

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

WALTER STREB

Über einen Satz von Herstein und Nakayama

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 64 (1981), p. 159-171

http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1981__64__159_0

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1981, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Über einen Satz von Herstein und Nakayama.

WALTER STREB (*)

Einleitung.

Für jeden Ring S sei $Z = Z(S)$ das Zentrum von S , $J = J(S)$ das Jacobsonradikal von S und $S[x]$ der Polynomring über S in der Unbestimmten x . Herstein [2] hat unter Verwendung eines bewertungstheoretischen Argumentes von Nakayama [6] folgenden Satz bewiesen:

Sei R ein Ring. Gibt es zu jedem $a \in R$ ein $f_a(x) \in \mathbb{Z}[x]$, so daß $a - a^2 f_a(a) \in Z$, so ist R kommutativ.

Nakayama [7] hat die entsprechende Aussage für einen wesentlich allgemeineren Koeffizientenring F anstelle von $\mathbb{Z}$ und F -Algebren R gezeigt. F hat hierbei folgende Eigenschaften:

F ist kommutativer Ring mit 1. Es gibt einen Unterring K von F , so daß F als Algebra über K endlich erzeugt ist und K/P algebraisch abgeschlossener Körper ist für jedes Primideal P von R .

Neuerdings sind ähnliche Untersuchungen für Ringe mit Involution durchgeführt worden [3; pp. 110-153].

Wir werden in dieser Note die Voraussetzungen von Herstein und Nakayama stark verallgemeinern, drei interessante Sätze beweisen und weitere Untersuchungen anregen.

Im folgenden sei F ein kommutativer Ring (nicht notwendig mit 1),

(*) Indirizzo dell'A.: Fachbereich 6 - Mathematik, Universität Essen - GHS, Universitätsstraße 3, D-4300 Essen 1, Germany-West, BRD.

$F[x, y]$ bzw. $F\langle x, y \rangle$ der Polynomring über F in den vertauschbaren bzw. nicht vertauschbaren Unbestimmten x und y , jedoch ohne konstante Polynome, und R eine F -Algebra (d.h. R Ring, nicht notwendig mit 1, $r(a + b) = ra + rb$, $(r + s)a = ra + sa$, $r(sa) = (rs)a$, $(ra)b = r(ab) = a(rb)$ für alle $r, s \in F$ und $a, b \in R$).

DEFINITION. Sei $f(x, y) \in F\langle x, y \rangle$:

(1) $f(x, y)$ heiße (F, α) -Form, wenn alle Monome von $f(x, y)$ eine Länge ≥ 3 besitzen und $f(x, y)$ Element des Kerns des kanonischen F -Algebrenmorphisms $F\langle x, y \rangle \rightarrow F[x, y]$ ist.

(2) $f(x, y)$ heiße (F, β) -Form, wenn $f(x, y)$ (F, α) -Form ist und in allen Monomen von $f(x, y)$ die Unbestimmte x wenigstens 2-mal vorkommt.

(3) Sei $\xi \in \{\alpha, \beta\}$.

R heiße (F, ξ) -Ring, wenn es zu $a, b \in R$ stets eine (F, ξ) -Form $f_{a,b}(x, y)$ gibt, so daß $ab - ba = f_{a,b}(a, b)$.

R heiße $(F, \bar{\xi})$ -Ring, wenn R (F, ξ) -Ring ist und $f_{a,b}(x, y) = f(x, y)$ für alle $a, b \in R$ (unabhängig von a und b).

(4) R heiße (F, γ) -Ring, wenn R (F, β) -Ring ist und folgendes gilt:

Es gibt einen Unterring K von F , so daß F als Algebra über K endlich erzeugt ist und der Quotientenkörper von K/P perfekt ist für jedes Primideal P von K .

