

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

CARLO MARIA SCOPPOLA

**Sul reticolo dei sottogruppi di un gruppo
abeliano senza torsione di rango diverso da 1 :
una caratterizzazione reticolare**

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 65 (1981), p. 205-221

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1981__65__205_0>

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1981, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

**Sul reticolo dei sottogruppi di un gruppo abeliano
senza torsione di rango diverso da 1:
una caratterizzazione reticolare.**

CARLO MARIA SCOPPOLA (*)

0. Il problema di trovare condizioni necessarie e sufficienti perchè il reticolo $\mathcal{L}$ sia isomorfo al reticolo dei sottogruppi di un gruppo è stato posto da Suzuki in [2].

In [3] è data una risposta a tale problema: si trovano prima di tutto condizioni necessarie e sufficienti affinché un reticolo $\mathcal{L}$ sia isomorfo al reticolo dei sottogruppi di un gruppo libero noncommutativo (tali condizioni sono di natura completamente reticolare). I reticoli che sono isomorfi a reticoli dei sottogruppi di gruppi si identificano poi con una conveniente classe di ideali principali duali dei caratterizzati reticoli di gruppi liberi, e ciò in accordo col fatto che ogni gruppo è l'immagine epimorfa di un conveniente gruppo libero.

In questo lavoro si ottiene invece esplicitamente (in termini reticolari) una condizione necessaria e sufficiente affinché un reticolo $\mathcal{L}$ sia isomorfo al reticolo dei sottogruppi di un gruppo abeliano senza torsione di rango diverso da 1: a partire da un reticolo che soddisfa a tale condizione, si costruisce poi l'unico gruppo il cui reticolo dei sottogruppi è isomorfo al reticolo dato.

Le tecniche qui usate sono adattamenti di quelle usate in [3], ispirati ai classici lavori di Baer sui reticoli di gruppi abeliani (si veda ad es. [2]).

(*) Indirizzo dell'A.: Dipartimento di Matematica, Libera Università degli Studi di Trento, 38050 Povo, (Trento).

Lavoro eseguito nell'ambito dei gruppi di ricerca del C.N.R.

Alcuni dei risultati ottenuti in questo lavoro sono simili a risultati ottenuti, con tecniche diverse ed in diverso contesto, in [1].

1. Le notazioni sono tutte standard: indicheremo con $\vee$ e $\wedge$ le operazioni reticolari, mentre con $\cup$ e $\cap$ indicheremo l'unione e l'intersezione di insiemi; l'ordinamento parziale in un reticolo $\mathcal{L}$ verrà indicato con $\leq$; la relazione di inclusione tra insiemi con $\subseteq$. Con $1_{\mathcal{L}}$, $0_{\mathcal{L}}$ (o semplicemente 1 , 0) indicheremo l'eventuale elemento massimo (minimo) del reticolo $\mathcal{L}$; con 1_G (o 1) indicheremo l'unità del gruppo G . Per le nozioni reticolari seguiremo [2]. Sia $\mathcal{L}$ un reticolo con 0 . Come in [3], diremo che $a \in \mathcal{L}$ è ciclico se l'intervallo $a/0$ è distributivo con condizione massimale.

Indicheremo con lettere latine minuscole gli elementi ciclici di $\mathcal{L}$, con $C(\mathcal{L})$ l'insieme da essi formato, con lettere latine maiuscole gli altri elementi di $\mathcal{L}$.

La proposizione che segue è ben nota: in forma leggermente diversa, appare in [1] e in [3].

1.1. PROPOSIZIONE. Sia G un gruppo, $\mathcal{L}$ un reticolo algebrico i cui elementi compatti sono quelli unione di un numero finito di elementi ciclici. Se esiste una mappa suriettiva:

$$\psi: G \rightarrow C(\mathcal{L})$$

che soddisfa la condizione

(o) Per ogni $X \subseteq G$, X finito e $y \in G$ risulta

$$\psi(y) \leq \bigvee_{x \in X} \psi(x) \quad \text{se e solo se } y \in \langle X \rangle$$

allora la posizione

$$\varphi: K \mapsto \bigvee_{x \in K} \psi(x)$$

per $K \leq G$, definisce un isomorfismo φ del reticolo $\mathcal{L}(G)$ dei sottogruppi di G su $\mathcal{L}$.

DIMOSTRAZIONE. φ è iniettiva: supponiamo $\varphi(H) = \varphi(K)$, e sia per assurdo ad esempio $H \not\leq K$. Sia allora $x \in H$, $x \notin K$. Allora

$$\psi(x) \leq \bigvee_{y \in H} \psi(y) = \varphi(H) = \varphi(K) = \bigvee_{z \in K} \psi(z).$$

Poichè $\psi(x)$ è compatto, si ha che esistono $z_1, \dots, z_n \in K$ tali che

$$\psi(x) \leq \psi(z_1) \vee \dots \vee \psi(z_n)$$

che contraddice $(\circ)$.

φ è suriettiva: sia $v \in \mathcal{L}$, e sia

$$V = \{x \in G \mid \psi(x) \leq v\}.$$

Se $x, y \in V$, si ha $xy^{-1} \in \langle x, y \rangle$, e, per la $(\circ)$,

$$\psi(xy^{-1}) \leq \psi(x) \vee \psi(y) \leq v.$$

Allora $V \leq G$, e, poichè $\mathcal{L}$ è algebrico, $\varphi(V) = v$, tenuto conto della suriettività della ψ .

È poi chiaro che $H \leq K$ se e solo se $\varphi(H) \leq \varphi(K)$. ///

2. Per tutto il paragrafo, supporremo che il reticolo $\mathcal{L}$ soddisfi le seguenti due condizioni:

GA1 $\mathcal{L}$ è modulare, algebrico, senza torsione (cioè nessun elemento di $\mathcal{L}$ copre lo 0) i cui elementi compatti sono quelli unione di un numero finito di elementi ciclici.

GA2 Se $a, b \in C(\mathcal{L})$, si ha che $a \wedge b \neq 0$ se e solo se $a \neq 0 \neq b$, e $a \vee b \in C(\mathcal{L})$.

Se $a, b \in C(\mathcal{L})$, seguendo la notazione di [3], indicheremo con $a \circ b$ l'insieme $\{c \in C(\mathcal{L}) \mid a \vee c = b \vee c = a \vee b\}$.

Nei lemmi che seguono, si studiano le prime conseguenze di GA1, GA2.

