Rendiconti
del
Seminario Matematico
della
Università di Padova

L. Stazi

Sul teorema di Liouville per deformazioni conformi

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 64 (1981), p. 85-92
<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1981__64__85_0>

REND SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol. 64 (1981).

Sul teorema di Liouville per deformazioni conformi. (*).

L. STAZI (**)

Nell'ambito delle deformazioni finite, si chiamano *condizioni di congruenza* i sei legami differenziali di 2° ordine che devono essere soddisfatti da un tensore simmetrico, perchè esista uno spostamento regolare (1) che lo ammetta come *tensore di deformazione*. Si tratta in sostanza delle equazioni che traducono il contenuto delle classiche condizioni di De Saint Venant, ove si completi la parte linearizzata delle caratteristiche di deformazione con i termini di 2° grado (caratteristiche complete) (2). Nell'ampia letteratura relativa alle condizioni di congruenza (cfr. ad es. [10], p. 272), ci limitiamo qui a ricordare una pregevole *forma vettoriale* dovuta a *Signorini* [8], relativa alla deformazione pura (3) e quella *tensoriale di Graiff* [5], riguardante direttamente il tensore di deformazione (4).

Di un certo interesse anche la *forma intrinseca* [2], relativa ai coefficienti principali e alla terna principale di deformazione.

Scopo di questo breve studio è di ritrovare direttamente, attraverso le condizioni di congruenza, con metodo geometrico, più che

(*) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.F.M. del C.N.R. e del M.P.I. (art. 286 T.U.).

(**) Indirizzo dell'A.: Istituto Matematico « Castelnuovo » - Città Universitaria - Roma.

(1) Naturalmente definito a meno di un arbitrario spostamento rigido.

(2) La parte simmetrica del gradiente di spostamento caratterizza le deformazione solo per spostamenti infinitesimi. Di qui la denominazione di « *caratteristiche linearizzate di deformazione* ».

(3) Si vuol dire più precisamente la radice quadrata del tensore di deformazione di *Green*.

(4) Per il caso « duale » si cfr. *Pastrone* [6].

analitico, e senza l'uso di coordinate speciali, il classico teorema di *Liouville* (cfr. *Bianchi* [1], pag. 373 e segg.): *ogni deformazione conforme (in tre dimensioni) equivale ad una omotetia diretta o ad una anti-inversione per raggi vettori reciproci.*

1. Premesse.

Indichiamo con C_* una *configurazione di riferimento* di un sistema continuo tridimensionale S; una posizione cioè effettivamente occupata da S ad un determinato istante t_* ovvero, più in generale, una posizione scelta comunque tra tutte quelle di cui esse è suscettibile. Con C indicheremo invece la *configurazione attuale* di S, relativa cioè all'istante generico t che, in quanto segue, figurerà come un parametro prefissato.

Introdotto in C_* (e quindi in C) un sistema di coordinate generali $\{X^\alpha\}$ $(\alpha = 1, 2, 3)$, nonchè le relative basi associate localmente $\{\boldsymbol{G}_\alpha\}$ e $\boldsymbol{g}_\alpha\}$, la metrica sarà espressa, in C_* e in C rispettivamente, dai tensori simmetrici:

$$G_{\alpha\beta}(X) \equiv \boldsymbol{G}_\alpha \cdot \boldsymbol{G}_\beta\,, \qquad g_{\alpha\beta}(X) \equiv \boldsymbol{g}_\alpha \cdot \boldsymbol{g}_\beta\,. \tag{1}$$

Con $G^{\alpha\beta}$ e $g^{\alpha\beta}$ indicheremo i coefficienti delle due metriche in forma contravariante:

$$G_{\alpha\varrho}G^{\varrho\beta} = \delta^\beta_\alpha\,, \qquad g_{\alpha\varrho}g^{\varrho\beta} = \delta^\beta_\alpha\,. \tag{2}$$