Die von Herstein und Nakayama betrachteten Ringe sind (F, γ) -Ringe. Nach einigen Betrachtungen zu (F, α) -Ringem beweisen wir folgende Hauptsätze:

HAUPTSATZ 1. Ist R (F, β) -Ring, so gilt:

- (1) R/J ist subdirektes Produkt von Schiefkörpern;
- (2) $J \subset Z$ oder
- (*) es gibt Ideale A und B von R , so daß $B \subset A \subset J$ und A/B einfacher nullteilerfreier (radikaler) rechts- und linksseitiger Ore-Ring [1; p. 435].

HAUPTSATZ 2. Sei R (F, γ) -Ring und I der Durchschnitt aller Ideale A von R , für welche R/A nichtkommutativer Schiefkörper ist. (Falls keine derartigen Ideale A existieren, sei $I = R$). Dann gilt $I \subset Z$ oder (*) aus Hauptsatz 1.

HAUPTSATZ 3. Jeder $(F, \bar{\beta})$ -Ring ist kommutativ.

Wir geben zunächst einige Erläuterungen und Beispiele:

BEMERKUNG 1. Die Aussage von Hauptsatz 2 ist wesentlich stärker als die Aussage von Hauptsatz 1. Etwa gilt für endliche (F, β) -Ringe nach Hauptsatz 1 lediglich $R' \subset Z$ für das von den Kommutatoren $ab - ba$, $a, b \in R$ erzeugte Ideal R' von R . Endliche (F, γ) -Ringe sind indes nach Hauptsatz 2 kommutativ.

BEMERKUNG 2. Die Konstruktion eines nichtkommutativen radikalen (F, β) -Ringes würde nach Hauptsatz 1 die Konstruktion eines einfachen nullteilerfreien radikalen rechts- und linksseitigen Ore-Ringes nach sich ziehen.

Die Schärfe von Hauptsatz 2 beleuchten die folgenden Beispiele:

BEISPIEL 1. Jeder über seinem Zentrum Z algebraische Schiefkörper D mit $\text{char } D = 0$ ist (F, γ) -Ring.

BEISPIEL 2. McLaughlin und Rosenberg [5; p. 207] konstruierten eine Algebra R mit 1 über einem nicht perfekten Körper F für die folgendes gilt: R ist nicht kommutativ, R/J ist Körper, also $I = R$, und $J \subset Z$. Man errechnet, daß R ein (F, β) -Ring ist. Die Voraussetzungen von Hauptsatz 2 sind demnach «scharf».

Sei R ein Ring. Für $a, b \in R$ sei

$$[a, b] := ab - ba \quad \text{und} \quad aob := ab + ba.$$

Die Aussage von Hauptsatz 3 gilt nicht für $(F, \bar{\alpha})$ -Ringe:

BEISPIEL 3. Sei K ein endlicher Körper mit Primkörper F , K_2 der 2×2 -Matrizenring über K und j bzw. k die Ordnung der Einheitsgruppe von K bzw. K_2 . Dann ist K_2 $(F, \bar{\alpha})$ -Ring mit

$$(*) \quad f(x, y) = g(x, y) + ([x, y] - g(x, y))[x, y]^{2j}.$$

Hierbei sei

$$\begin{aligned} g(x, y) &:= [x, y]ox^k + [x, y]oy^k - x^k[x, y]x^k - y^k[x, y]y^k - \\ &- ([x, y]ox^k)oy^k + (x^k[x, y]x^k)oy^k + (y^k[x, y]y^k)ox^k - x^ky^k[x, y]x^ky^k. \end{aligned}$$

BEISPIEL 4. Seien F und K Körper, $F \subset K$ und K_n der $n - n$ -Matrizenring über K . Dann gilt:

- (1) K_2 ist (F, α) -Ring genau dann, wenn K algebraisch über F ist;
- (2) K_2 ist $(F, \bar{\alpha})$ -Ring genau dann, wenn K endlich ist;
- (3) K_2 ist $(\mathbb{Z}, \alpha)$ -Ring genau dann, wenn $\text{char } K \neq 0$ und K algebraisch über seinem Primkörper ist;
- (4) K_n ist (K, α) -Ring genau dann, wenn $n = 2$.

