

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

STEFANO TESTA

Su un universo di dispositivi monotoni

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 65 (1981), p. 53-57

http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1981__65__53_0

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1981, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

Su un universo di dispositivi monotoni.

STEFANO TESTA (*)

1. Introduzione and enunciazione dei risultati.

In [3] è stato costruito un universo di dispositivi \mathcal{M} in cui gli elementi di \mathcal{D}_α (dispositivi su un insieme finito α di terminali), sono funzioni convesse da \mathbb{R}^α a $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, soggette ad opportuni assiomi. Sia \mathcal{E} uno spazio euclideo (spazio hilbertiano reale di dimensione finita), è possibile generalizzare, senza difficoltà, la costruzione fatta in [3] e considerare l'universo $\mathcal{M}(\mathcal{E})$, in cui gli elementi di \mathcal{D}_α sono funzioni convesse da \mathcal{E}^α a $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. In [2], è stato costruito l'universo totale di dispositivi su una coppia X, Y di gruppi abeliani. Se $X = Y = \mathcal{E}$, denoteremo tale universo $UT(\mathcal{E})$. Come già osservato in [3], i subgradienti degli elementi di $\mathcal{M}(\mathcal{E})$, pur essendo dispositivi di $UT(\mathcal{E})$, non costituiscono un sottouniverso di $UT(\mathcal{E})$.

Nella presente nota si determinano, un sottouniverso di $\mathcal{M}(\mathcal{E})$ e un sottouniverso di $UT(\mathcal{E})$ di 0-corrispondenze ciclicamente monotone massimali, tra di loro isomorfi; precisamente dimostreremo i seguenti ⁽¹⁾:

TEOREMA 1. Sia $\mathcal{M}_1(\mathcal{E})$ la totalità delle funzioni f dell'universo $\mathcal{M}(\mathcal{E})$ per le quali $0 \in \text{ri dom } f^*$: $\mathcal{M}_1(\mathcal{E})$ è un sottouniverso di $\mathcal{M}(\mathcal{E})$.

TEOREMA 2. I subgradienti degli elementi di $\mathcal{M}_1(\mathcal{E})$ sono 0-corrispondenze ciclicamente monotone massimali che costituiscono un sot-

(*) Indirizzo dell'A.: Istituto di Matematica, Università, Via L. B. Alberti 4, 16132 Genova.

⁽¹⁾ Osserviamo che, in questo lavoro, faremo costante riferimento alla terminologia e alle notazioni usate in [3].

touniverso di $UT(\mathcal{E})$. Tale sottouniverso è isomorfo (come universo di dispositivi) ad $\mathcal{M}_1(\mathcal{E})$, isomorfismo essendo l'operazione che ad ogni elemento di $\mathcal{M}_1(\mathcal{E})$ associa il suo subgradiente.

2. Dimostrazioni.

Nel corso delle dimostrazioni faremo uso in più punti, di alcune definizioni e risultati che ci pare opportuno richiamare.

2a) In ogni universo di dispositivi è definita una operazione di prodotto di dispositivi (cfr. [1], n. 3), che ad ogni coppia di dispositivi $(M, N) \in \mathcal{D}_\alpha \times \mathcal{D}_\beta$, associa il dispositivo $MN \in \mathcal{D}_{\alpha \cup \beta}$.

In $UT(\mathcal{E})$, se $\alpha = \beta$, il dispositivo MN si identifica con la corrispondenza che nella letteratura delle mappe monotone, viene chiamata somma delle mappe M ed N ; naturalmente nel seguito useremo la notazione moltiplicativa, propria della teoria dei dispositivi.

2b) Sia α un insieme finito, $i \in \alpha$, sia $\beta = \alpha - \{i\}$, poniamo $\eta: \beta \rightarrow \alpha$ l'immersione canonica; il trasduttore elementare ⁽²⁾ $\tilde{\eta}$, definisce l'operazione di soppressione del terminale i .

