

# RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

PIERANTONIO LEGOVINI

## **Gruppi finiti i cui sottogruppi sono o subnormali o pronormali - II**

*Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,*  
tome 65 (1981), p. 47-51

[http://www.numdam.org/item?id=RSMUP\\_1981\\_\\_65\\_\\_47\\_0](http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1981__65__47_0)

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1981, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques*  
<http://www.numdam.org/>

## Gruppi finiti i cui sottogruppi sono o subnormali o pronormali - II.

PIERANTONIO LEGOVINI (\*)

Scopo di questo lavoro è di fornire una caratterizzazione di una classe di gruppi introdotta in [3], e precisamente della classe dei gruppi finiti i cui sottogruppi sono o subnormali o pronormali (brevemente SP-gruppi). Per tali gruppi verrà dato, nel paragrafo 1, un teorema di struttura. Nel paragrafo 2 verrà esaminata la sottoclasse degli SP-gruppi formata dai gruppi (finiti e risolubili) i cui sottogruppi sono o subnormali o  $p$ -normalmente immersi per ogni primo  $p$  (brevemente SNE-gruppi); anche per i gruppi di questa classe viene data una caratterizzazione.

In tutto il lavoro per *gruppo* si intenderà sempre gruppo *finito*. Le notazioni e le nozioni che vengono usate senza particolari chiarimenti sono standard, e si possono comunque trovare in [2].

**1.** Come in [3], diremo che un sottogruppo  $H$  di un gruppo  $G$  è *propriamente pronormale (subnormale)* in  $G$  se  $H$  è pronormale (subnormale), ma non normale, in  $G$ . Ancora indicheremo con  $T(G)$  il sottogruppo caratteristico di  $G$  generato dai suoi sottogruppi primari propriamente subnormali, e con  $T_p(G)$  il sottogruppo di  $G$  generato dai  $p$ -sottogruppi propriamente subnormali.  $T(G)$  è nilpotente e  $T_p(G) \in \text{Syl}_p(T(G))$ .

**1.1 TEOREMA.** *Un gruppo  $G$  è un SP-gruppo se e solo se soddisfa le seguenti condizioni:*

(\*) Indirizzo dell'A.: Seminario Matematico, Università, 35100 Padova. Lavoro eseguito nell'ambito dei Gruppi di ricerca matematica del C.N.R.

(i)  $G$  possiede una torre di Sylow del tipo

$$1 \triangleleft K_1 \triangleleft K_1 K_2 \triangleleft \dots \triangleleft K_1 K_2 \dots K_r \triangleleft K_1 K_2 \dots K_r Q \triangleleft \\ \triangleleft K_1 K_2 \dots K_r Q P_1 \triangleleft K_1 K_2 \dots K_r Q P_1 P_2 \triangleleft \dots \triangleleft K_1 K_2 \dots K_r Q P_1 P_2 \dots P_s,$$

con  $K_i \in \text{Syl}_{q_i}(G)$  ( $i = 1, 2, \dots, r$ ),  $Q \in \text{Syl}_q(G)$ ,  $P_j \in \text{Syl}_{p_j}(G)$   
( $j = 1, 2, \dots, s$ ),  $q > p_1 > p_2 > \dots > p_s$ ;

(ii)  $K = K_1 K_2 \dots K_r$  è nilpotente;

(iii)  $T = P_1 P_2 \dots P_s$  è un  $t$ -gruppo;

(iv)  $T(Q) \leq C_Q(K)$ ;

(v) Se  $A_i \leq K_i$  e  $z \in Q \setminus C_Q(K)$  con  $A_i^z = A_i$ , allora  $C_{K_i}(z)QT \leq N_G(A_i)$ ;

(vi) Se  $A$  è un sottogruppo primario di  $KC_Q(K)$  e  $A^{x_j} = A$ , con  $x_j \in P_j \setminus C_{P_j}(KQP_1 \dots P_{j-1})$ , allora

$$C_{KC_Q(K)}(x_j)P_j P_{j+1} \dots P_s \leq N_G(A);$$

(vii) Se  $C \leq Q$  e  $C \not\leq C_Q(K)$ , allora  $T \leq N_G(C)$ .