Es erhebt sich die Frage nach entsprechenden Begriffsbildungen für $n - n$ -Matrizenringe, $n > 2$.

BEMERKUNG 3. Im Gegensatz zu den Voraussetzungen von Herstein und Nakayama hat das Zentrum von R bei unseren Voraussetzungen keine «ausgezeichnete Position». Wesentliche Beweismittel gehen hierdurch verloren. So entfallen bei den Betrachtungen zu Schiefkörpern bewertungstheoretische Hilfen und reichen zur Bearbeitung einfacher radikaler Ringe S die Fakten $Z(S) = 0$ und (aus $ab = a$, $a, b \in S$ folgt $a = 0$) nicht mehr aus.

BEISPIEL 5. Für den Schiefkörper $R(1, i, j, k)$ der Hamiltonschen Quaternionen gilt:

- $R(1, i, j, k)$ ist kein $(\mathbb{Q}, \alpha)$ -Ring (teste $a = i\pi$ und $b = j\pi$),
 $\mathbb{Q}(1, i, j, k)$ ist kein $(\mathbb{Z}, \alpha)$ -Ring (teste $a = i - j$ und $b = i + j$).

Es erhebt sich die interessante Frage nach der Struktur von (F, ξ) -Schiefkörpern bei «geeigneten F und ξ ».

BEWEISTEIL. Wir beginnen mit einigen Notationen für $a, b \in R$ und $A, B \subset R$: $\langle A \rangle$ bzw. (A) sei der von A erzeugte Unterring bzw. das von A erzeugte (zweiseitige) Ideal von R . Für $\langle \{a\} \rangle$ bzw. $(\{a\})$ notieren wir auch $\langle a \rangle$ bzw. (a) . A heiße nil, wenn es zu jedem $a \in A$ eine natürliche Zahl n gibt, so daß $a^n = 0$; A heiße nilpotent, wenn es eine natürliche Zahl n gibt, so daß $A^n = 0$. Weiterhin sei

$$[a, b] := ab - ba,$$

$$[A, B] := \{[a, b] \mid a \in A, b \in B\},$$

$$R' := ([R, R]).$$

Sei $\xi \in \{\alpha, \beta\}$. Ist R als (F, ξ) -Ring vorausgesetzt, so sei zu $a, b \in R$ (stillschweigend) stets $f_{a,b}(x, y)$ als (F, ξ) -Form gewählt.

Seien A und B Mengen und $\varphi: A \rightarrow B$ eine Abbildung. Für $C \subset A$ sei $\varphi|C$ die Einschränkung von φ auf C .

Ist R nullteilerfrei und kommutativ, so sei $Q(R)$ der Quotientenkörper von R .

R heiße F -algebraisch, wenn folgendes gilt: Zu jedem $a \in R$ gibt es $r_i \in F$, $0 < i < n$, so daß $a^n + \sum_{0 < i < n} r_i a^i = 0$.

1. Beweis von Hauptsatz 1.

Man verifiziert unmittelbar

LEMMA 1. Jede (F, α) -Form $f(x, y)$ besitzt eine Darstellung der Gestalt

$$(*) \quad f(x, y) = \sum_{1 \leq i \leq n} g_i(x, y)[x, y]h_i(x, y)$$

mit $g_i(x, y), h_i(x, y) \in F\langle x, y \rangle \cup \{e\}$, wobei e ein Symbol ist, für welches $e[x, y] = [x, y] = [x, y]e$ gilt.

LEMMA 2. Sei $a \in R$, A Ideal von R und $a^2 \in A$.

- (1) Ist R (F, α) -Ring und $a \in J$, so gilt $aRa \subset A$.
- (2) Ist R (F, β) -Ring, so gilt $aRa \subset A$.

BEWEIS. Sei $r \in R$.

- (1) Mit Lemma 1. (*) erhält man

$$ara \equiv [a, ra] = f_{a,ra}(a, ra) \equiv arag(ra) \text{ modulo } A$$

mit $g(x) \in F[x]$ und $g(ar) \in J$, also $ara \in A$.