Sia $j \in \alpha$, $j \neq i$, l'applicazione $\pi: \alpha \rightarrow \beta$ definita da $\pi(k) = k$ se $k \in \alpha$, $k \neq i$, $\pi(i) = j$, definisce l'operazione di identificazione dei terminali i e j .

2c) Come già osservato in [1] (cfr. n. 7, Teorema 3), vale il seguente criterio metateorico:

Sia (\mathcal{D}, σ) un universo di dispositivi; la frase «soddisfare la proprietà \mathcal{F} » stia per un generico predicato (relativo ai dispositivi di (\mathcal{D}, σ)): supponiamo che, qualunque siano i dispositivi M, N di (\mathcal{D}, σ) e i terminali i, j , si abbia:

- 1) il dispositivo E_{ii} (cfr. [1], n. 3) soddisfa la proprietà \mathcal{F} ;
- 2) se M ed N sono privi di terminali comuni e soddisfano \mathcal{F} allora anche MN soddisfa \mathcal{F} (ovvero: se $M \in \mathcal{D}_\alpha$ ed $N \in \mathcal{D}_\beta$ soddisfano \mathcal{F} allora anche $\sigma_{\alpha, \beta}(M, N)$ soddisfa \mathcal{F});
- 3) se M soddisfa \mathcal{F} ed i è un terminale di M , anche il dispositivo ottenuto da M per soppressione di i , soddisfa \mathcal{F} ;

⁽²⁾ Cfr. [1], n. 1.

4) se M soddisfa \mathcal{F} anche il dispositivo M' ottenuto da M per identificazione di due qualunque terminali di M , soddisfa \mathcal{F} ; allora i dispositivi di (\mathcal{D}, σ) soddisfacenti \mathcal{F} formano un sottouniverso.

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA 1. Applichiamo il criterio enunciato in 2c) all'universo $\mathcal{M}(\mathcal{E})$, assumendo come proprietà \mathcal{F} la seguente: « f è un dispositivo di $\mathcal{M}(\mathcal{E})$ tale che $0 \in \text{ri dom } f^*$ ».

In $\mathcal{M}(\mathcal{E})$, E_{ij} è la funzione $e_{ij}: \mathcal{E}^{(i,j)} \rightarrow \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ definita da:

$$e_{ij}(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x_i = x_j \\ +\infty & \text{altrimenti} \end{cases}$$

e $0 \in \text{ri dom } e_{ij}^* = \text{ri } \{y \in \mathcal{E}_{(i,j)} \mid y_i = -y_j\}$.

Anche il punto 2) è immediato, qualora si tenga conto che

$$(\sigma_{\alpha,\beta}(f, g))^* = (f \oplus g)^* = f^* \oplus g^*, \quad f \in \mathcal{D}_\alpha, g \in \mathcal{D}_\beta.$$

Sia η come in 2b), il dispositivo ottenuto da $f \in \mathcal{D}_\alpha$ per soppressione del terminale i è $(f^* \eta \cdot)^*$. Si ha $((f^* \eta \cdot)^*)^* = f^* \eta \cdot$ e $0 \in \text{ri dom } f^* \eta \cdot$ se $0 \in \text{ri dom } f^*$ applicando il Lemma 1 b) in [3].

Sia π come in 2b), il dispositivo ottenuto da $f \in \mathcal{D}_\alpha$ per identificazione dei terminali i e j è $f\pi \cdot$. Si ha:

$$(f\pi \cdot)^* = (f^{**}\pi \cdot)^* = ((f^*)\pi \cdot)^*$$

ed allora $0 \in \text{ri dom } (f\pi \cdot)^*$ se $0 \in \text{ri dom } f^*$ applicando ad f^* il seguente:

LEMMA 1. Sia $\varphi: \alpha \rightarrow \beta$ una applicazione tra insiemi finiti; sia, in $\mathcal{M}(\mathcal{E})$, $g \in \mathcal{D}_\alpha$: definiamo per ogni $z \in \mathcal{E}^\beta$

$$\bar{g}(z) = \inf_y g(y) \quad (y \in \mathcal{E}^\alpha, \varphi \cdot (y) = z)$$

(ovviamente: se $z \notin \varphi \cdot (\mathcal{E}^\alpha)$, allora $\bar{g}(z) = +\infty$).