2.1. LEMMA. Se $A, B, C \in \mathcal{L}$, e $(A \vee B) \wedge C = 0$, allora $(A \vee C) \wedge B = A \wedge B$.

DIMOSTRAZIONE.

$$(A \vee C) \wedge B \leq (A \vee C) \wedge (A \vee B) = A \vee (C \wedge (A \vee B)) = A.$$

Allora $(A \vee C) \wedge B \leq A \wedge B$. L'altra inclusione è ovvia. ///

2.2. LEMMA. Siano $a, u \in C(\mathcal{L})$, $a \neq 0 \neq u$, $A \in \mathcal{L}$, $A \geq a$, $A \wedge u = 0$, $\alpha \in a \circ u$. Allora $\alpha \wedge a = \alpha \wedge b = \alpha \wedge A = 0$.

DIMOSTRAZIONE. Se $\alpha \wedge a \neq 0$, $\alpha \vee a \in C(\mathcal{L})$, per GA2. Ma $\alpha \vee a = a \vee u$. Ancora per GA2, si avrebbe $a \wedge u \neq 0$. Analogamente, si mostra che $\alpha \wedge u = 0$. Si ha poi $\alpha \wedge A \leq (\alpha \vee u) \wedge A = a \vee (u \wedge A) = a$. Dunque $\alpha \wedge A = \alpha \wedge a = 0$. ///

2.3. LEMMA. Siano $a, b, u \in C(\mathcal{L})$, $u \neq 0$, $u \wedge (a \vee b) = 0$, $\alpha \in a \circ u$, $\beta \in b \circ u$. Allora si ha:

$$\text{i) } (\alpha \vee \beta) \wedge (a \vee b) \in \alpha \circ \beta \cap a \circ b,$$

$$\text{ii) se } \alpha \wedge \beta \neq 0, a = b, \alpha = \beta.$$

DIMOSTRAZIONE. i) Basta mostrare che, posto $w = (a \vee b) \wedge (\alpha \vee \beta)$, w è ciclico: una semplice applicazione dell'identità modulare permette poi di concludere.

Se $a \vee b \in C(\mathcal{L})$, si ha chiaramente $w \in C(\mathcal{L})$. Sia allora $a \neq 0 \neq b$, $a \wedge b = 0$, e mostriamo intanto che $w \wedge a = (\alpha \vee \beta) \wedge a = 0$. Poichè $u \neq 0$, e $u \wedge a = 0$, si ha per 2.2 $\alpha \wedge a = 0$; per 2.1, basta allora mostrare che

$$\beta \wedge (\alpha \vee a) = \beta \wedge (u \vee a) = 0.$$

Ma $\beta \wedge (u \vee a) \leq (\beta \vee u) \wedge (u \vee a) = (b \vee u) \wedge (u \vee a) = u \vee (b \wedge (u \vee a))$. Ma di nuovo per 2.1, $b \wedge (u \vee a) = b \wedge a = 0$. Così, $\beta \wedge (u \vee a) \leq u \wedge \beta$. Ma $u \wedge \beta = 0$, per 2.2. Così abbiamo: $w \wedge a = 0$. Poichè $w \vee a = w \vee b = a \vee b$, la modularità porge $w/0 \simeq b/0$, e $w \in C(\mathcal{L})$.

ii) Per 2.2, possiamo supporre $a \neq 0 \neq b$. Se ora $\alpha \wedge \beta \neq 0$, poichè per 2.2 $\alpha \wedge (a \vee b) = 0$, si avrebbe $(\alpha \vee \beta) \wedge (a \vee b) = 0$, per GA2. Per la prima parte, $a = b$, $\alpha = \beta$. ///

Diamo ora la definizione che occupa un posto centrale nella caratterizzazione dei reticoli di sottogruppi dei gruppi abeliani senza torsione:

2.4. DEFINIZIONE. Siano $a, b \in C(\mathcal{L})$. Porremo: $a * b = \{c \in a \circ b \mid \text{per ogni } u \in C(\mathcal{L}), \text{ con } u \wedge (a \vee b) = 0, \text{ e per ogni } \alpha \in a \circ u, \text{ esiste } \beta \in b \circ u \text{ tale che } c \in \alpha \circ \beta\}$.

È facile vedere che se $a \in C(\mathcal{L})$, $a * 0 = \{a\}$.

D'ora in avanti, supporremo che $\mathcal{L}$ soddisfi, oltre le condizioni GA1, GA2, anche la seguente:

$$\text{GA3 Se } a, b \in C(\mathcal{L}), a \neq 0 \neq b, \text{ allora } |a * b| = 2.$$

I tre lemmi che seguono precisano la relazione tra $*$ e $\circ$:

2.5. LEMMA. Se $\mathfrak{L} \neq \{0\}$ esistono $a, b \in C(\mathfrak{L})$ con $a \wedge b = 0$, $a \neq 0 \neq b$; per ogni coppia $\{a, b\}$ di tali elementi si ha inoltre:

i) $a * b = a \circ b$,

ii) se $\{x, y\} = a \circ b$, allora $x \wedge y = 0$.

DIMOSTRAZIONE. Per GA3, $|a * a| = 2$, per ogni $a \neq 0$, $a \in C(\mathfrak{L})$. Poichè $\mathfrak{L}$ è senza torsione, $a/0 = a \circ a$ non è finito, e quindi esiste $b \neq 0$ con $a \wedge b = 0$, $b \in C(\mathfrak{L})$.

i) Sia $c \in a \circ b$, e sia $0 \neq u \in C(\mathfrak{L})$ tale che $u \wedge (a \vee b) = 0$. Per 2.1 $a \wedge (b \vee u) = a \wedge b = 0$; se ora $\alpha \in a \circ u$, per 2.3 i) si ha

$$\beta = (\alpha \vee c) \wedge (u \vee b) \in \alpha \circ c \cap u \circ b.$$

Ciò prova che $c \in a * b$.

ii) Discende direttamente da 2.3 ii). ///

2.6. LEMMA. Siano a, b, u come in 2.3, $a \neq 0 \neq b$. Siano

$$a \circ u = \{\alpha, \alpha'\}, \quad b \circ u = \{\beta, \beta'\}.$$

Allora si ha:

$$\alpha \circ \beta \cap \alpha \circ \beta' = \emptyset.$$

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo che $c \in \alpha \circ \beta \cap \alpha \circ \beta'$. Allora $\beta, \beta' \in c \circ \alpha$. Per 2.5 ii) si ha che $\beta \wedge \beta' = 0$. Allora per 2.5 i) si ha che $|\beta \circ \beta'| = 2$. Per 2.3 i), se poniamo

$$s = (\beta \vee \beta') \wedge b, \quad t = (\beta \vee \beta') \wedge u,$$

si ha che $\{s, t\} = \beta \circ \beta'$. Si ha ora anche

$$s' = (\beta \vee \beta') \wedge \alpha \in \beta \circ \beta';$$

ma $s \wedge s' \leq \alpha \wedge b = 0$, $t \wedge s' \leq \alpha \wedge u = 0$, di nuovo per 2.2. ///