**DM.** Le condizioni (i), (ii), (iii) e (iv) seguono dal Teorema 3.3 di [3]. Passiamo alla (v):  $\langle z \rangle$  non può essere subnormale in  $G$ , altrimenti centralizzerebbe  $K$ , quindi è pronormale. Per [3], Teorema 5.1,  $A_i \langle z \rangle$  è pronormale in  $G$ . Applicando [3], Corollario 5.4, si ottiene la (v). Per ottenere la (vi) basta rifare il ragionamento precedente con  $x_j$  nel ruolo di  $z$ , e con  $KQP_1 \dots P_{j-1}$  in quello di  $K$ . Quanto a (vii), risulta  $C$  pronormale in  $G$ , dunque  $C$  non possiede coniugati da esso distinti dentro  $Q$ . Ne segue che  $T \leq N_G(Q) \leq N_G(C)$ .

**Sufficienza.** Sia  $U$  un sottogruppo di  $G$ ; possiamo supporre, senza perdere in generalità, che  $U = V_1 V_2 \dots V_r R W_1 W_2 \dots W_s$ , con  $V_i = U \cap K_i$  ( $i = 1, \dots, r$ ),  $R = U \cap Q$ , e  $W_j = U \cap P_j$  ( $j = 1, \dots, s$ ). Supponiamo inoltre che  $U$  non sia subnormale in  $G$ . Vogliamo dimostrare che allora  $U$  è pronormale in  $G$ . Procediamo per induzione su

$$|\pi(U) \cap \{q_1, q_2, \dots, q_r, q_s\}| = m(U).$$

Se  $m(U) = 0$ ,  $U \leq T$  che è un  $t$ -gruppo, quindi per [6]  $U$  è pronor-

male in  $T$ , e per [4], Lemma 1.1,  $U$  è pronormale in  $G$ . Sia ora  $m(U) = 1$ , e sia  $R \neq 1$ . Se  $R \not\leq C_Q(K)$ , allora per (iv) e (vii)  $R$  risulta normale in  $QT$ , e ancora per [4], Lemma 1.1,  $R$  è pronormale in  $G$ , e tale risulta anche  $U$ , per [7], 1.8. Sia ora  $R \leq C_Q(K)$  e supponiamo per assurdo  $U$  non pronormale. Allora, per un risultato di Mann [5], il sistema di Sylow  $S = \{K_1, \dots, K_r, Q, P_1, \dots, P_s\}$  di  $G$  sarebbe riducibile in un coniugato  $(RW_1 \dots W_s)^g$  di  $U = RW_1 \dots W_s$ , con  $U \neq (RW_1 \dots W_s)^g$ . Essendo i  $W_1, \dots, W_s$  pronormali in  $G$ , è  $W_i^g = W_i$  ( $i = 1, \dots, s$ ), da cui  $(RW_1 \dots W_s)^g = R^g W_1 \dots W_s$ . Essendo sicuramente, per un opportuno  $j$ ,  $W_j \not\leq C_{P_j}(KQP_1 P_2 \dots P_{i-1})$ , in virtù di (vi) non è restrittivo supporre  $g \in Q$ .

Ma allora  $g \in C_Q(W_1 \dots W_s) \leq C_Q(x)$ , per qualche  $x \in W_i \setminus C_{P_i}(KQP_1 \dots P_{i-1})$  per un  $i$  opportuno. Ma, ancora per (vi), da  $R^x = R$  segue  $R^g = R$ , contraddizione. Quindi  $U$  è di nuovo pronormale in  $G$ . Una identica argomentazione consente di concludere nel caso  $m(U) = 1$  e  $R = 1$ , e nel caso  $m(U) = 2$  e  $R \not\leq C_Q(K)$  (cioè  $R$  pronormale in  $G$ ).

Passiamo al caso generale  $m(U) \geq 2$ .

Allora, per quanto appena osservato, tra i sottogruppi  $V_1, \dots, V_r, R$ , ce ne sono almeno due non identici e subnormali in  $G$ , diciamoli  $X_1$  e  $X_2$ .

