

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

EDMONDO MORGANTINI

Una curiosa proprietà metrica dei quadrilateri piani completi

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 65 (1981), p. 129-133

http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1981__65__129_0

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1981, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

Una curiosa proprietà metrica dei quadrilateri piani completi.

EDMONDO MORGANTINI (*)

RIASSUNTO - I segmenti aventi come estremi le 3 coppie di vertici opposti di un quadrilatero completo del piano euclideo sono diametri di 3 cerchi appartenenti ad uno stesso fascio ed ortogonali al circolo circoscritto al triangolo diagonale del quadrangolo.

1. Una proprietà triangolare dei cerchi di Apollonio ed altre proprietà metriche che ne conseguono.

Sia dato nel piano euclideo reale (che poi converrà pensare ampliato con l'aggiunta dei punti impropri e di quelli complessi) un triangolo $A_1A_2A_3$.

Preso nel piano un punto P , restano determinati i rapporti delle distanze $\overline{A_iP}$ di P dai vertici A_1, A_2, A_3 . Sussiste allora il seguente:

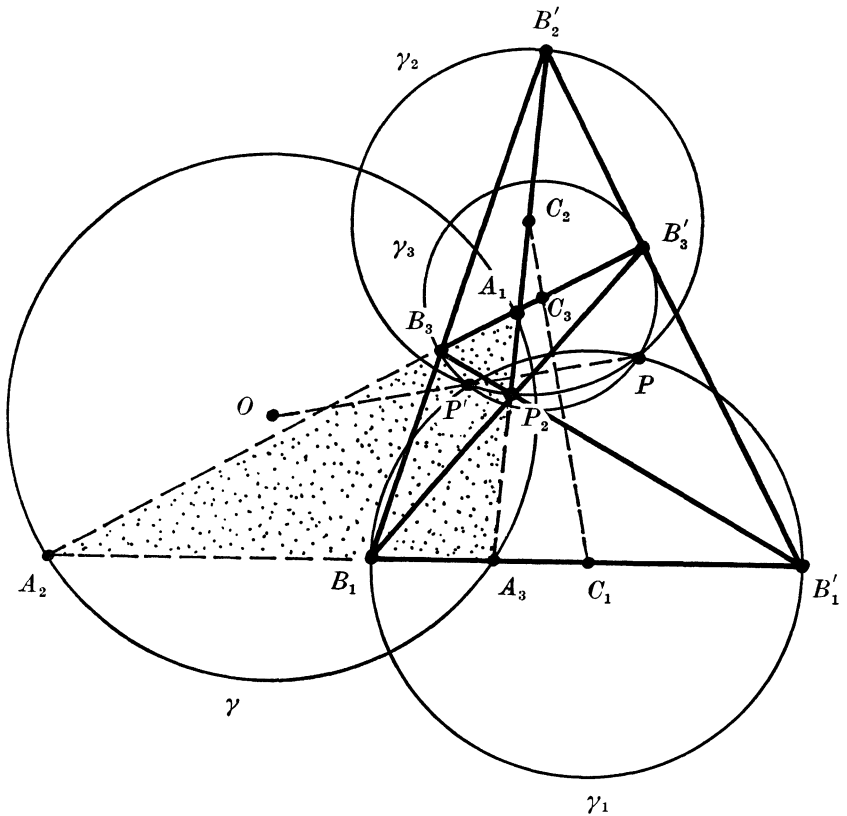
TEOREMA I. Se P non appartiene al circolo γ circoscritto ad $A_1A_2A_3$ nè coincide col suo centro O , esiste uno ed un solo punto P' tale che:

$$\overline{A_1P'} : \overline{A_2P'} : \overline{A_3P'} = \overline{A_1P} : \overline{A_2P} : \overline{A_3P}.$$

Il punto P' è il corrispondente di P nella inversione rispetto al circolo γ .

(*) Indirizzo dell'A.: Istituto di Algebra e Geometria, Università, Via Belzoni 7, 35100 Padova.

Infatti (v. fig. 1) si considerino i 3 cerchi $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ appartenenti rispettivamente ai 3 fasci F_1, F_2, F_3 di punti limite rispettivi $A_2, A_3; A_3, A_1; A_1, A_2$ e passanti per P .