Si ha facilmente il:

2.7. COROLLARIO. Se $a, b \in C(\mathfrak{L})$, $a * b = b * a$.

DIMOSTRAZIONE. Ci si riduce facilmente a $a \neq 0 \neq b$. Sia $c \in a * b$, $0 \neq u \in C(\mathcal{L})$, $\beta \in b \circ u$, tali che, per assurdo, $c \notin \alpha \circ \beta$, $c \notin \alpha' \circ \beta$. Allora, poichè $c \in a * b$, si ha $c \in \alpha * \beta'$, $c \in \alpha' \circ \beta'$, contro 2.6. ///

2.8. LEMMA. Siano $a, b, u, \alpha, \beta, w$ come in 2.3 e sia $a \neq 0 \neq b$. Allora si ha $w \in a * b$.

DIMOSTRAZIONE. Per GA3 si ha $|a * b| = 2$. Supponiamo $\alpha \neq \beta$. Sia $s \in a * b$, e supponiamo che $s \in \alpha \circ \beta$ (quest'ultima ipotesi non è restrittiva). Si ha allora certamente $s \leq w$, e quindi $s = w$ per 2.5 ii), visto che, per 2.3 ii), $\alpha \wedge \beta = 0$. A questo punto, 2.6 e GA3 forniscono facilmente

$$a * b = \{w, a \circ b \cap \alpha \circ \beta' \cap \alpha' \circ \beta = w'\}.$$

Se poi $\alpha = \beta$, si ha immediatamente $w = 0 \in a * a$. ///

2.9. OSSERVAZIONI. i) Nel caso esista $u \in C(\mathcal{L})$ tale che $u \neq 0$, $u \wedge (a \vee b) = 0$, 2.8 permette di costruire con facilità $a * b$; con 2.5 i), abbiamo quindi in ogni caso una scrittura « esplicita » di $a * b$.

ii) Per i), tutte le scelte di u in 2.4 sono quindi tra loro equivalenti.

D'ora in poi, per tutto il paragrafo, supporremo che il reticolo $\mathcal{L}$ sia non banale ($\mathcal{L} \neq \{0\}$), e soddisfi, oltre GA1, GA2, GA3, le due ulteriori condizioni

GA4 Se $0 \neq e, a, b \in C(\mathcal{L})$, $e \notin a * b$, $\alpha \in a * e$, $\beta \in b * e$, allora $|a * b \cap \alpha * \beta| = 1$,

GA5 Se $x \in C(\mathcal{L})$, $Y \subset C(\mathcal{L})$, $x \leq \bigvee_{y \in Y} y$, esistono $y_1, \dots, y_n \in Y$ tali che $x \in ((y_1 * y_2) * y_3) * \dots * y_n$.

2.10 DEFINIZIONE. Un reticolo soddisfacente le condizioni GA1-GA5 si dirà un GA-reticolo.

L'esistenza di GA-reticoli è garantita dal seguente:

2.11. TEOREMA. Sia G un gruppo abeliano senza torsione di rango $r \geq 2$. Allora, se $a, b \in G$, si ha $\langle a \rangle * \langle b \rangle = \{\langle ab \rangle, \langle ab^{-1} \rangle\}$, e $\mathcal{L}(G)$, il reticolo dei sottogruppi di G , è un GA-reticolo.

Si omette la semplice verifica.

Inoltre, 2.10 permette di riformulare 1.1 come segue:

2.12. PROPOSIZIONE. Sia G un gruppo, $\mathbb{L}$ un GA-reticolo. Se esiste una mappa suriettiva

$$\psi: G \rightarrow C(\mathbb{L})$$

tale che $\psi(x) \in \psi(y) * \psi(z)$ se e solo se $x = y^\theta z^\eta$, $\theta, \eta = \pm 1$, allora la posizione

$$\varphi(K) = \bigvee_{x \in K} \psi(x),$$

per ogni $K \leq G$, definisce una proiezione $\varphi: \mathbb{L}(G) \rightarrow \mathbb{L}$.

Nei lemmi che seguono si studiano ulteriori proprietà dei GA-reticoli.

2.13. LEMMA. Sia $\mathbb{L}$ un GA-reticolo, $a, b, c \in C(\mathbb{L})$. Se $c \in a * b$, si ha $a \in b * c$ (e $b \in a * c$).

DIMOSTRAZIONE. Se $c = a$, tutto è chiaro. Supponiamo allora $c \neq a$, e sia $0 \neq u \in C(\mathbb{L})$ tale che $u \wedge (b \vee c) = u \wedge (a \vee b) = 0$. Fissiamo $\beta \in u \circ b$, e sia $\alpha \in u \circ a$ tale che $c \in \alpha \circ \beta$. Ora $\alpha \notin u * c = u \circ c$ in virtù di 2.3 ii), e per GA4 si ha $|u * c \cap a * \beta| = 1$, e dunque esiste $\gamma \in u * c$ tale che $a \in \beta \circ \gamma$ per cui $a \in b * c$. ///

2.14. LEMMA. Sia $\mathbb{L}$ un GA-reticolo, $e, a, b \in C(\mathbb{L})$, $\alpha \in a * e$, $\beta \in e * b$. Allora $a * b \cap \alpha * \beta \neq \emptyset$.

DIMOSTRAZIONE. Se $e = 0$, si ha $\alpha = a$, $\beta = b$, e in ogni caso $a * b \neq \emptyset$. Se invece $e \neq 0$, $e \notin a * b$, la tesi è immediata per GA4. Se $e \in a * b$, $e \notin \alpha * \beta$, 2.13 e GA4 permettono di nuovo di concludere. Altrimenti, $e \in a * b \cap \alpha * \beta$. ///

2.15. LEMMA. Sia $\mathbb{L}$ un GA-reticolo, $a, b, c \in C(\mathbb{L})$; allora se $a * a = b * b$ si ha $a = b$, e se $a * b = a * c$ si ha $b = c$.

DIMOSTRAZIONE. Per la prima parte, sia $\gamma \in a * b$. Se $\gamma \in a * a \cap b * b$, si ha $b \leq a \vee \gamma = a \vee a = a \leq b \vee \gamma = b \vee b = b$, e $a = b$. Se invece, ad esempio, $\gamma \notin a * a$, si ha $\gamma = 0$, altrimenti per GA4 $|a * a \cap b * b| = 1$, e $a = 0 = b$. Se ora $0 \in a * b$, si ha facilmente $a = b$.