È chiaro che, assegnata arbitrariamente in C_* la metrica attuale $g_{\alpha\beta}$, ovvero il tensore simmetrico (*deformazione diretta*):

$$E_{\alpha\beta} \equiv \tfrac{1}{2}(g_{\alpha\beta} - G_{\alpha\beta})\,, \tag{3}$$

non esiste, in generale, uno spostamento $\boldsymbol{s}(X)$ regolare, a partire da C_*, che ammetta le $E_{\alpha\beta}$ come caratteristiche di deformazione; cioè uno spostamento che verifichi, in tutto C_*, il sistema alle derivate parziali

$$E_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\partial_\alpha \boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{G}_\beta + \partial_\beta \boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{G}_\alpha) + \frac{1}{2}\partial_\alpha\boldsymbol{s}\cdot\partial_\beta\boldsymbol{s} \qquad \left(\partial_\alpha \equiv \frac{\partial}{\partial X^\alpha}\right). \tag{4}$$

Perchè ciò accada, si richiede che le $E_{\alpha\beta}$ rendano soddisfatte sei condizioni di compatibilità (*condizioni di congruenza*) che, in sostanza, traducono l'euclideità della configurazione attuale C, e quindi l'annullarsi del tensore di curvatura $R_{\mu\alpha\varrho\beta}$ associato alla metrica $g_{\alpha\beta}$.

Introdotto il tensore

$$H_{\alpha\varrho,\beta} \equiv \nabla_\alpha E_{\varrho\beta} + \nabla_\varrho E_{\beta\alpha} - \nabla_\beta E_{\alpha\varrho} \tag{5}$$

(il simbolo ∇_α indica derivazione covariante rispetto alle coordinate X^α attraverso la metrica $G_{\alpha\beta}$ di C_*), tali condizioni si traducono in (5)

$$R_{\mu\alpha\varrho\beta} \equiv \nabla_\mu H_{\alpha\varrho,\beta} - \nabla_\alpha H_{\mu\varrho,\beta} - g^{\nu\sigma}(H_{\alpha\varrho,\nu} H_{\mu\beta,\sigma} - H_{\mu\varrho,\nu} H_{\alpha\beta,\sigma}) = 0 \tag{6}$$

con l'intervento di grandezze tutte definite in C_*. Tra queste è da annoverare anche la metrica $g^{\alpha\beta}$, la quale si esprime mediante il tensore di deformazione ed i suoi invarianti I_k $(k = 1, 2, 3)$ al modo seguente:

$$J g^{\alpha\beta} = (1 + 2I_1 + 4I_2) G^{\alpha\beta} - 2(1 + 2I_1) E^{\alpha\beta} + 4 E^{\alpha\varrho} E^{\beta}_{\varrho} , \tag{7}$$

essendo

$$J \equiv \frac{\det \|g_{\alpha\beta}\|}{\det \|G_{\alpha\beta}\|} = 1 + 2I_1 + 4I_2 + 8I_3 . \tag{8}$$

D'altra parte, in una varietà tridimensionale, il tensore 4-plo di *Riemann* equivale al tensore doppio $R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} R g_{\alpha\beta}$ (cfr. ad es. [4]). Ne consegue che l'annullarsi del tensore $R_{\mu\alpha\varrho\beta}$ equivale alla condizione che sia nullo il tensore di Ricci $R_{\alpha\beta}$:

$$R_{\mu\alpha\varrho\beta} = 0 \Leftrightarrow R_{\alpha\beta} \equiv g^{\mu\varrho} R_{\mu\alpha\varrho\beta} = 0 . \tag{9}$$

2. Condizioni di congruenza.

Ci proponiamo ora di dare forma esplicita alla $(9)_2$, nell'ipotesi che lo spostamento $C_* \to C$ sia conforme:

$$g_{\alpha\beta} = \lambda^2 G_{\alpha\beta} \sim g^{\alpha\beta} = \frac{1}{\lambda^2} G^{\alpha\beta} . \tag{10}$$

(5) Cfr. ad esempio [5], nonchè [3] pag. 178, salvo lo scambio ormai usuale, delle lettere maiuscole con quelle minuscole.