Detti  $L_1, L_2$  i due complementi di  $X_1$  e  $X_2$  rispettivamente ottenibili dal sistema di Sylow  $\{V_1, \dots, V_r, R, W_1, \dots, W_s\}$ , si ha che nè  $L_1$  nè  $L_2$  possono essere subnormali in  $G$ , altrimenti, in entrambi i casi, lo sarebbe  $U$ . Ora  $m(L_1) = m(L_2) = m(U) - 1$ , e quindi  $L_1, L_2$  sono pronormali in  $G$ . Ma allora, per [4], Lemma 1.6, anche  $U = L_1 L_2$  è pronormale in  $G$ .

OSSERVAZIONE. Notiamo che la descrizione data degli SP-gruppi consente di costruire (supposti noti tutti i prodotti semidiretti di due gruppi primari d'ordine coprimo!) l'intera classe degli SP-gruppi.

In [3] si era visto (Teorema 3.3) che, detto  $W$  il più grande sottogruppo di Hall di un SP-gruppo  $G$ , contenuto in  $F(G)$ , e detto  $Z = P_1 \dots P_r$  ( $P_i \in \text{Syl}_{p_i}(Z)$ ,  $p_1 > \dots > p_r$ ) un complemento di  $W$  in  $G$ , risulta  $T(G) \leq WP_1$ , e che quindi esiste al più un primo  $p \in \pi(G)$  tale che, se  $P \in \text{Syl}_p(G)$ , è contemporaneamente  $T_p(G) \neq 1$  e  $P \not\triangleleft G$ . Tale primo, quando si presenta, viene detto eccezionale.

Nel Teorema che segue vengono individuati gli SP-gruppi dotati di un divisore primo eccezionale.

1.2 TEOREMA. *Sia  $G$  un SP-gruppo, e  $G$  abbia una descrizione come in 1.1. Allora  $G$  possiede un divisore primo eccezionale se e solo se  $Q \not\triangleleft G$  e  $QT$  non è un  $t$ -gruppo.*

**DIM. Necessità.** Il divisore primo eccezionale di  $G$  può essere solamente  $q$ ; infatti i  $K_i$  sono normali in  $G$ , e  $T$  non può contenere sottogruppi propriamente subnormali di  $G$ , in quanto i sottogruppi subnormali di  $T$  sono tutti normali in  $T$ . Allora, detto  $A \triangleleft Q$  un sottogruppo propriamente subnormale di  $G$ ,  $A$  deve essere anche propriamente subnormale anche in  $QT$ , e quindi  $QT$  non può essere un  $t$ -gruppo.

**Sufficienza.** Se  $QT$  non è un  $t$ -gruppo, allora contiene un sottogruppo primario  $A$  propriamente subnormale [6]. Allora  $T_q(G) \geq T_q(QT) \neq 1$ . Inoltre per ipotesi  $Q \not\triangleleft G$ , e quindi  $q$  è eccezionale.

**2.** La definizione di SP-gruppo, apparentemente simmetrica, presenta alla fine un certo squilibrio. Infatti risulta che i sottogruppi propriamente subnormali vengono ad essere nilpotenti [3], Teorema 5.1, in altre parole ogni sottogruppo di Sylow di un sottogruppo propriamente subnormale risulta a sua volta subnormale; non è invece necessariamente vero che, dato un sottogruppo propriamente pronormale di  $G$ , esso abbia tutti i suoi sottogruppi di Sylow pronormali in  $G$ , cioè che sia  $p$ -normalmente immerso in  $G$  per ogni  $p$  (vedasi [1]).

Viene quindi naturale considerare la classe dei gruppi in cui ogni sottogruppo è o subnormale o  $p$ -normalmente immerso per ogni primo  $p$ , gruppi che denomineremo SNE-gruppi.

**2.1 TEOREMA.** *Un gruppo  $G$  è SNE-gruppo se e solo se soddisfa le seguenti condizioni:*

(i)  $G$  possiede una torre di Sylow del tipo

$$1 \triangleleft K_1 \triangleleft K_1 K_2 \triangleleft \dots \triangleleft K_1 K_2 \dots K_r \triangleleft K_1 K_2 \dots K_r Q \triangleleft$$

$$\triangleleft K_1 K_2 \dots K_r Q P_1 \triangleleft K_1 K_2 \dots K_r Q P_1 P_2 \triangleleft \dots \triangleleft K_1 K_2 \dots K_r Q P_1 P_2 \dots P_s,$$

con  $K_i \in \text{Syl}_{q_i}(G)$  ( $i = 1, 2, \dots, r$ ),  $Q \in \text{Syl}_q(G)$ ,  $P_j \in \text{Syl}_{p_j}(G)$  ( $j = 1, 2, \dots, s$ ), e  $q > p_1 > p_2 > \dots > p_s$ ;