Per la seconda parte, ci si riduce facilmente a $a \neq 0 \neq b \neq 0 \neq c$. Sia $\gamma \in a * b \cap a * c$. Se $\gamma = 0$, si ha $a = b = c$. Se $\gamma \neq 0$, per 2.14 si ha che $|a * a \cap b * c| \geq 1$. Se $0 \in b * c$ allora $b = c$; altrimenti sia $0 \neq \delta \in a * a \cap b * c$. Per GA4, $\delta \in a * b \cap a * c$. Si ha allora $a * \delta \ni a, b, c$; è facile vedere che in ogni caso $b = c$. ///

2.16. LEMMA. Sia $\mathcal{L}$ un GA-reticolo, $a, b, c, d \in C(\mathcal{L})$. Allora se $a * b = c * d$ si ha $\{a, b\} = \{c, d\}$.

DIMOSTRAZIONE. È facile vedere che si può supporre $a, b, c, d \neq 0$. Sia $\{\alpha, \beta\} = a * b = c * d$. Supponiamo dapprima che $\{\alpha, \beta\} = a * c = b * d = a * d = b * c$; allora si avrebbe $a * \alpha \ni b, c, d$, cioè ad esempio $c = d$, e allora facilmente, per 2.15, $a = b = c = d$, in ogni caso. Sia allora, ad esempio, $\alpha \notin a * c$. Allora $a * c \cap b * d = \{\gamma\}$ in virtù di GA4, e si ha facilmente $\gamma = 0$ o $\gamma = \beta$, altrimenti l'ipotesi $|a * b \cap c * d| = 2$ violerebbe GA4. Se $\gamma = 0$, si ha $a = c, b = d$, la tesi. Se $\gamma = \beta$, si ha

$$a \in \beta * b \cap \beta * c, \quad d \in \beta * b \cap \beta * c,$$

e, per 2.15, in ogni caso la tesi. ///

2.17. LEMMA. Siano $0 \neq e, a, b \in C(\mathcal{L}), \alpha, \alpha' \in a * e, \beta, \beta' \in b * e$. Allora

$$|a * b \cap \alpha' * \beta \cap \alpha * \beta'| = 1.$$

DIMOSTRAZIONE. Se $a = 0$, o $b = 0$, è tutto chiaro. Sia allora $a \neq 0 \neq b$. Se $e \in a * b$, è facile riconoscere la tesi osservando che $a * e \supset \{\alpha, \alpha', b\}$, e $b * e \supset \{\beta, \beta', a\}$, e applicando 2.14. Sia allora $e \notin a * b$. Per GA4 esistono s_1, s_2 tali che $\{s_1\} = a * b \cap \alpha * \beta', \{s_2\} = a * b \cap \alpha' * \beta$. Sia ora $\{t\} = a * b \cap \alpha * \beta$; mostriamo che $t \neq s_1$. Se fosse $t = s_1$ si avrebbe $\beta, \beta' \in \alpha * s_1$, per 2.16, e $e * b \cap \alpha * s_1 \supset \{\beta, \beta'\}$. Poichè $a \neq 0$, e $a \notin e * b$, per GA4 si ha $\beta = \beta'$, e $b = 0$, assurdo. Analogamente, $t \neq s_2$. Poichè $|a * b| = 2$, si ha $s_1 = s_2$. ///

Siano $a, b, e, \alpha, \beta, \alpha', \beta'$ come in 2.17. D'ora in avanti, indicheremo l'unico elemento dell'insieme $a * b \cap \alpha * \beta' \cap \alpha' * \beta$ con la notazione $\psi_{e,a,b}(\alpha, \beta)$. Ove non si creino ambiguità, abbrevieremo tale notazione in $\psi_e(\alpha, \beta)$, o addirittura in $\psi(\alpha, \beta)$.

2.18. DEFINIZIONE. Se $0 \neq a \in C(\mathcal{L})$, indicheremo con a_2 l'elemento di $a * a$ diverso da 0. Si osservi che $a_2 \neq a$, per GA1 e GA5.

2.19. LEMMA. Siano $e, a, b, \alpha, \beta, \alpha', \beta'$ come in 2.17, $x, y \in C(\mathcal{L})$. Se

$$\begin{aligned} x * y \cap a * b &\neq \emptyset, \\ x * y \cap \alpha * \beta' &\neq \emptyset, \\ x * y \cap \alpha' * \beta &\neq \emptyset, \end{aligned}$$

allora una delle seguenti alternative è vera:

$$(1) \quad \psi(\alpha, \beta) \in x * y,$$

$$(2) \quad x = y = e, \quad a = b, \quad \alpha = \beta,$$

$$(3) \quad x = e, \quad y = e_2, \quad a = b, \quad a_2 = e,$$

$$(4) \quad x = e, \quad y = e_2, \quad e \in a * b, \quad b = \alpha, \quad a = \beta'.$$

DIMOSTRAZIONE. Se $a = 0$, o $b = 0$, vale (1), poichè $\{\psi(\alpha, \beta)\} = a * b$. Con una considerazione analoga si vede che vale (1) anche nel caso $a = e$ o $b = e$. Possiamo quindi senz'altro assumere $\alpha \neq \alpha'$, $\beta \neq \beta'$. Supponiamo che $\psi(\alpha, \beta) \notin x * y$. Le ipotesi porgono allora

$$(i) \quad \alpha * \beta' = \alpha' * \beta,$$

oppure

$$(ii) \quad a * b = \alpha * \beta'.$$

i) e 2.16 danno $\alpha = \beta$, $\alpha' = \beta'$, e quindi $a = b$. Si ha $\psi(\alpha, \alpha) \neq 0$, e quindi $0 \in x * y$, poichè $x * y \cap a * a \neq \emptyset$. Quindi $x = y$. Da $\alpha * \alpha' \cap \alpha * \alpha' = \alpha * \alpha' \cap x * x$ si ricava $x * x = e * e$, e per 2.15 $x = e$. Vale dunque (2).

ii) e 2.16 danno $a = \alpha$, $b = \beta'$, oppure $a = \beta'$, $b = \alpha$. Nel primo caso si ha: $a_2 = b_2 = e$; per 2.15 $a = b$. È facile concludere che vale (3). Nel secondo caso, $e \in a * b$. Ma $e \notin \alpha' * \beta$, avremmo altrimenti $\alpha' * e = \{\beta, \beta' = a\}$, e per 2.15 $\alpha' = b = \alpha$, assurdo. Allora $e \in x * y$. Per ottenere (4), basta quindi mostrare: $e * e_2 \cap \alpha' * \beta \neq \emptyset$. Per 2.14, basta allora mostrare $a \in e_2 * \beta$. Ma 2.14 fornisce $e * e \cap a * \beta \neq \emptyset$, e $0 \notin a * \beta$, poichè $a = \beta' \neq \beta$. Allora $e_2 \in a * \beta$, e 2.13 conclude la dimostrazione.
///

Si assuma ora, nei tre lemmi seguenti, $0 \neq e \in C(\mathbb{L})$, $E \in \mathbb{L}$, $e \wedge E = 0$, $C = C(\mathbb{L}) \cap E/0$. Per ogni $a \in C$, indicheremo con α, α^{-1} , cioè con la corrispondente lettera greca minuscola munita degli esponenti ± 1 , gli elementi di $a * e$; nel caso $a = 0$, α e α^{-1} verranno identificati.

