

RENDICONTI  
*del*  
SEMINARIO MATEMATICO  
*della*  
UNIVERSITÀ DI PADOVA

CARMELA VITANZA

**Sul problema di Cauchy-Neumann per le  
equazioni paraboliche singolari a coefficienti  
discontinue in due variabili**

*Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,*  
tome 65 (1981), p. 191-204

[http://www.numdam.org/item?id=RSMUP\\_1981\\_\\_65\\_\\_191\\_0](http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1981__65__191_0)

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1981, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

**Sul problema di Cauchy-Neumann  
per le equazioni paraboliche singolari  
a coefficienti discontinue in due variabili.**

CARMELA VITANZA (\*)

SUMMARY - In this paper we show that the problem (0.1)-(0.3) admits a unique solution in a suitable weighted Sobolev class.

Detto  $Q$  il rettangolo  $]0, R[ \times ]0, T[$  ( $R, T > 0$ ), in questa nota studiamo, in un opportuno spazio di Sobolev con peso, il problema:

$$(0.1) \quad a(x, t) \left( u_{xx} + \frac{2\nu}{x} u_x \right) + \frac{H(x, t)}{x} u_x + b(x, t) u_x + \\ + c(x, t) u - u_t = f(x, t) \quad q.o. \text{ in } Q,$$

$$(0.2) \quad u(x, t) = 0, \quad x \in ]0, R[,$$

$$(0.3) \quad u_x(R, t) = 0. \quad t \in ]0, T[.$$

L'equazione (0.1), quando  $2\nu$  è intero positivo, si ricava dallo studio delle soluzioni a simmetria assiale di equazione paraboliche (cfr. [2]), mentre per altri valori di  $\nu$ , si incontra nello studio dei moti browniani e dei processi stocastici.

In [1] A. Maugeri ha studiato, per tale equazione, il problema di

(\*) Indirizzo dell'A.: Istituto Matematico, Università, Via Cesare Battisti 90, 98100 Messina.

Cauchy-Dirichlet; nel nostro caso affrontiamo, per l'interesse che esso ha nelle applicazioni (cfr. [5], p. 285), il problema di Cauchy-Neumann, dimostrando che esso ammette una ed una sola soluzione a condizione che  $2\nu$  sia un numero reale maggiore di  $-1$  e che esistano un numero reale  $\lambda \geq 1$  e un numero reale  $\sigma \in ]0, 1]$  tali che  $(1)$

A)  $a(x, t)$  e  $H(x, t) \in L^\infty(Q)$  e

$$\frac{1}{\lambda} \leq a(x, t) \leq \lambda, \quad |H|_\infty < \frac{1 + 2\nu}{\lambda},$$

B)  $b(x, t) \in L^{2(1-\sigma), 2\sigma}(Q)$ ,  $c(x, t) \in L^{\infty, 2}(Q)$ ,  $f(x, t) \in L^2_\nu(Q)$  e

$$|b|_1 \leq \lambda, \quad |c|_{\infty, 2} \leq \lambda \quad (2).$$

Denotiamo con  $H^{2,1}_\nu(Q)$  la classe delle funzioni  $u(x, t)$  misurabili in  $Q$  e tali che  $u$ ,  $u_{xx} + (2\nu/x)u_x$  e  $u_x/x$  appartengano a  $L^2_\nu(Q)$ , normalizzato ponendo:

$$(0.4) \quad \|u\|_\nu = \left( |u|_{2,\nu}^2 + \left| \frac{u_x}{x} \right|_{2,\nu}^2 + \left| u_{xx} + \frac{2\nu}{x} u_x \right|_{2,\nu}^2 + |u_t|_{2,\nu}^2 \right)^{\frac{1}{2}};$$

cercheremo la soluzione del problema (0.1)-(0.3) nella classe  $H^{2,1}_\nu(Q)$

(1) In quel che segue con il simbolo  $L^{p,q}_\nu(Q)$  ( $1 \leq p, q < \infty$ ) denoteremo lo spazio delle funzioni misurabili in  $Q$  per le quali risulta finita la quantità:

$$|g|_{p,q,\nu} = \left( \int_0^T \left( \int_0^R x^{\nu p} |g(x, t)|^p dx \right)^{q/p} dt \right)^{1/q}.$$

Scriveremo, per semplicità  $L^{p,q}_0(Q) = L^{p,q}(Q)$ ,  $L^{p,p}_\nu(Q) = L^p_\nu(Q)$ ,  $L^{p,p}_0(Q) = L^p(Q)$  e  $|g|_{p,q,0} = |g|_{p,q}$ ,  $|g|_{p,p,\nu} = |g|_{p,\nu}$  e  $|g|_{p,p,0} = |g|_p$ .