Per questo, esplicitiamo il tensore $R_{\alpha\beta}$ in termini del parametro λ. Tenuto conto del teorema di Ricci: $\nabla_\alpha G_{\varrho\beta} = 0$, si ha anzitutto

$$(11) \qquad R_{\alpha\beta} \equiv \frac{1}{\lambda^2} \nabla_\mu G^{\mu\varrho} H_{\alpha\varrho,\beta} - \frac{1}{\lambda^2} \nabla_\alpha G^{\mu\varrho} H_{\mu\varrho,\beta} - \frac{1}{\lambda^4} G^{\mu\varrho} G^{\nu\sigma} (H_{\alpha\varrho,\nu} H_{\mu\beta,\sigma} - H_{\mu\varrho,\nu} H_{\alpha\beta,\sigma}) = 0 \,.$$

D'altra parte, nell'ipotesi (10), il tensore di deformazione (3) è del tipo

$$(12) \qquad E_{\alpha\beta} = \tfrac{1}{2}(\lambda^2 - 1) G_{\alpha\beta}$$

onde risulta $H_{\alpha\varrho,\beta} = \frac{1}{2}(\partial_\alpha \lambda^2 G_{\varrho\beta} + \partial_\varrho \lambda^2 G_{\beta\alpha} - \partial_\beta \lambda^2 G_{\alpha\varrho})$, ovvero

$$(13) \qquad H_{\alpha\varrho,\beta} = \lambda^2 (v_\alpha G_{\varrho\beta} + v_\varrho G_{\beta\alpha} - v_\beta G_{\alpha\varrho}) \,,$$

avendo introdotto il *campo vettoriale*, di base C_*:

$$(14) \qquad v_\alpha \equiv \frac{1}{\lambda} \partial_\alpha \lambda \equiv \partial_\alpha \lg \lambda \,.$$

Ne consegue, con un calcolo diretto,

$$\begin{cases} G^{\mu\varrho} H_{\alpha\varrho,\beta} = \lambda^2 (v_\alpha \delta^\mu_\beta + v^\mu G_{\beta\alpha} - v_\beta \delta^\mu_\alpha) \,, \qquad G^{\mu\varrho} H_{\mu\varrho,\beta} = -\lambda^2 v_\beta \,, \\ G^{\mu\varrho} G^{\nu\sigma} H_{\alpha\varrho,\nu} H_{\mu\beta,\sigma} = \lambda^4 (v_\alpha v_\beta + 2 v^2 G_{\alpha\beta}) \,, \\ G^{\mu\varrho} G^{\nu\sigma} H_{\mu\varrho,\nu} H_{\alpha\beta,\sigma} = \lambda^4 (v^2 G_{\alpha\beta} - 2 v_\alpha v_\beta) \,, \end{cases}$$

e di qui infine, ricordando la (14), l'espressione di $R_{\alpha\beta}$:

$$(15) \qquad R_{\alpha\beta} = \nabla_\beta v_\alpha - v_\alpha v_\beta + (v^2 + \nabla_\mu v^\mu) G_{\alpha\beta} \qquad (v^2 \equiv v_\mu v^\mu) \,.$$

In definitiva, le condizioni di congruenza assumono la forma esplicita

$$(16) \qquad \nabla_\beta v_\alpha - v_\alpha v_\beta + (v^2 + \nabla_\mu v^\mu) G_{\alpha\beta} = 0 \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, 3) \,.$$

Il sistema (16) implica anzitutto che il tensore $\nabla_\beta v_\alpha$ sia simmetrico: $\nabla_\beta v_\alpha = \nabla_\alpha v_\beta$, ovvero $\partial_\beta v_\alpha - \partial_\alpha v_\beta = 0$, concordemente alla (14) che assicura l'irrotazionalità del campo di vettori v_α. Esso è certamente soddisfatto se $v_\alpha \equiv 0$, ovvero $\lambda = \text{cost.}$, nel quale caso la deformazione è congruente e la corrispondenza $C_* \to C$ si riduce ad una omotetia di parametro λ. Esclusa tale circostanza, facciamo intervenire il versore $\boldsymbol{\gamma}$ del vettore $\boldsymbol{v}$: $\boldsymbol{v} = v\boldsymbol{\gamma}$, con che risulta

$$v_\alpha = v\gamma_\alpha\,, \qquad \gamma_\alpha\gamma^\alpha = 1\,, \tag{17}$$

e la (16) diviene

$$v\nabla_\beta\gamma_\alpha + \gamma_\alpha\partial_\beta v - v^2\gamma_\alpha\gamma_\beta + (v^2 + \gamma^\mu\partial_\mu v + v\nabla_\mu\gamma^\mu)G_{\alpha\beta} = 0\,. \tag{16'}$$