2.20. LEMMA. Siano $a, b \in C$. Allora

$$e * \psi_{e,a,b}(\alpha, \beta) \cap \alpha * b \cap a * \beta$$

contiene esattamente un elemento, che diremo il « prodotto » di α e β , e indicheremo $\alpha \cdot \beta$.

DIMOSTRAZIONE. Sia dapprima $a = b$. Se $\psi(\alpha, \beta) = 0$, cioè se $\beta = \alpha^{-1}$, la tesi è immediata: $\alpha \cdot \alpha^{-1} = \alpha^{-1} \cdot \alpha = e$. Se $\psi(\alpha, \beta) \neq 0$, e quindi $\alpha \neq \beta$, si ha

$$\psi(\alpha, \beta) = a * a \cap \alpha * \alpha^{-1};$$

osservando che $a \notin e * \psi(\alpha, \beta)$, per GA4 si ha

$$|e * \psi(\alpha, \beta) \cap \alpha * a| = 1.$$

Sia allora $a \neq b$. Certamente, per 2.3 ii), $e \notin \alpha * b$: sia allora σ l'unico elemento di $\alpha * b \cap a * \beta$. Per 2.19 si ha allora facilmente $\psi(\alpha, \beta) \in e * \sigma$. ///

Abbiamo così una legge di composizione su $\Gamma = C \circ e = \bigcup_{x \in C} x \circ e$, rispetto alla quale $e \in 0 \circ e$ funge da identità, e α^{-1} da inverso di α . Dalla definizione, segue immediatamente anche $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$. È anche immediato:

2.21. LEMMA. $\alpha^{-1} \cdot \beta^{-1} = (\alpha \cdot \beta)^{-1}$.

DIMOSTRAZIONE. Se $s = \psi(\alpha, \beta) \neq 0$, per GA4 $|\sigma * b \cap e * a| = 1$. ///

2.22. LEMMA. $(\Gamma, \cdot)$ è un gruppo.

DIMOSTRAZIONE. Basta mostrare che l'operazione su Γ è associativa. Sia dunque $\alpha \cdot \beta = \xi$, $\beta \cdot \gamma = \eta$; occorre far vedere che $\xi \cdot \gamma = \alpha \cdot \eta$. Sarà $\xi \in x * e$, $\eta \in y * e$; e supporremo, senza perdita di generalità, che $a \neq 0 \neq b \neq 0 \neq c$. Ci riduciamo al caso

$$x * c \cap \xi * \gamma^{-1} \cap \xi^{-1} * \gamma = a * y \cap \alpha * \eta^{-1} \cap \alpha^{-1} * \eta$$

a partire dalle seguenti condizioni, che si ottengono tutte applicando opportunamente la GA4 e i risultati precedenti:

$$\begin{aligned} |x * c \cap \xi * \gamma^{-1}| &= |x * c \cap \xi^{-1} * \gamma| = |x * c \cap \alpha * \eta^{-1}| = \\ &= |x * c \cap \alpha^{-1} * \eta| = |a * y \cap \alpha * \eta^{-1}| = |a * y \cap \alpha^{-1} * \eta| = \\ &= |a * y \cap \xi * \gamma^{-1}| = |a * y \cap \xi^{-1} * \gamma| = 1, \\ x * c \cap a * y &\neq \emptyset \neq \xi * \gamma^{-1} \cap \alpha * \eta^{-1} \neq \emptyset \neq \xi^{-1} * \gamma \cap \alpha^{-1} * \eta, \end{aligned}$$

e applicando 2.19, a meno che non si abbia $x * c = a * y$, cioè, per 2.16, $a = x$, $c = y$, oppure $x = y$, $a = c$.

Nel primo caso, poichè $x \in a * b$, si ha $0 \neq b \in a * a$; e similmente $b \in c * c$; così per 2.15 $a = c = x = y$. A questo punto è facile verificare direttamente la associatività.

Nel secondo caso, se $\alpha = \gamma$, tutto è chiaro; se $\alpha \neq \gamma$, è facile ottenere, da $x = y$, $b = 0$: una contraddizione. Siamo quindi ridotti a esaminare il caso: $\psi(\xi, \gamma) = \psi(\alpha, \eta)$. È ora facile concludere, applicando ripetutamente GA4 e i risultati precedenti. ///

2.23. LEMMA. Sia $\mathfrak{L}(I)$ il reticolo dei sottogruppi di I , ove I è come in 2.22. Allora $\mathfrak{L}(I) \simeq E/0$.

DIMOSTRAZIONE. Si verifica con facilità che $E/0$ è un reticolo algebrico, i cui elementi compatti sono le unioni di un numero finito di ciclici. Definiamo la mappa

$$\psi: I \rightarrow C, \quad \psi: \alpha \mapsto a.$$

Tenuto conto di GA5 e di 2.8, è facile riconoscere che sono soddisfatte le ipotesi di 1.1. ///

3. Enunciamo e dimostriamo ora un caso particolare del teorema di caratterizzazione cercato:

3.1. TEOREMA. Un reticolo $\mathfrak{L}$ è isomorfo al reticolo dei sottogruppi di un gruppo abeliano libero finitamente generato non ciclico se e solo se $\mathfrak{L}$ soddisfa alle seguenti condizioni:

i) $\mathfrak{L}$ è un GA-reticolo, e $1_{\mathfrak{L}}$ è compatto;

ii) Esistono $E_1, E_2 \in \mathfrak{L}$, $E_1 \wedge E_2 = 0_{\mathfrak{L}}$, $E_1 \vee E_2 = 1$,

$$0 \neq f_1 \leq E_1, \quad 0 \neq f_2 \leq E_2, \quad f_1, f_2 \in C(\mathfrak{L}).$$

DIMOSTRAZIONE. La necessità è banale per 2.13.