(ii)  $K = K_1 K_2 \dots K_r$  e nilpotente;

(iii)  $T = P_1 P_2 \dots P_s$  è un  $t$ -gruppo;

(iv)  $T(Q) \leq C_Q(K)$ ;

(v) Se  $A$  è un sottogruppo primario di  $KC_Q(K)$  e  $x \in Q \setminus C_Q(K)$  ovvero  $x \in P_j \setminus C_{P_j}(KQP_1 \dots P_{j-1})$ , allora da  $A^x = A$  segue  $A \triangleleft G$ .

**DIM. Necessità.** Le condizioni (i), (ii), (iii), (iv) discendono dal fatto che  $G$  è un SP-gruppo e dal Teorema 1.1. Dimostriamo la (v). Come in 1.1,  $\langle x \rangle$  è propriamente pronormale in  $G$ , e quindi lo è anche  $A\langle x \rangle$ . Ne segue che  $A$  deve essere pronormale in  $G$ , e quindi normale, in quanto contemporaneamente pronormale e subnormale.

*Sufficienza.* Sia  $U = V_1 \dots V_r R W_1 \dots W_s$ , con

$$V_i = U \cap K_i \ (i = 1, \dots, r), \ R = U \cap Q \ \text{e} \ W_j = U \cap P_j \ (j = 1, \dots, s),$$

un sottogruppo propriamente pronormale di  $G$ . Quindi almeno uno dei sottogruppi di Sylow,  $U_0$ , di  $U$ , è propriamente pronormale in  $G$ . Deve essere  $U_0 = R$  (nel qual caso  $U_0 \not\leq C_Q(K)$ ) oppure  $U_0 = W_j$  per un  $j$  opportuno (e quindi  $U_0 \not\leq C_{P_j}(KQP_1 \dots P_{j-1})$ ). Supponiamo che ci sia un  $V_i$ , con  $V_i$  propriamente subnormale in  $G$ . Sia  $x \in R \setminus C_Q(K)$  se  $U_0 = R$ , oppure  $x \in W_j \setminus C_{P_j}(KQP_1 P_2 \dots P_{j-1})$  se  $U_0 = W_j$ . Poichè  $V_i^x = V_i$ , per (v) dobbiamo avere  $V_i \triangleleft G$ , contraddizione.

**OSSERVAZIONE.** La condizione (v) del Teorema 2.1 può essere letta così: se  $\mathcal{A}$  è l'insieme dei  $p$ -sottogruppi propriamente subnormali di  $G$ , e  $x$  è un elemento di  $G$  d'ordine primo con  $p$ , allora  $x$  induce per coniugio su  $\mathcal{A}$  una permutazione che è o priva di punti fissi o quella identica.

### BIBLIOGRAFIA

- [1] G. A. CHAMBERS, *p-normally embedded subgroups of finite soluble groups*, J. Alg., **16** (1970), pp. 442-445.
- [2] B. HUPPERT, *Endliche Gruppen - I*, Springer-Verlag (1967).
- [3] P. LEGOVINI, *Gruppi finiti i cui sottogruppi sono o subnormali o pronormali*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, **58** (1977), pp. 129-147.
- [4] P. LEGOVINI, *Catene pronormali nei gruppi finiti supersolubili*, in corso di stampa presso i Rend. Sem. Mat. Univ. Padova.
- [5] A. MANN, *A criterion for pronormality*, J. London Math. Soc., **44** (1969), pp. 175-176.
- [6] T. A. PENG, *Finite groups with pronormal subgroups*, Proc. Amer. Math. Soc., **20** (1969), pp. 232-234.
- [7] J. S. ROSE, *Finite soluble groups with pronormal system normalizers*, Proc. London Math. Soc. (3), **17** (1967), pp. 447-469.

Manoscritto pervenuto in redazione il 28 novembre 1980.