Ciò posto, moltiplicando per γ^β e sommando, si trae la condizione vettoriale

$$v\gamma^\beta\nabla_\beta\gamma_\alpha + (2\gamma^\mu\partial_\mu v + v\nabla_\mu\gamma^\mu)\gamma_\alpha = 0 \qquad (\alpha = 1, 2, 3)\,, \tag{18}$$

che equivale alle seguenti condizioni scalari (6):

$$C_\alpha \equiv \gamma^\beta\nabla_\beta\gamma_\alpha = 0\,, \qquad \nabla_\mu\gamma^\mu + \frac{2}{v}\gamma^\mu\partial_\mu v = 0 \qquad (\alpha = 1, 2, 3)\,. \tag{19}$$

La $(19)_1$ mostra che *le linee di flusso del campo di vettori* v_α *sono* a curvatura nulla, cioè *rette*. Ne consegue, tenuto conto della irrotazionalità del campo di vettori $\boldsymbol{v}$, di cui alla (14):

$$\boldsymbol{v} = \operatorname{grad} U \sim U \equiv \lg\lambda\,, \tag{20}$$

che *le superfici equipotenziali* $\lambda = \text{cost.}$ *sono* superfici *parallele*. In particolare, essendo $v \equiv |\operatorname{grad} U|$, il vettore $\boldsymbol{v}$ ha modulo costante sulla generica superficie equipotenziale.

Mostreremo ora che tali superfici sono sfere concentriche. Per questo, cominciamo con l'osservare che, in virtù della $(19)_2$, la (16′) diviene

$$v\nabla_\beta\gamma_\alpha + \gamma_\alpha\partial_\beta v - v^2\gamma_\alpha\gamma_\beta + (v^2 - \gamma^\mu\partial_\mu v)G_{\alpha\beta} = 0\,, \tag{21}$$

(6) Il vettore $\gamma^\beta\nabla_\beta\gamma_\alpha$ è il differenziale assoluto del vettore $\boldsymbol{\gamma}$ secondo la generica linea di flusso del campo di vettori v_α. Pertanto esso rappresenta (localmente) il vettore di curvatura della linea di flusso ed è, come tale, ortogonale a $\boldsymbol{\gamma}$.

da cui, moltiplicando per γ^α, e tenendo conto della $(17)_2$,

$$\partial_\beta v = \gamma_\beta \gamma^\mu \partial_\mu v \,. \tag{22}$$

Pertanto, la (21) non differisce da $v\nabla_\beta\gamma_\alpha + (G_{\alpha\beta} - \gamma_\alpha\gamma_\beta)(v^2 - \gamma^\mu\partial_\mu v) = 0$.

Di qui, introducendo la *metrica degenere* (7)

$$\gamma_{\alpha\beta} \equiv G_{\alpha\beta} - \gamma_\alpha\gamma_\beta \,, \tag{23}$$

si trae il seguente legame:

$$v\nabla_\beta\gamma_\alpha = \gamma_{\beta\alpha}(\gamma^\mu\partial_\mu v - v^2) \,. \tag{24}$$

La (24), oltre a confermare la $(19)_1$ $(\gamma^\beta\gamma_{\alpha\beta} = \gamma_\alpha - \gamma_\alpha = 0)$, dà luogo alla relazione $v\nabla_\beta\gamma^\beta = 2(\gamma^\mu\partial_\mu v - v^2)$, compatibile con la $(19)_2$ se e solo se risulta

$$2\gamma^\mu\partial_\mu v = v^2 \,. \tag{25}$$

In definitiva, la (24) diviene più semplicemente

$$\boxed{\nabla_\beta v_\alpha = -\frac{v}{2}\gamma_{\beta\alpha}} \,. \tag{26}$$

3. Conclusioni.

Per chiarire il significato geometrico del legame trovato, di tipo tensoriale, disponendo della scelta delle variabili X^α, ammettiamo che queste sono *coordinate gaussiane* per la generica superficie equipotenziale σ, indicando con $\{\boldsymbol{E}_i\}$ $(i = 1, 2)$, la base locale su σ e con $\boldsymbol{E}_3 \equiv \boldsymbol{\gamma}$ il versore normale, orientato a piacere. Con tale scelta, la (26) non differisce da $\partial_i\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{E}_k = -(v/2)\gamma_{ik}$ $(i, k = 1, 2)$, da cui la seguente espressione dei coefficienti della 2ª forma quadratica fondamentali di σ:

$$b_{ik} = -\frac{v}{2}\gamma_{ik} \,. \tag{27}$$

(7) Si ha $\gamma^\beta\gamma_{\alpha\beta} = 0 \Rightarrow \det\|\gamma_{\alpha\beta}\| = 0$.