Sufficienza. Porremo $C_i = (E_i/0) \cap C(\mathfrak{L})$, $i = 1, 2$. Si osservi che $f_1 \wedge f_2 = 0$, e si scelga, una volta per tutte, $e \in f_1 * f_2$. Certamente $e \neq 0$, altrimenti $f_1 = f_2$. Si ha anche $E_1 \wedge e = E_2 \wedge e = 0$, per 2.2. Siano I_1, I_2 i gruppi costruiti da E_1, E_2 , e come in 2.22, e sia

$\mathfrak{G} = \Gamma_1 \times \Gamma_2$. Sia $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathfrak{G}$, $\alpha_i \in a_i * e$, $a_i \in C_i$. Definiamo una mappa

$$\psi: \mathfrak{G} \rightarrow C(\mathfrak{L})$$

attraverso la posizione

$$\psi(\alpha_1, \alpha_2) = \psi_{e, a_1, a_2}(\alpha_1, \alpha_2);$$

infatti 2.3 ii) e 2.17 ci assicurano che ψ è ben definita. Osserviamo che basterà mostrare:

a) ψ è suriettiva,

$$b) \psi(\alpha_1, \alpha_2) * \psi(\beta_1, \beta_2) = \{\psi(\alpha_1 \beta_2, \alpha_2 \beta_2), \psi(\alpha_1 \beta_1^{-1}, \alpha_2 \beta_2^{-1})\}.$$

Infatti in queste condizioni potremo applicare 2.12, una volta osservato che $\psi(\alpha_1, \alpha_2) = \psi(\alpha_1^{-1}, \alpha_2^{-1})$, e che, per GA4, se $\psi(\alpha_1, \alpha_2) = \psi(\beta_1, \beta_2)$ allora $\alpha_1 = \beta_1^\theta$, $\alpha_2 = \beta_2^\theta$, $\theta = \pm 1$. A questo punto otterremo $\mathfrak{L}(\mathfrak{G}) \simeq \mathfrak{L}$, e per GA1 la sufficienza delle ipotesi i), ii).

Cominciamo a vedere a). Sia $c \in C(\mathfrak{L})$. Se $c \leq E_i$, e se $\gamma \in c * e$, allora $c = \psi(\gamma, e)$. Inoltre, osserviamo che se $a_1 \in C_1$, $a_2 \in C_2$, allora per 2.17, 2.16

$$a_1 * a_2 = \{\psi(\alpha_1, \alpha_2), \psi(\alpha_1, \alpha_2^{-1})\}.$$

Sia allora $c \notin C_1 \cup C_2$. Poichè $\mathfrak{L}$ è modulare e senza torsione, abbiamo $c \wedge E_1 = c \wedge E_2 = 0$. Sia $k_i = (c \vee E_j) \wedge E_i$ ($i, j = 1, 2$, e $i \neq j$), e si osservi che $k_i \in C_i$: per GA1, $c/0 \simeq c \vee E_j / E_j = k_i \vee E_j / E_j \simeq k_i / 0$, dato che $k_i \vee E_j = ((c \vee E_j) \wedge E_i) \vee E_j = (c \vee E_j) \wedge (E_i \vee E_j) = c \vee E_j$. Ancora la modularità e 2.5 i) porgono ora $c \in k_1 * k_2$.

Vediamo ora b). Prima di tutto, osserviamo che

$$\psi(\alpha_1 \cdot \alpha_2, \beta_1 \cdot \beta_2) = \psi(\alpha_1 \cdot \alpha_2^{-1}, \beta_1 \cdot \beta_2^{-1})$$

implica

$$\psi(\alpha_1, \alpha_2) = 0 \quad \text{o} \quad \psi(\beta_1, \beta_2) = 0.$$

In questo caso, è facile verificare direttamente b), e siamo quindi ridotti a mostrare che

$$\psi(\alpha_1 \cdot \beta_1, \alpha_2 \cdot \beta_2) \in \psi(\alpha_1, \alpha_2) * \psi(\beta_1, \beta_2).$$

Sia

$$s_i = \psi(\alpha_i, \beta_i) .$$

Per 2.19 siamo ulteriormente ridotti a mostrare:

- (1) $\psi(\alpha_1, \alpha_2) * \psi(\beta_1, \beta_2) \cap s_1 * s_2 \neq \emptyset$,
- (2) $\psi(\alpha_1, \alpha_2) * \psi(\beta_1, \beta_2) \cap \alpha_1 \cdot \beta_1 * (\alpha_2 \cdot \beta_2)^{-1} \neq \emptyset$,
- (3) $\psi(\alpha_1, \alpha_2) * \psi(\beta_1, \beta_2) \cap (\alpha_1 \cdot \beta_1)^{-1} * \alpha_2 \cdot \beta_2 \neq \emptyset$,

(un semplice controllo permette infatti di escludere le possibilità (2), (3), (4) di 2.19).

Per vedere (1), mostriamo intanto che

$$\psi(\beta_1^{-1}, \alpha_2) \in s_1 * \psi(\alpha_1, \alpha_2) \cap s_2 * \psi(\beta_1, \beta_2) .$$

Per 2.19, ciò discende dalle

$$\begin{aligned} s_1 * \psi(\alpha_1, \alpha_2) \cap b_1 * a_2 &\neq \emptyset , \\ s_1 * \psi(\alpha_1, \alpha_2) \cap \beta_1 * \alpha_2 &\neq \emptyset , \\ s_1 * \psi(\alpha_1, \alpha_2) \cap \beta_1^{-1} * \alpha_2^{-1} &\neq \emptyset , \\ s_2 * \psi(\beta_1, \beta_2) \cap b_1 * a_2 &\neq \emptyset , \\ s_2 * \psi(\beta_1, \beta_2) \cap \beta_1 * \alpha_2 &\neq \emptyset , \\ s_2 * \psi(\beta_1, \beta_2) \cap \beta_1^{-1} * \alpha_2^{-1} &\neq \emptyset , \end{aligned}$$

che sono a loro volta tutte facilmente verificate a partire da 2.14. Ancora 2.14 porge allora

$$\psi(\alpha_1, \alpha_2) * \psi(\beta_1, \beta_2) \cap s_1 * s_2 \neq \emptyset .$$

Vediamo (2); per 2.14 si ha

$$\begin{aligned} \beta_1 * a_2 \cap (\alpha_2 \cdot \beta_2)^{-1} * \psi(\beta_1, \beta_2) &\neq \emptyset , \\ \beta_1 * a_2 \cap \alpha_1 \cdot \beta_1 * \psi(\alpha_1, \alpha_2) &\neq \emptyset , \\ \alpha_2^{-1} * b_1 \cap (\alpha_2 \cdot \beta_2)^{-1} * \psi(\beta_1, \beta_2) &\neq \emptyset , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha_2^{-1} * b_1 \cap \alpha_1 \cdot \beta_1 * \psi(\alpha_1, \alpha_2) & \neq \emptyset, \\
e * \psi(\beta_1^{-1}, \alpha_2) \cap (\alpha_2 \cdot \beta_2)^{-1} * \psi(\beta_1, \beta_2) & \neq \emptyset, \\
e * \psi(\beta_1^{-1}, \alpha_2) \cap \alpha_1 \cdot \beta_1 * \psi(\alpha_1, \alpha_2) & \neq \emptyset, \\
e * \psi(\beta_1^{-1}, \alpha_2) \cap \beta_1 * a_2 & \neq \emptyset, \\
e * \psi(\beta_1^{-1}, \alpha_2) \cap b_1 * \alpha_2^{-1} & \neq \emptyset, \\
\beta_1 * a_2 \cap b_1 * \alpha_2^{-1} & \neq \emptyset.
\end{aligned}$$