Valgono le seguenti affermazioni:

- a) $(g^* \varphi \cdot)^* = \bar{g}^{**}$,
- b) $\varphi \cdot (\text{ri dom } g) = \text{ri dom } \bar{g}^{**} = \text{ri dom } \bar{g}$,
- c) $\bar{g}^{**}(x) = \bar{g}(x)$ per ogni $x \in \text{ri dom } \bar{g}$,

la cui dimostrazione è analoga a quella del Lemma 2 in [3].

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA 2. Premettiamo due lemmi.

LEMMA 2. In $UT(\mathcal{E})$, sia $M \in \mathcal{D}_\alpha$, $i \in \alpha$, $A \in \mathcal{D}_\alpha$ la o -corrispondenza definita da: $(x, y) \in A \Leftrightarrow y_i = 0, x_j = 0$ se $j \in \alpha, j \neq i$; sia η come in 2b), allora $\eta \cdot \tilde{A} \tilde{M} \eta \cdot = \eta \cdot \tilde{M} \eta \cdot$, inoltre se $\tilde{A} \cdot \tilde{M}$ è massimale monotona allora $\eta \cdot \tilde{M} \eta \cdot$ è massimale monotona.

LEMMA 3. In $UT(\mathcal{E})$, sia $M \in \mathcal{D}_\alpha$, $i, j \in \alpha$, $B \in \mathcal{D}_\alpha$ la o -corrispondenza definita da: $(x, y) \in B \Leftrightarrow x_i = x_j, y_i = -y_j, y_k = 0$ se $k \in \alpha - \{i, j\}$, sia π come in 2b), allora $\pi \cdot B M \pi \cdot = \pi \cdot M \pi \cdot$, inoltre se $B M$ è massimale monotona allora $\pi \cdot M \pi \cdot$ è massimale monotona.

Omettiamo le semplici verifiche di tali lemmi e passiamo alla dimostrazione del teorema.

In $\mathcal{M}_1(\mathcal{E})$, sia $f \in \mathcal{D}_\alpha$, sia η come in 2b): in $\mathcal{M}_1(\mathcal{E})$ il dispositivo ottenuto da f per soppressione del terminale i è $(f^* \eta \cdot)^*$, in $UT(\mathcal{E})$, la o -corrispondenza ottenuta da ∂f in modo analogo è $\tilde{\eta} \cdot \partial f \tilde{\eta} \cdot$; dimostriamo che $\partial((f^* \eta \cdot)^*) = \tilde{\eta} \cdot \partial f \tilde{\eta} \cdot$.

Si ha $\widetilde{\tilde{\eta} \cdot \partial f \tilde{\eta} \cdot} = \eta \cdot \tilde{\partial f} \eta \cdot = \eta \cdot \partial f^* \eta \cdot$. Sia A come nel Lemma 2, allora $\tilde{A} \cdot (\partial f^*)$ è una o -corrispondenza monotona massimale in quanto $0 \in \text{ri dom } \tilde{A} \cap \text{ri dom } (\partial f^*)$, e quindi per il Lemma 2, $\eta \cdot \partial f^* \eta \cdot$ è monotona massimale.

Sia $(v', u') \in \mathcal{E}_\beta \times \mathcal{E}_\beta$ un elemento del grafico della corrispondenza $\eta \cdot \partial f^* \eta \cdot$, sia $x' \in \mathcal{E}^\alpha$ tale che $\eta \cdot (x') = u'$ allora per ogni $v \in \mathcal{E}^\beta$ si ha

$$f^* \eta \cdot (v) - f^* \eta \cdot (v') \geq \langle \eta \cdot (v) - \eta \cdot (v'), x' \rangle$$