Ovvie modifiche occorrono se  $p$  o  $q$  oppure entrambi sono infiniti.

(2) Come è noto (cfr. [3], p. 327) esiste una funzione  $h_\sigma(\delta)$  definita per  $\delta \geq 0$ , non decrescente, infinitesima per  $\delta$  tendente a zero, tale che:

$$\left( \int_0^T \left( \int_{E(t)} |b(x, t)|^{2/(1-\sigma)} dx \right)^{(1-\sigma)/\sigma} dt \right)^{\delta/2} \leq h_\sigma(\delta)$$

qualunque sia il sottoinsieme misurabile  $E$  di  $Q$  tale che  $\text{mis } E \leq \delta$ ,  $E(t)$  essendo la sezione di  $E$  di piede  $t$ .

formata dalla chiusura in  $H_{\nu,1}^{2,1}(Q)$  della varietà:

$$Y = \{u \in C^2(Q) \cap H_{\nu,1}^{2,1} \mid u(x, 0) = 0, u_x(R, t) = 0\}.$$

In  $H_{\nu,1}^{2,1}(Q)$  la norma (0.4) e la norma:

$$(0.5) \quad \|u\|_{\nu,1} = \left( \left| \frac{u_x}{x} \right|_{2,\nu}^2 + \left| u_{xx} + \frac{2\nu}{x} u_x \right|_{2,\nu}^2 + |u_t|_{2,\nu}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

sono equivalenti.

### 1. Proprietà dello spazio $H_{\nu,1}^{2,1}(Q)$ .

Valgono i seguenti risultati:

**LEMMA 1.1.** Per ogni funzione  $u(x, t) \in H_{\nu,1}^{2,1}(Q)$  risulta:

$$(1.1) \quad |u_x|_{2,\infty,\nu} \leq \left( \left| u_{xx} + \frac{2\nu}{x} u_x \right|_{2,\nu}^2 + |u_t|_{2,\nu}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

**DIMOSTRAZIONE.** Possiamo supporre  $u \in Y$ . Dalla identità:

$$\frac{\partial}{\partial x} (x^{2\nu} u_x u_t) = u_t x^{2\nu} \left( u_{xx} + \frac{2\nu}{x} u_x \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (x^{2\nu} u_x^2)$$

e dalle condizioni  $u(x, 0) = 0$ ,  $u_x(R, t) = 0$ , tenendo presente [2], pp. 7-8, segue:

$$\int_0^R \int_0^t u_t x^{2\nu} \left( u_{xx} + \frac{2\nu}{x} u_x \right) dx d\tau = -\frac{1}{2} \int_0^R x^{2\nu} u_x^2(x, t) dx$$

e, quindi, la tesi.

**LEMMA 1.2.** Per ogni  $u \in H_{\nu,1}^{2,1}(Q)$  risulta:

$$(1.2) \quad |u_x|_{\infty,2,\nu} \leq k_0 \left| u_{xx} + \frac{2\nu}{x} u_x \right|_{2,\nu}$$

dove  $k_0 = (R/(1 + 2\nu))^{\frac{1}{2}}$ .

DIMOSTRAZIONE. Dalla identità

$$\frac{\partial}{\partial x} (x^{2\nu} u_x) = x^{2\nu} \left( u_{xx} + \frac{2\nu}{x} u_x \right)$$

e dal fatto che  $u_x/x \in L^2_\nu(Q)$  segue che:

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^{2\nu} u_x(x, 0) = 0$$

e

$$x^{2\nu} u_x(x, t) = \int_0^x \xi^{2\nu} \left( u_{xx} + \frac{2\nu}{\xi} u_x \right) d\xi \leq \left( \frac{x^{2\nu+1}}{2\nu+1} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_0^R x^{2\nu} \left( u_{xx} + \frac{2\nu}{x} u_x \right)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

e, quindi, la tesi.