Figg. 1, 2.

Ciascuno dei 3 cerchi $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ si può pensare come un « *cerchio di Apollonio* », luogo dei punti P' soddisfacenti rispettivamente alle condizioni:

$$\overline{A_2P'} : \overline{A_3P'} = \overline{A_2P} : \overline{A_3P},$$

$$\overline{A_3P'} : \overline{A_1P'} = \overline{A_3P} : \overline{A_1P},$$

$$\overline{A_1P'} : \overline{A_2P'} = \overline{A_1P} : \overline{A_2P}.$$

D'altra parte i 3 fasci F_1, F_2, F_3 appartengono ad una stessa rete: quella il cui circolo ortotomico contiene i loro punti limite A_1, A_2, A_3 e perciò coincide col circolo γ circoscritto al triangolo dato.

Sicchè la condizione (lineare) di passaggio per un punto P (soddisfatta da $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$) determina entro la rete un 3° fascio F di circoli, al quale dunque appartengono $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$, e del quale P' è l'altro punto base.

L'asse radicale PP' del fascio F è un diametro di γ , cosicchè P e P' sono allineati col centro O di γ .

Inoltre ciascuno dei circoli della rete è mutato in sè dall'inversione rispetto al circolo γ . In particolare lo sono anche $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$, cosicchè in quella inversione si corrispondono anche i loro 2 punti comuni P e P' , e.v.d.

Da quanto precede consegue (per induzione sull'indice n) il seguente:

TEOREMA II. *Presi n punti A_1, A_2, \dots, A_n su di un circolo γ , le coppie P, P' di punti corrispondenti nell'inversione rispetto a γ sono tali che:*

$$\overline{A_1P'} : \overline{A_2P'} : \dots : \overline{A_nP'} = \overline{A_1P} : \overline{A_2P} : \dots : \overline{A_nP}.$$

Da notare che i possibili valori dei rapporti che figurano nei 2 membri della precedente proporzionalità sono tutti e solo quelli che si ottengono facendo assumere ad uno dei 2 punti, ad es. P , tutte le posizioni possibili all'interno di γ .

Il Teorema I si può anche esprimere come una proprietà dei circoli di Apollonio. Esso infatti afferma che:

TEOREMA III. *Dati 3 punti A_1, A_2, A_3 , per ogni scelta di un punto P del loro piano, appartengono ad uno stesso fascio F (variabile con P) i 3 circoli di Apollonio $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ relativi alle 3 coppie di punti A_1A_3, A_3A_1, A_1A_2 e passanti per P . Inoltre, come si è già visto:*

I 2 punti base P, P' del fascio F si corrispondono nell'inversione rispetto al circolo γ circoscritto al triangolo $A_1A_2A_3$.

2. Alcune curiose proprietà metriche dei quadrilateri piani completi.

I 3 circoli $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ segano i lati del triangolo $A_1A_2A_3$, opposti ai vertici di ugual indice, nelle 3 coppie di punti diametralmente opposti $B_1, B'_1; B_2, B'_2; B_3, B'_3$, e questi dividono internamente ed esternamente

nello stesso rapporto i segmenti A_2A_3 , A_3A_1 , A_1A_2 , e precisamente:

$$\begin{aligned}\overline{A_2B_1}:\overline{A_3B_1} &= \overline{A_2B'_1}:\overline{A_3B'_1} = \overline{A_2P}:\overline{A_3P}, \\ \overline{A_3B_2}:\overline{A_1B_2} &= \overline{A_3B'_2}:\overline{A_1B'_2} = \overline{A_3P}:\overline{A_1P}, \\ \overline{A_1B_3}:\overline{A_2B_3} &= \overline{A_1B'_3}:\overline{A_2B'_3} = \overline{A_1P}:\overline{A_2P}.\end{aligned}$$

Si possono scegliere le notazioni in modo che i punti B_i siano quelli interni e quelli B'_i siano esterni ai rispettivi segmenti (v. fig. 2). Allora sono positivi i rapporti semplici:

$$(2.1) \quad \begin{cases} (A_2A_3B'_1) = -(A_2A_3B_1) = \overline{A_2P}:\overline{A_3P}, \\ (A_3A_1B'_2) = -(A_3A_1B_2) = \overline{A_3P}:\overline{A_1P}, \\ (A_1A_2B'_3) = -(A_1A_2B_3) = \overline{A_1P}:\overline{A_2P}. \end{cases}$$

Dalle (2.1) si ricava in particolare che:

$$(2.2) \quad (A_2A_3B'_1) \cdot (A_3A_1B'_2) \cdot (A_1A_2B'_3) = 1.$$

Dalla (2.2), per il teorema di Menelao, si deduce che i 3 punti B'_1, B'_2, B'_3 sono allineati.