Una semplice verifica mostra ora che

$$\alpha_1 \cdot \beta_1 * \psi(\alpha_1, \alpha_2) \cap (\alpha_2 \cdot \beta_2)^{-1} * \psi(\beta_1, \beta_2) \neq \emptyset,$$

e, per 2.14, abbiamo (2).

La stessa argomentazione usata per (2) vale anche per (3), e così la dimostrazione è conclusa. ///

Se supponiamo che il reticolo $\mathfrak{L}$ nel Teorema 3.1 sia dato come reticolo dei sottogruppi di un gruppo G , ha senso chiedersi quali relazioni esistono tra G e $\mathfrak{G}$. A tale quesito risponde il seguente:

3.2. TEOREMA. Sia G un gruppo, e $\mathfrak{L}(G)$ sia un GA-reticolo, soddisfacente alle ipotesi di 3.1, e sia $\mathfrak{G}$ il gruppo costruito in 3.1 a partire da $\mathfrak{L}(G)$. Allora la posizione

$$\Psi: (\langle x_1 e \rangle, \langle x_2 e \rangle) \mapsto x_1 x_2,$$

definisce un isomorfismo di $\mathfrak{G}$ su G .

DIMOSTRAZIONE. G è chiaramente senza torsione, così la Ψ è ben definita. È facile osservare che $\langle \Psi(x) \rangle = \psi(x)$ ove ψ è come in 3.1, così Ψ è suriettiva. Ψ è anche iniettiva, poichè, nelle notazioni di 3.1, $E_1 \wedge E_2 = 0_{\mathfrak{L}} = \{1_G\}$. $\mathfrak{L}(G)$ è modulare: è allora ben noto (si veda ad es. [2]) che G è abeliano: così Ψ è un omomorfismo di gruppi. ///

Si ha ora l'importante

3.3. COROLLARIO (Baer). Sia G un gruppo abeliano libero di rango finito diverso da 1. Sia H un gruppo, e

$$\varphi: \mathfrak{L}(G) \rightarrow \mathfrak{L}(H)$$

un isomorfismo. Allora φ è indotto da un isomorfismo di G su H .

È ben noto ([2]) che in 3.3 si ha che gli isomorfismi che inducono φ sono poi esattamente due.

I lemmi che seguono studiano i GA-reticoli $\mathcal{L}$ in cui $1_{\mathcal{L}}$ è compatto.

3.4. LEMMA. Sia $\mathcal{L}$ un reticolo algebrico modulare i cui elementi compatti sono quelli generati da un numero finito di elementi ciclici, e sia $1_{\mathcal{L}}$ compatto. Allora ogni elemento di $\mathcal{L}$ è compatto.

DIMOSTRAZIONE. Per induzione sul minimo numero n di generatori ciclici di $1_{\mathcal{L}}$. Tutto è chiaro per $n = 1$. Sia allora $1_{\mathcal{L}} = a_1 \vee a_2 \vee \dots \vee a_n$, $A = a_2 \vee \dots \vee a_n$. Per la modularità di $\mathcal{L}$, $1/A$ è distributivo a condizione massimale. Sia

$$C_0 < C_1 < \dots < C_k \dots < C = \vee C_k$$

una catena infinita: per ipotesi induttiva, si può supporre $C_0 \not\leq A$. Esiste allora m tale che $A \vee C_m = A \vee C$. $C_k \wedge A$ ($k \geq m$) è allora una catena infinita contenuta in A , assurdo. ///

3.5. COROLLARIO. Se $\mathcal{L}$ è un GA-reticolo, e $1_{\mathcal{L}}$ è compatto, $C(\mathcal{L})$ soddisfa la condizione massimale.

Così nelle ipotesi di 3.5 ha senso parlare di elementi ciclici massimali, ed ogni elemento ciclico è contenuto in uno di essi.

3.6. LEMMA. Sia $\mathcal{L}$ un GA-reticolo, $A \in \mathcal{L}$, $A \notin C(\mathcal{L})$, A compatto. Allora $A/0$ è un GA-reticolo.

DIMOSTRAZIONE. $A/0$ è modulare, senza torsione, completo. Se un suo elemento è unione di un numero finito di elementi ciclici, esso è compatto in $A/0$ in quanto compatto in $\mathcal{L}$. Tutti gli elementi di $A/0$ sono unioni di elementi ciclici, pertanto un compatto deve essere unione di un numero finito di essi. 2.5 i) e 2.9 ii) assicurano poi GA3. Il resto è chiaro. ///

Si osservi che in 3.6 l'ipotesi « A compatto, $A \notin C(\mathcal{L})$ » può essere sostituita con l'ipotesi più debole « esistono $a, b \in C(\mathcal{L})$, $a, b \leq A$, $a \wedge b = 0$ ». D'ora in poi supporremo $\mathcal{L} \neq \{0\}$.

3.7. DEFINIZIONE. Siano $a_1, \dots, a_k \in C(\mathcal{L})$, dove $\mathcal{L}$ è un GA-reticolo con $1_{\mathcal{L}}$ compatto. Diremo che $\{a_1, \dots, a_k\}$ è un sistema di generatori ciclici di $\mathcal{L}$ se $a_1 \vee \dots \vee a_k = 1_{\mathcal{L}}$. Denoteremo con $r(\mathcal{L})$ il minimo tra le cardinalità dei sistemi di generatori ciclici di $\mathcal{L}$.

3.8. TEOREMA. Sia $\mathcal{L}$ un GA-reticolo, $1_{\mathcal{L}}$ compatto, c un elemento ciclico massimale in $\mathcal{L}$. Allora esistono $a_2, \dots, a_r(\mathcal{L}) \in \mathcal{C}(\mathcal{L})$, tali che $\{c, a_2, \dots, a_r(\mathcal{L})\}$ è un sistema di generatori ciclici di $\mathcal{L}$.