LEMMA 1.3. Per ogni  $u \in H^{2,1}_{\nu,1}(Q)$ , detto  $\sigma$  un qualunque numero dell'intervallo  $[0, 1]$ , si ha

$$(1.3) \quad |u_x|_{2/\sigma, 2/(1-\sigma), \nu} \leq k_1 \left( \left| u_{xx} + \frac{2\nu}{x} u_x \right|_{2, \nu}^2 + |u_t|_{2, \nu}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

dove  $k_1 = 1 + k_0$ .

DIMOSTRAZIONE. Dai Lemmi 1.1 e 1.2 si deduce che  $u_x \in L^{2/\sigma, 2/(1-\sigma)}_\nu(Q)$  e che

$$|u_x|_{2/\sigma, 2/(1-\sigma), \nu} \leq |u_x|_{2, \infty, \nu} + |u_x|_{\infty, 2, \nu}.$$

Dalle (1.1) e (1.2) segue poi la tesi.

LEMMA 1.4. Per ogni  $u \in H^{2,1}_{\nu,1}(Q)$  e qualunque sia il numero positivo  $\varepsilon$  risulta:

$$(1.4) \quad |u_x|_{2, \nu}^2 \leq \varepsilon \left| u_{xx} + \frac{2\nu}{x} u_x \right|_{2, \nu}^2 + \gamma(\varepsilon) |u|_{2, \nu}^2$$

dove  $\gamma(\varepsilon)$  è una costante dipendente solo da  $\varepsilon$ .

DIMOSTRAZIONE. Risulta (cfr. [2], pp. 7-8)

$$\int_0^T \int_0^R x^{2\nu} u_x^2 dx = \int_0^T \int_0^R x^{2\nu} u_x u_{xx} dx = - \int_0^T \int_0^R x^{2\nu} u \left( u_{xx} + \frac{2\nu}{x} u_x \right) dx$$

e quindi la tesi.

LEMMA 1.5. Per ogni  $u \in H_{v,1}^{2,1}(Q)$  e qualunque sia il numero positivo  $\varepsilon$  risulta:

$$(1.5) \quad |u|_{2,\infty,r} \leq \varepsilon |u_t|_{2,v} + \gamma(\varepsilon) |u|_{2,v}.$$

DIMOSTRAZIONE. Dalla identità:

$$u^2(x, t) = \frac{1}{2} \int_0^t u(x, \tau) u_\tau(x, \tau) d\tau$$

segue facilmente la tesi.

## 2. Risultati preliminari.

Proviamo il seguente:

TEOREMA 2.1 Per ogni  $f \in L_v^2(Q)$  esiste una e una sola soluzione appartenente ad  $H_{v,1}^{2,1}(Q)$  dell'equazione:

$$(2.1) \quad u_{xx} + \frac{2v}{x} u_x - u_t = f$$

ed essa è rappresentata dalla serie:

$$(2.2) \quad u(x, t) = -x^{\frac{1}{2}-v} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2J_{v-\frac{1}{2}}(j_n x)}{R^2 J_{v-\frac{1}{2}}^2(j_n R)} \int_0^t \exp[-j_n^2(t-\tau)] \cdot \left( \int_0^R \xi^{v+\frac{1}{2}} f(\xi, \tau) J_{v-\frac{1}{2}}(j_n \xi) d\xi \right) d\tau$$

dove  $J_{v-\frac{1}{2}}(x)$  è la funzione di Bessel di prima specie di ordine  $v - \frac{1}{2}$  e  $j_n$ ,  $n \in N$ , sono le radici dell'equazione:

$$\lambda R J'_{v-\frac{1}{2}}(\lambda R) + \left(\frac{1}{2} - v\right) J_{v-\frac{1}{2}}(\lambda R) = 0.$$

Inoltre si ha:

$$(2.3) \quad \left| u_{xx} + \frac{2\nu}{x} u_x \right|_{2,\nu}^2 + |u_t|_{2,\nu}^2 + |u_x|_{2,\infty,\nu}^2 \leq |f|_{2,\nu}^2,$$

$$(2.4) \quad \left| \frac{u_x}{x} \right|_{2,\nu}^2 \leq \frac{4}{(1+2\nu)^2} |f|_{2,\nu}^2.$$

