8) (e quindi pure il problema (2)) ha una ed una sola soluzione u per ogni scelta di f in $L_2(\Omega)$.

Occorre ora togliere l'ipotesi provvisoria che $b_i, c \in L_\infty(\Omega)$ ($i = 1, 2, \dots, n$); ciò si fa approssimando opportunamente l'operatore L con operatori aventi i coefficienti in $L_\infty(\Omega)$. Per brevità si rimanda a [2], teorema 12. $\square$

COROLLARIO. *Se si suppone*

$$\operatorname{ess\,inf}_{\Omega} b_i > -\infty \quad \text{oppure} \quad \operatorname{ess\,sup}_{\Omega} b_i < +\infty$$

per almeno un valore di i ($1 \leq i \leq n$), e se $\lambda + \operatorname{ess\,inf}_{\Omega} c \geq 0$, il problema (2) ammette ancora una ed una sola soluzione per ogni scelta di f in $L_2(\Omega)$.

DIMOSTRAZIONE. È la stessa di [2], corollario 13. $\square$

BIBLIOGRAFIA

- [1] M. CHICCO, *Dirichlet problem for a class of linear second order elliptic partial differential equations with discontinuous coefficients*, Ann. Mat. Pura Appl., (4), **92** (1972), pp. 13-23.
- [2] M. CHICCO, *Principio di massimo per soluzioni di equazioni ellittiche di tipo Cordes*, Ann. Mat. Pura Appl., (4), **100** (1974), pp. 239-258.
- [3] M. CHICCO, *Terzo problema al contorno per una classe di equazioni ellittiche del secondo ordine a coefficienti discontinui*, Ann. Mat. Pura Appl., (4), **112** (1977), pp. 241-259.
- [4] N. CHICCO, *Su una classe di equazioni ellittiche lineari del secondo ordine a coefficienti discontinui*, Seminario dell'Istituto di Matematica di Genova, no. 9 (1978).
- [5] P. L. LIONS, *Problèmes elliptiques du 2-ème ordre non sous forme divergence*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh, **84** A (1979), pp. 263-271.
- [6] C. MIRANDA, *Alcune osservazioni sulla maggiorazione in L^r delle soluzioni deboli delle equazioni ellittiche del secondo ordine*, Ann. Mat. Pura Appl., (4), **61** (1963), pp. 151-169.
- [7] M. VENTURINO, *Problema di Dirichlet per un'equazione ellittica a coefficienti discontinui in un aperto di misura piccola*, in corso di stampa sul Boll. Un. Mat. Ital.

Manoscritto pervenuto in redazione il 27 febbraio 1981.