D'altro canto, posto che le $\gamma_i \equiv \boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{E}_i$ $(i = 1, 2)$ sono identicamente nulle, le componenti γ_{ik} di cui alla (23), si identificano con i coefficienti della metrica di σ: $\gamma_{ik} = G_{ik}$ $(i, k = 1, 2)$. Ne consegue che *le superfici equipotenziali*, tra loro parallele, *si riducono ad una famiglia di sfere concentriche* (8), aventi centro in un punto O e raggio

$$\varrho = \frac{2}{v} . \tag{28}$$

Pertanto, il vettore $\boldsymbol{v}$, in quanto ortogonale a σ, è suscettibile della forma

$$\boldsymbol{v} = -\frac{2}{\varrho} \text{ vers. } OP \tag{29}$$

se si suppone la normale $\boldsymbol{\gamma}$ orientata verso l'interno. Al tempo stesso, il potenziale $U(\varrho)$ di cui alla (20), non differisce da

$$U = -\int \frac{2}{\varrho} d\varrho + \text{cost} = \lg \frac{k^2}{\varrho^2} ; \tag{30}$$

ciò che fornisce il valore di λ:

$$\lambda = \frac{k^2}{\varrho^2} , \tag{31}$$

essendo k una costante arbitraria (così come il centro O, data la disponibilità di una traslazione arbitraria).

Una volta precisati i valori di λ che soddisfano le condizioni di congruenza (9)

$$\lambda = \begin{cases} \text{cost} , \\ k^2/\varrho^2 , \end{cases} \tag{32}$$

(8) Invero la proporzionalità, come dalla (27), della 2ª forma quadratica alla prima, assicura innanzitutto che il tensore b_{ik} è isotropo, in modo che, sulla generica superficie σ, i raggi di curvatura principali sono localmente uguali tra di loro. D'altra parte, il fattore di proporzionalità $v/2$ è *costante* su σ, ciò che assicura l'invariabilità dei raggi di curvatura suddetti.

(9) Si osservi che, in virtù della (15), lo *scalare di curvatura* R non differisce da $R = 4\nabla_\alpha v^\alpha + 2v^2$ ed il suo annullarsi implica, in virtù della (14), la condizione differenziale ben nota (cfr. Picone [7] pag. 377): $2\lambda \Delta_2 \lambda - \Delta_1 \lambda = 0$.

si riconosce (cfr. [7], pag. 372 e segg., nonchè [9], pag. 63) che, nel primo caso la trasformazione è una similitudine, nel secondo il prodotto di una similitudine con una inversione di polo O (*teorema di Liouville*).

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

[1] L. Bianchi, *Lezioni di geometria differenziale*, vol. I, Spoerri, Pisa (1902).

[2] G. Ferrarese, *Sulla formulazione intrinseca delle condizioni di congruenza per deformazioni finite*, Rend. Lincei, (8), **36** (1964), pp. 629-638.

[3] G. Ferrarese, *Lezioni di meccanica superiore*, Veschi, Roma (1968).

[4] G. Ferrarese, *Introduzione alla dinamica riemanniana dei sistemi continui*, vol. I, Editrice Pitagora, Bologna (1979).

[5] F. Graiff, *Sulle condizioni di congruenza per deformazioni anche finite*, Rend. Lincei, (8), **24** (1958), pp. 415-422.

[6] F. Pastrone, *Sulle condizioni di congruenza per deformazioni finite*, Rend. Sem. Mat. Torino, **28** (1969), pp. 1-12.

[7] M. Picone, *Appunti di analisi superiore*, Rondinella, Napoli (1940).

[8] A. Signorini, *Sulle deformazioni finite dei sistemi continui*, Rend. Lincei, (6), **12** (1930), pp. 312-316.

[9] A. Signorini, *Trasformazioni termoelastiche finite*, Mem. Ann. Matem., IV, **22** (1943), pp. 33-143.

[10] C. Truesdell - R. A. Toupin, *The classical field theories*, Handbuch der Physik, Band III/I, Springer-Verlag (1960).

Manoscritto pervenuto in redazione il 17 dicembre 1979.