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo per semplicità,  $\mathbb{R} = 1$ , e scriviamo la (2.2) nella forma:

$$(2.5) \quad u(x, t) = -x^{-\nu} \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(x) \int_0^t \exp[-j_n^2(t-\tau)] \cdot \left( \int_0^1 \xi^\nu f(\xi, \tau) \psi_n(\xi) d\xi \right) d\tau$$

dove si è posto:

$$\psi_n(x) = \frac{\sqrt{2x} J_{\nu-\frac{1}{2}}(j_n x)}{J_{\nu-\frac{1}{2}}(j_n)} \quad (3).$$

Cominciamo col provare che  $u(x, t) \in L_\nu^2(Q)$ . Si ha, per ogni  $n$ ,  $p \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} & \left| -\sum_{k=1}^p x^{-\nu} \psi_{n+k}(x) \int_0^t \exp[-j_{n+k}^2(t-\tau)] \left( \int_0^1 \xi^\nu f(\xi, \tau) \psi_{n+k}(\xi) d\xi \right) d\tau \right|_{2,\nu}^2 = \\ & = \sum_{k=1}^p \int_0^T \left( \int_0^t \exp[-j_{n+k}^2(t-\tau)] \left( \int_0^1 \xi^\nu f(\xi, \tau) \psi_{n+k}(\xi) d\xi \right) d\tau \right)^2 dt \leq \\ & \leq \sum_{k=1}^p \int_0^T \left( \int_0^1 \xi^\nu f(\xi, \tau) \psi_{n+k}(\xi) d\xi \right)^2 d\tau \end{aligned}$$

(3) Ricordiamo che (cfr. [4] e [5])

$$\int_0^1 \psi_n(x) \psi_m(x) dx = \delta_{n,m} \quad \text{e} \quad \int_0^1 x^{2\nu} f^2(x, t) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \int_0^1 x^\nu f(x, t) \psi_n(x) dx \right)^2.$$

Ne segue

$$\int_0^T \int_0^1 x^{2\nu} f^2(x, t) dx dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^T \left( \int_0^1 x^\nu f(x, t) \psi_n(x) dx \right)^2 dt.$$

e, quindi,  $u(x, t)$  denota una effettiva funzione di  $L_v^2(Q)$ .

Tenendo presente che

$$\frac{d}{dx} (x^{-\nu+\frac{1}{2}} J_{\nu-\frac{1}{2}}(j_n x)) = -j_n x^{\nu-\frac{1}{2}} J_{\nu+\frac{1}{2}}(j_n x)$$

otteniamo, derivando termine a termine la serie (2.5), la serie

$$(2.6) \quad \sum_{n=1}^{\infty} x^{-\nu} j_n \chi_n(x) \int_0^t \exp[-j_n^2(t-\tau)] \left( \int_0^1 \xi^\nu f(\xi, \tau) \psi_n(\xi) d\xi \right) d\tau,$$

dove:

$$\chi_n(x) = \frac{\sqrt{2x} J_{\nu+\frac{1}{2}}(x)}{J_{\nu-\frac{1}{2}}(j_n)} \quad \text{e} \quad \int_0^1 \chi_n(x) \chi_m(x) dx = \delta_{n,m}.$$

Proviamo che la serie (2.6) converge in  $L_v^2(Q)$ . Si ha per ogni  $n$ ,  $p \in N$

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{k=1}^p x^{-\nu} \chi_{n+k}(x) j_{n+k} \int_0^t \exp[-j_{n+k}^2(t-\tau)] \left( \int_0^1 \xi^\nu f(\xi, \tau) \psi_{n+k}(\xi) d\xi \right) d\tau \right|_{2,\nu}^2 = \\ & = \sum_{k=1}^p j_{n+k}^2 \int_0^T \left( \int_0^t \exp[-j_{n+k}^2(t-\tau)] \left( \int_0^1 \xi^\nu f(\xi, \tau) \psi_{n+k}(\xi) d\xi \right) d\tau \right)^2 dt. \end{aligned}$$