DIMOSTRAZIONE. Se $r(\mathcal{L}) = 2$, le ipotesi di 3.1 sono soddisfatte: e in un gruppo abeliano libero di rango 2 i sottogruppi ciclici massimali sono complementati. Per 3.4, 3.6, si può ora arguire per induzione su $r(\mathcal{L}) = r$. Sia $\{b_1, \dots, b_r\}$ un sistema di generatori ciclici massimali di $\mathcal{L}$. Se $c = b_1$, non c'è nessun problema. Se $c \wedge (b_2 \vee \dots \vee b_r) \neq 0$ l'ipotesi induttiva permette di concludere facilmente. Sia allora $c \wedge (b_2 \vee \dots \vee b_r) = 0$. Consideriamo $c_1 = (b_1 \vee c) \wedge (b_2 \vee \dots \vee b_r)$; c_1 è ciclico: $c_1/0 \simeq c_1/c \wedge c_1 \simeq c \vee c_1/c \leq b_1 \vee c/c \simeq b_1/0$, per la modularità di $\mathcal{L}$, GA2, e la massimalità di b_1 e c . Sia $c_2 \geq c_1$, c_2 ciclico massimale in $b_2 \vee \dots \vee b_r$; per ipotesi induttiva, esiste un sistema di generatori ciclici di $b_2 \vee \dots \vee b_r$ che contiene c_2 ; e sia $\{c_2, a_3, \dots, a_r\}$. Ora si osservi che $b_1 \vee c_2 \vee a_3 \vee \dots \vee a_r = 1_{\mathcal{L}}$, e che $c \leq b_1 \vee c_2$: poichè c è ciclico massimale in $b_1 \vee c_2$, esso è complementato in $b_1 \vee c_2$, poichè $b_1 \vee c_2$ non è ciclico: altrimenti si avrebbe $c \wedge c_2 \neq 0$. Allora, se a_2 è il complemento di c in $b_1 \vee c_2$, $\{c, a_2, \dots, a_r\}$ è un sistema di generatori ciclici per $\mathcal{L}$. ///

3.9. COROLLARIO. Sia $\mathcal{L}$ un GA-reticolo, $1_{\mathcal{L}}$ compatto, $A = \{a_1, \dots, a_r(\mathcal{L})\}$ un sistema di generatori ciclici massimali di $\mathcal{L}$. Allora si ha $a_1 \wedge (a_2 \vee \dots \vee a_r(\mathcal{L})) = 0$.

DIMOSTRAZIONE. Il caso $r(\mathcal{L}) = 2$ è una conseguenza immediata di GA2. Negli altri casi, basta osservare che $a_1 \wedge (a_2 \vee \dots \vee a_r(\mathcal{L}))$ è ciclico massimale in $a_2 \vee \dots \vee a_r(\mathcal{L})$, se è diverso da 0. ///

Si ha quindi, per 3.8, 3.9, che l'ipotesi ii) in 3.1 è sovrabbondante:

3.10. COROLLARIO. Sia $\mathcal{L}$ un GA-reticolo. Allora $\mathcal{L}$ è isomorfo al reticolo dei sottogruppi di un gruppo abeliano libero finitamente generato non ciclico se e solo se $1_{\mathcal{L}}$ è compatto.

Siamo finalmente in grado di dimostrare il teorema generale di caratterizzazione:

3.11. TEOREMA. Il reticolo $\mathcal{L}$ è isomorfo al reticolo dei sottogruppi di un gruppo abeliano senza torsione di rango diverso da 1 se e solo se $\mathcal{L}$ è un GA-reticolo.

DIMOSTRAZIONE. Basta ormai vedere la sufficienza. Sia $K(\mathcal{L})$ l'insieme degli elementi compatti non ciclici di $\mathcal{L}$. $K(\mathcal{L})$ non è vuoto perchè $\mathcal{L}$ contiene almeno due elementi a e b ciclici, $a \neq 0 \neq b$, tali che $a \wedge b = 0$. Per ogni $K \in K(\mathcal{L})$, 3.1 permette di costruire un gruppo

abeliano senza torsione avente reticolo dei sottogruppi isomorfo a $K/0$; sia esso $\mathcal{G}_K$. Sia ora $K_0 \in K(\mathcal{L})$, e sia

$$K_0(\mathcal{L}) = \{K \in K(\mathcal{L}) / K \geq K_0\}.$$

Per ogni $H \in K_0(\mathcal{L})$, l'inclusione $K_0/0 \hookrightarrow H/0$ è indotta, per 3.3, da esattamente due monomorfismi di $\mathcal{G}_{K_0}$ in $\mathcal{G}_H$: se ne scelga uno una volta per tutte, e sia i^H . Dato poi $K \in K_0(\mathcal{L})$, e $H \leq K$, sia $i_H^K: \mathcal{G}_H \rightarrow \mathcal{G}_K$ l'unico monomorfismo indotto dall'inclusione di H in K tale che

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G}_H & \xrightarrow{i_H^K} & \mathcal{G}_K \\ i_H \swarrow & & \nearrow i_K \\ & \mathcal{G}_{K_0} & \end{array}$$

è commutativo. È ora chiaro che $\{\mathcal{G}_H, i_H^K\}$ è una famiglia diretta, e sia $\mathcal{G} = \varinjlim_{K_0(\mathcal{L})} \mathcal{G}_H = \bigoplus \mathcal{G}_H / R$, dove R è generato dagli elementi di $\bigoplus \mathcal{G}_H$ della forma $a_H - i_H^K a_H$ ($H \leq K$, $a_H \in \mathcal{G}_H$). Dalla teoria elementare dei limiti discende che per ogni $x \in \mathcal{G}$, esiste $H \in K_0(\mathcal{L})$ tale che $x = a_H + R$, con $a_H \in \mathcal{G}_H$. Definiamo

$$\Psi: \mathcal{G} \rightarrow C(\mathcal{L}), \quad \Psi: x \mapsto \psi_H(a_H)$$

dove $\psi_H: \mathcal{G}_H \rightarrow C(H/0)$ è la mappa definita nel Teorema 3.1. È ora immediato verificare che Ψ è una mappa suriettiva che soddisfa le ipotesi di 2.12, e la dimostrazione è completa. ///

BIBLIOGRAFIA

- [1] KAI FALTINGS, *Modulare Verbände mit Punktsystem*, Geom. Ded., **4** (1975), pp. 105-137.
- [2] M. SUZUKI, *Structure of a Group and the Structure of its Lattice of Subgroups*, Springer Verlag, Berlin 1956.
- [3] B. V. YACOVLEV, *Conditions under which a lattice is isomorphic to a lattice of subgroups of a group*, Algebra i Logika, Vol. 13, n. 6 (1974), pp. 694-712.

Manoscritto pervenuto in redazione il 28 novembre 1980.