cioè $f^* \eta \cdot (v) - f^* \eta \cdot (v') \geq \langle v - v', u' \rangle$ e pertanto (v', u') sta nel grafico di $\partial(f^* \eta \cdot)$, ma allora $\partial(f^* \eta \cdot) = \widetilde{\eta \cdot \partial f^* \eta \cdot}$ per la massimalità di $\eta \cdot \partial f^* \eta \cdot$. Infine $\tilde{\eta} \cdot \partial f \tilde{\eta} \cdot = \widetilde{\eta \cdot \partial f^* \eta \cdot} = \partial(f^* \eta \cdot) = \partial(f^* \eta \cdot)^*$ come si voleva.

Sia π come in 2b), in $\mathcal{M}_1(\mathcal{E})$ il dispositivo ottenuto da $f \in \mathcal{D}_\alpha$ per identificazione di i e j è $f\pi \cdot$, mentre in $UT(\mathcal{E})$ la o -corrispondenza ottenuta da ∂f in modo analogo è $\pi \cdot \partial f \pi \cdot$.

Dimostriamo che $\pi \cdot \partial f \pi \cdot = \partial(f\pi \cdot)$.

Sia B come nel Lemma 3, allora $B(\partial f)$ è una corrispondenza monotona massimale in quanto $0 \in \text{ri dom } B \cap \text{ri dom } \partial f$ e quindi per il Lemma 3, $\pi \cdot \partial f \pi \cdot$ è monotona massimale.

Sia $(u', v') \in \mathcal{E}^\beta \times \mathcal{E}_\beta$ un elemento del grafico della corrispondenza $\pi \cdot \partial f \pi \cdot$, sia $y' \in \mathcal{E}_\alpha$ tale che $\pi \cdot (y') = v'$, allora per ogni $u \in \mathcal{E}^\beta$ si ha $f\pi \cdot (u) - f\pi \cdot (u') \geq \langle \pi \cdot (u) - \pi \cdot (u'), y' \rangle$ cioè $f\pi \cdot (u) - f\pi \cdot (u') \geq \langle u - u', v' \rangle$ e pertanto (u', v') sta nel grafico di $\partial(f\pi \cdot)$, ma allora $\partial(f\pi \cdot) = \pi \cdot \partial f \pi \cdot$ per la massimalità di $\pi \cdot \partial f \pi \cdot$, come si voleva.

Inoltre in $\mathcal{M}_1(\mathcal{E})$, E_{ij} è la funzione $e_{ij}: \mathcal{E}^{(i,j)} \rightarrow \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ definita da:

$$e_{ij}(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x_i = x_j \\ +\infty & \text{altrimenti} \end{cases}$$

mentre in $UT(\mathcal{E})$, E_{ij} è ∂e_{ij} .

Infine, se $f \in \mathcal{D}_\alpha$, $g \in \mathcal{D}_\beta$ in $\mathcal{M}_1(\mathcal{E})$, si ha:

$$\partial f \underset{UT(\mathcal{E})}{\oplus} \partial g = \partial \left(f \underset{\mathcal{M}}{\oplus} g \right).$$

Pertanto i subgradienti degli elementi di $\mathcal{M}_1(\mathcal{E})$ sono un sotto-universo di $UT(\mathcal{E})$ e l'operatore ∂ che ad ogni funzione di $\mathcal{M}_1(\mathcal{E})$ associa il suo subgradiente, un isomorfismo tra universi.

BIBLIOGRAFIA

- [1] G. DARBO, *Aspetti algebrico-categoriali della teoria dei dispositivi*, Symposia Mathematica, **4** (1970), pp. 303 e seg.
- [2] F. PARODI, *Costruzione di un universo di dispositivi non lineari su una coppia di gruppi abeliani*, Rend. Sem. Mat. Univ. di Padova, **58** (1977).
- [3] S. TESTA, *Costruzione di un universo di dispositivi ciclicamente monotoni massimali*, Rend. Sem. Mat. Univ. di Padova, **58** (1977).

Manoscritto pervenuto in redazione il 9 luglio 1980.