Ora, procedendo come in [1], Teorema 1.1, si ricava

$$\begin{aligned} & \int_0^T \left( \int_0^t \exp[-j_{n+k}^2(t-\tau)] \left( \int_0^1 \xi^\nu f(\xi, \tau) \psi_{n+k}(\xi) d\xi \right) d\tau \right)^2 dt \leq \\ & \leq \frac{1}{j_{n+k}^4} \int_0^T \left( \int_0^1 \xi^\nu f(\xi, \tau) \psi_{n+k}(\xi) d\xi \right)^2 dt \end{aligned}$$

e, quindi, si ha:

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{k=1}^p x^{-\nu} \chi_{n+k}(x) j_{n+k} \int_0^t \exp[-j_{n+k}^2(t-\tau)] \left( \int_0^1 \xi^\nu f(\xi, \tau) \psi_{n+k}(\xi) d\tau \right) d\tau \right|_{2,\nu}^2 \leq \\ & \leq \frac{1}{j_{n+k}^2} \int_0^T \left( \int_0^1 \xi^\nu f(\xi, t) \psi_{n+k}(\xi) d\xi \right)^2 dt. \end{aligned}$$

Pertanto la serie (2.6) converge in  $L^2(Q)$  e, con gli stessi procedimenti di [1], p. 6, si verifica che essa converge anche in  $L^2_\nu(0, 1)$  per ogni  $t \in [0, T]$ . Da ciò segue che la serie (2.5) converge uniformemente a  $u(x, t)$  in ogni rettangolo  $[\bar{x}, 1] \times [0, T]$  con  $0 < \bar{x} < 1$ .

Seguendo sempre [1], si verifica che la serie ottenuta derivando termine a termine la (2.5) rispetto a  $t$

$$(2.7) \quad - \sum_{n=1}^{\infty} x^{-\nu} \psi_n(x) \int_0^1 \xi^\nu f(\xi, t) \psi_n(\xi) d\xi + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} x^{-\nu} j_n^2 \psi_n(x) \int_0^t \exp[-j_n^2(t-\tau)] \left( \int_0^1 \xi^\nu f(\xi, \tau) \psi_n(\xi) d\xi \right) d\tau$$

converge in  $L^2_\nu(Q)$  e, detta  $w(x, t)$  la sua somma, si ha:

$$(2.8) \quad w(x, t) = u_t(x, t).$$

Consideriamo, ora, la funzione  $x^{2\nu} u_x(x, t)$  ed osserviamo che, nel senso di  $L^1(Q)$ , vale l'uguaglianza:

$$(2.9) \quad x^{2\nu} u_x(x, t) = x^\nu \sum_{n=1}^{\infty} j_n \chi_n(x) \int_0^t \exp[-j_n^2(t-\tau)] \cdot \\ \cdot \left( \int_0^1 \xi^\nu f(\xi, \tau) \psi_n(\xi) d\xi \right) d\tau.$$

Tenendo presente che:

$$\frac{d}{dx} (x^{\nu+\frac{1}{2}} J_{\nu+\frac{1}{2}}(j_n x)) = j_n x^{\nu+\frac{1}{2}} J_{\nu-\frac{1}{2}}(j_n x)$$

derivando termine a termine la serie (2.9) si ottiene la serie

$$x^\nu \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(x) j_n^2 \int_0^t \exp[-j_n^2(t-\tau)] \left( \int_0^1 \xi^\nu f(\xi, \tau) \psi_n(\xi) d\xi \right) d\tau$$

che ha per somma in  $L^1(Q)$  la funzione  $x^{2\nu}u_i(x, t) + x^{2\nu}f(x, t)$ . Avendosi nel senso della convergenza in  $L^1(0, T)$ :

$$\begin{aligned} \int_0^z x^{2\nu}(u_i + f) dx &= \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^z x^\nu \psi_n(x) j_n^2 dx \int_0^t \exp[-j_n^2(t-\tau)] \left( \int_0^1 \xi^\nu f(\xi, \tau) \psi_n(\xi) d\xi \right) d\tau = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} z^\nu j_n \chi_n(z) \int_0^t \exp[-j_n^2(t-\tau)] \left( \int_0^1 \xi^\nu f(\xi, \tau) \psi_n(\xi) d\xi \right) d\tau \end{aligned}$$

e valendo la (2.9) si ha:

$$(2.10) \quad \int_0^z x^{2\nu}(u_i + f) dx = z^{2\nu}u_n(z, t).$$

Inoltre, essendo verificata l'uguaglianza

$$-\lambda J_{\nu+\frac{1}{2}}(\lambda) = \lambda J'_{\nu-\frac{1}{2}}(\lambda) + \left(\frac{1}{2} - \nu\right) J_{\nu-\frac{1}{2}}(\lambda)$$

le radici di  $J_{\nu+\frac{1}{2}}(\lambda) = 0$  coincidono con le radici di:

$$\lambda J'_{\nu-\frac{1}{2}}(\lambda) + \left(\frac{1}{2} - \nu\right) J_{\nu-\frac{1}{2}}(\lambda) = 0$$

e risulta:

$$\chi_n(1) = 0.$$

Ne segue, allora,

$$u_x(1, t) = 0, \quad u_{xx} + \frac{2\nu}{x} u_x = u_i + f.$$

Dalla (2.10) e dalla disuguaglianza di Hardy si ricava poi

$$(2.11) \quad \int_Q x^{2\nu} \frac{u_x^2}{x^2} dx dt = \int_0^T dt \int_0^1 x^{2\nu} \left( \frac{1}{x} \int_0^x \xi^{2\nu} \left( u_{xx} + \frac{2\nu}{\xi} u_x \right) d\xi \right)^2 dx \leq \\ \leq \frac{4}{(1+2\nu)^2} \int_Q x^{2\nu} \left( u_{xx} + \frac{2\nu}{x} u_x \right)^2 dx dt.$$

Dalla (2.11) e dalla uguaglianza

$$\int_Q x^{2\nu} \left[ \left( u_{xx} + \frac{2\nu}{x} u_x \right)^2 + u_t^2 \right] dx dt + \int_0^1 x^{2\nu} u_x^2(x, T) dx = \\ = \int_Q x^{2\nu} \left[ \left( u_{xx} + \frac{2\nu}{x} u_x \right) - u_t \right]^2 dx dt$$

seguono poi le (2.3) e (2.4).

### 3. Maggiorazioni a priori.

Posto:

$$\mathfrak{L}^* u = a(x, t) \left( u_{xx} + \frac{2\nu}{x} u_x \right) + \frac{H(x, t)}{x} u_x - u_t$$

e

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{L}^* u + b(x, t) u_x + c(x, t) u$$

valgono i seguenti risultati:

LEMMA 3.1. *Se valgono le ipotesi A), per ogni  $u \in H_{\nu,1}^{2,1}(Q)$  risulta*

$$(3.1) \quad \left( \left| u_{xx} + \frac{2\nu}{x} u_x \right|_{2,\nu}^2 + |u_t|_{2,\nu}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq c_0 |\mathfrak{L}^* u|_{2,\nu},$$

$$(3.2) \quad \left| \frac{u_x}{x} \right|_{2,\nu} \leq \frac{2c_0}{1+2\nu} |\mathfrak{L}^* u|_{2,\nu},$$

dove  $c_0 = (1/\lambda - |H|_\infty(2/(1+2\nu)))^{-1}$ .

Per la dimostrazione basta tenere presenti i Teoremi 3.1 e 3.2 di [2].

LEMMA 3.2. *Se valgono le ipotesi A) e B), per ogni  $u \in H_{\nu,1}^{2,1}(Q)$  risulta:*

$$(3.3) \quad \|u\|_{\nu,1} \leq K_6 |\mathfrak{L} u|_{2,\nu}$$

dove  $K_6$  è una costante dipendente da  $R, T, \lambda, |H|_\infty, \nu, h_\sigma(\delta)$  e non decrescente al crescere di  $T$ .

**DIMOSTRAZIONE.** Dalla (3.1) si ricava:

$$\left| u_{xx} + \frac{2\nu}{x} u_x \right|_{2,\nu}^2 + |u_t|_{2,\nu}^2 \leq c_0^2 |\mathfrak{L}u - bu_x - cu|_{2,\nu}^2 \leq \leq 3c_0^2 (|\mathfrak{L}u|_{2,\nu}^2 + |bu_x|_{2,\nu}^2 + |cu|_{2,\nu}^2).$$

Per il Lemma 1.5 si ottiene:

$$|cu|_{2,\nu}^2 \leq |u|_{2,\infty,\nu}^2 |c|_{\infty,2}^2 \leq \varepsilon^2 |c|_{\infty,2}^2 |u_t|_{2,\nu}^2 + \gamma^2(\varepsilon) |c|_{\infty,2}^2 |u|_{2,\nu}^2$$

e quindi:

$$\left| u_{xx} + \frac{2\nu}{x} u_x \right|_{2,\nu}^2 + |u_t|_{2,\nu}^2 \leq K_2 (|\mathfrak{L}u|_{2,\nu}^2 + |bu_x|_{2,\nu}^2 + |u|_{2,\nu}^2)$$

essendo  $K_2$  una costante dipendente da  $R, \nu, |H|_\infty, \lambda$ .