Analogamente si prova, sfruttando le (2.1) ed il teorema di Menelao, che sono allineate anche le altre 3 terne $B'_1B_2B_3, B_1B'_2B_3, B_1B_2B'_3$.

Si mette così in evidenza un *quadrilatero piano completo*, del quale $B_1, B'_1, B_2, B'_2, B_3, B'_3$ sono le 3 coppie di vertici opposti ed $A_1A_2A_3$ è il triangolo diagonale.

Viceversa, dato un quadrilatero piano completo, di cui $B_1, B'_1, B_2, B'_2, B_3, B'_3$ siano le 3 coppie di vertici opposti ed $A_1A_2A_3$ il triangolo diagonale, si può sempre supporre di aver scelto le notazioni in modo che B'_1, B'_2, B'_3 siano allineati ed esterni al triangolo $A_1A_2A_3$.

Le note proprietà armoniche dei quadrilateri c'insegnano che le 3 coppie di punti $B_1, B'_1, B_2, B'_2, B_3, B'_3$ dividono internamente ed esternamente nello stesso rapporto (variabile con la coppia) i 3 segmenti A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2 .

D'altra parte il teorema di Menelao e l'allineamento delle 4 terne:

$$B'_1, B'_2, B'_3, \quad B'_1, B_2, B_3, \quad B_1, B'_2, B_3, \quad B_1, B_2, B'_3,$$

ci assicurano che vale la (2.2).

Inoltre i 3 cerchi $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ di diametri $B_1B'_1, B_2B'_2, B_3B'_3$ sono (di Apollonio, ossia) luogo dei punti P tali che rispettivamente:

$$(2,3) \quad \begin{cases} \overline{A_2P} \cdot \overline{A_3P} = (A_2A_3B'_1), \\ \overline{A_3P} \cdot \overline{A_1P} = (A_3A_1B'_2), \\ \overline{A_1P} \cdot \overline{A_2P} = (A_1A_2B'_3). \end{cases}$$

Se P è un punto comune a γ_1 e γ_2 , soddisfa alle prime due (2.3). Moltiplicandole membro a membro e tenendo conto della (2.2), se ne deduce che P soddisfa anche alla terza (2.3), ossia appartiene anche al cerchio γ_3 . In altre parole $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ sono i 3 cerchi di Apollonio relativi alle 3 coppie di punti A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2 e a quel punto P .

Tenendo presente quanto già visto nel n. 1, se ne deduce ⁽¹⁾ il seguente:

TEOREMA IV. Dato un quadrilatero piano completo, sia $A_1A_2A_3$ il suo triangolo diagonale e siano $B_1, B'_1, B_2, B'_2, B_3, B'_3$ le sue tre coppie di vertici opposti ⁽²⁾, appartenenti rispettivamente ai lati opposti ai vertici A_1, A_2, A_3 : Siano inoltre $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ i 3 cerchi di diametri rispettivi $B_1B'_1, B_2B'_2, B_3B'_3$ e sia γ il cerchio circoscritto ad $A_1A_2A_3$, di centro O . Allora:

- 1) I tre cerchi $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ sono ortogonali al cerchio γ .
- 2) I 3 centri C_1, C_2, C_3 di $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ sono allineati.
- 3) I 3 cerchi $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ appartengono ad uno stesso fascio F .
- 4) I 2 punti base P, P' del fascio F sono allineati col punto O e si corrispondono nell'inversione rispetto al cerchio γ .

Manoscritto pervenuto in redazione il 21 ottobre 1980.

⁽¹⁾ Ammettendo che il ragionamento precedente valga anche se P non è reale.

⁽²⁾ Che conviene supporre siano tutti al finito.