Diciamo, ora,  $l$  un qualunque numero reale positivo e denotiamo con  $Q_l$  l'insieme dei punti di  $Q$  in cui  $|b| > l$  e con  $\varrho_l$  la funzione caratteristica di  $Q_l$ ; si ha:

$$(3.4) \quad \int_{Q_l} b^2 x^{2\nu} u_x^2 dx dt = \int_Q b^2 x^{2\nu} \varrho_l^2 u_x^2 dx dt \leq |b\varrho_l|_{2/(1-\sigma),2/\sigma}^2 |u_x|_{2/\sigma,2/(1-\sigma),\nu}^2$$

e, quindi, utilizzando il Lemma 1.3 e la (3.4):

$$|bu_x|_{2,\nu}^2 \leq l^2 |u_x|_{2,\nu}^2 + K_1^2 h_\sigma^2(\text{mis } Q_l) \left( \left| u_{xx} + \frac{2\nu}{x} u_x \right|_{2,\nu}^2 + |u_t|_{2,\nu}^2 \right).$$

Essendo

$$\text{mis } Q_l \leq \frac{1}{l} |b|_1 \leq \frac{\lambda}{l}$$

scegliendo opportunamente  $l$  e utilizzando il Lemma 1.4 si ricava:

$$(3.5) \quad \left| u_{xx} + \frac{2\nu}{x} u_x \right|_{2,\nu}^2 + |u_t|_{2,\nu}^2 \leq K_3 (|u|_{2,\nu}^2 + |\mathfrak{L}u|_{2,\nu}^2),$$

con  $K_3$  costante del solito tipo.

Risultando, come si verifica facilmente,

$$\int_0^R x^{2\nu} u^2(x, \tau) \leq dx T \int_0^R \int_0^T x^{2\nu} u_x^2(x, t) dx dt \quad \text{per ogni } \tau \in [0, T],$$

considerando la maggiorazione (3.5) nel cilindro  $Q_\tau = ]0, R[ \times ]0, \tau[$  invece che nel cilindro  $Q$ , si ottiene

$$(3.6) \quad \int_0^R x^{2\nu} u^2(x, \tau) dx \leq K_4 \left( |\mathfrak{L}u|_{2,\nu}^2 + \int_0^\tau \int_0^R x^{2\nu} u^2(x, t) dx dt \right)$$

con  $K_4$  costante del solito tipo.

Dalla (3.6), utilizzando il lemma di Gronwall, si ricava

$$\int_0^R x^{2\nu} u^2(x, \tau) dx \leq K_5 |\mathfrak{L}u|_{2,\nu}^2$$

e da qui, assieme alla (3.5), segue la tesi.

#### 4. Teorema di esistenza ed unicità.

**TEOREMA 4.1.** *Se valgono le ipotesi A) e B), per ogni  $f \in L_\nu^2(Q)$  esiste una ed una sola funzione  $u \in H_{\nu,1}^{2,1}(Q)$  tale che:*

$$\mathfrak{L}u = f$$

risulta:

$$\|u\|_{\nu,1} \leq K \|f\|_{2,\nu}.$$

**DIMOSTRAZIONE.** Poniamo per ogni  $\tau \in [0, 1]$ :

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}_\tau u &= \tau \mathfrak{L}u + (1 - \tau) \left( u_{xx} + \frac{2\nu}{x} u_x - u_t \right) = \\ &= [\tau a(x, t) + (1 - \tau)] \left( u_{xx} + \frac{2\nu}{x} u_x \right) + \\ &\quad + \tau \frac{H(\tau, t)}{x} u_x + \tau b(\tau, t) u_x + \tau c(\tau, t) u - u_t. \end{aligned}$$

Si ha:

$$\tau a(x, t) + (1 - \tau) \leq \tau \lambda + (1 - \tau) \lambda = \lambda,$$

$$\tau a(x, t) + (1 - \tau) \geq \frac{\tau}{\lambda} + \frac{(1 - \tau)}{\lambda} = \frac{1}{\lambda},$$

$$|\tau H|_{\infty} = \tau |H|_{\infty} \leq |H|_{\infty},$$

$$|\tau b|_{2/(1-\sigma), 2/\sigma} = \tau |b|_{2/(1-\sigma), 2/\sigma} \leq |b|_{2/(1-\sigma), 2/\sigma},$$

$$|\tau c|_{\infty, 2} = \tau |c|_{\infty, 2} \leq |c|_{\infty, 2}$$

e, quindi, in virtù del Lemma 3.2 per ogni  $u \in H_{v,1}^{2,1}(Q)$  e per ogni  $\tau \in [0, 1]$  risulta

$$\|u\|_{v,1} \leq K_6 |\mathfrak{L}_{\tau} u|_{2,v}$$

con una stessa costante  $K_6$  indipendente da  $\tau$ .

Inoltre se  $\tau_1$  e  $\tau_2$  sono due numeri dell'intervallo  $[0, 1]$  e  $u \in H_{v,1}^{2,1}(Q)$ , tenendo presenti le proprietà dello spazio  $H_{v,1}^{2,1}(Q)$ , si ricava facilmente:

$$|\mathfrak{L}_{\tau_1} u - \mathfrak{L}_{\tau_2} u| \leq C |\tau_1 - \tau_2| \|u\|_{v,1}.$$

A norma del Teorema 2.1 risulta  $\mathfrak{L}_0 H_{v,1}^{2,1}(Q) = L_v^2(Q)$  e, quindi, per completare la dimostrazione basterà provare che, se  $\tau_0 \in [0, 1]$  e  $\mathfrak{L}_{\tau_0} H_{v,1}^{2,1}(Q) = L_v^2(Q)$ , si ha anche  $\mathfrak{L}_{\tau} H_{v,1}^{2,1}(Q) = L_v^2(Q)$  per

$$(4.1) \quad \tau \in [0, 1], \quad |\tau - \tau_0| < \frac{1}{K_6 C}.$$

A tale scopo, fissati un valore di  $\tau$  soddisfacente le (4.1) e una funzione  $f(x, t) \in L_v^2(Q)$  basterà provare che esiste  $u \in H_{v,1}^{2,1}(Q)$  tale che  $\mathfrak{L}_{\tau} u = f(x, t)$  cioè tale che

$$(4.2) \quad u = \mathfrak{L}_{\tau_0}^{-1} (\mathfrak{L}_{\tau_0} u - \mathfrak{L}_{\tau} u) + \mathfrak{L}_{\tau_0}^{-1} f.$$

D'altra parte essendo:

$$\|\mathfrak{L}_{\tau_0}^{-1} (\mathfrak{L}_{\tau_0} u - \mathfrak{L}_{\tau} u)\|_{v,1} \leq K_6 |\mathfrak{L}_{\tau_0} u - \mathfrak{L}_{\tau} u|_{2,v} \leq K_6 C |\tau_0 - \tau| \|u\|_{v,1}$$

per il principio delle contrazioni l'equazione funzionale (4.2) ammette una ed una sola soluzione.

## BIBLIOGRAFIA

- [1] A. MAUGERI, *Su una classe di equazioni paraboliche singolari*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, **62** (1980), pp. 267-273.
- [2] A. MAUGERI, *Soluzioni a simmetria assiale di equazioni paraboliche*, Le Matematiche, **26** (1971), pp. 267-273.
- [3] F. NICOLOSI, *Sul problema di Cauchy-Dirichlet per le equazioni paraboliche a coefficienti discontinui in due variabili*, Le Matematiche, **21** (1966), pp. 325-338.
- [4] G. N. WATSON, *Theory of Bessel Functions*, Cambridge Univ. Press, 1958.
- [5] A. H. ZEMANIAN, *Generalized Integral Transformations*, Interscience Publ., 1968.

Manoscritto pervenuto in redazione il 15 novembre 1980 ed in forma revisionata il 12 gennaio 1981.