- (2) Mit Lemma 1. (*) erhält man

$$ara \equiv [a, ra] = f_{a,ra}(a, ra) \equiv 0 \text{ modulo } A.$$

Ein einfacher Induktionsschluß erbringt nun

LEMMA 3. Sei A Ideal von R , $a \in R$ und $a + A/A$ nil.

- (1) Ist R (F, α) -Ring und $a \in J$, so ist $(a) + A/A$ nilpotent.
- (2) Ist R (F, β) -Ring, so ist $(a) + A/A$ nilpotent.

COROLLAR 4. Jeder prime (F, β) -Ring R ist nullteilerfrei.

BEWEIS. Seien $a, b \in R$ mit $ab = 0$. Für alle $r \in R$ gilt $brabra = 0$, also nach Lemma 3. (2) $bra = 0$, somit $a = 0$ oder $b = 0$.

LEMMA 5. Ist R nullteilerfreier (F, α) -Ring, so ist jede F -Unteralgebra rechts- und linksseitiger Ore-Ring.

BEWEIS. Wir zeigen «rechtsseitig», indem wir die folgende Annahme zum Widerspruch führen:

Es gibt $a, b \in R$, mit $a \neq 0 \neq b$, so daß für die von a und b erzeugte F -Unteralgebra S von R gilt: $aS \cap bS = 0$.

Sei genauer $f_{a,b}(x, y) = -xg(x, y) + yh(x, y)$. Dann gilt

$$a(b + g(a, b)) = b(a + h(a, b)), \quad \text{also} \quad b + g(a, b) = 0 = a + h(a, b) \quad *$$

Wähle nun $f(x, y) \in F\langle x, y \rangle$ so, daß $a + f(a, b) = 0$ oder $b + f(a, b) = 0$, alle Monome von $f(x, y)$ einen Grad ≥ 2 haben und möglichst wenige Monome vorkommen. Sei genauer $f(x, y) = xg_1(x, y) + yh_1(x, y)$ und o.E. $a + f(a, b) = 0$. Für $c \in \{a, b\}$ gilt

$$0 = (a + f(a, b))c = a(c + g_1(a, b)c) + bh_1(a, b)c,$$

also $c + g_1(a, b)c = 0$. Wegen der Minimalitätseigenschaft von $f(x, y)$ ist $h_1(x, y) = 0$. Also beginnt jedes Monom von $f(x, y)$ mit x .

Die analogen Überlegungen für a und $g_1(x, y)x, b$ und $g_1(x, y)y$ führen auf den Widerspruch, daß jedes Monom von $g_1(x, y)$ mit x und y beginnt. Insgesamt gilt «rechtsseitig». Analog zeigt man «linksseitig».

LEMMA 6. Sei $\xi \in \{\alpha, \beta\}$, R (F, ξ) -Ring und $n \in \mathbb{N}$:

Für alle $a, b \in R$ kann $f_{a,b}(x, y)$ so gewählt werden, daß n untere Schranke für die Länge der Monome von $f_{a,b}(x, y)$ ist.

BEWEIS. Man führt in der Darstellung Lemma 1. (*) von $f_{a,b}(x, y)$ mehrmals die Substitution $f_{a,b}(x, y) \rightarrow [x, y]$ aus.

LEMMA 7. Sei A Ideal von R und $B \subset A$.

- (1) Ist R (F, α) -Ring und $B + A/A$ nilpotent, so gilt $[\langle B \rangle, \langle B \rangle] \subset A$.
- (2) Ist R (F, α) -Ring, $B \subset J$ und $B + A/A$ nil, so gilt $[(B), (B)] \subset A$.
- (3) Ist R (F, β) -Ring und $B + A/A$ nil, so gilt $[(B), (B)] \subset A$.

BEWEIS. (1) Erhält man unmittelbar mit Lemma 6.

(2) Seien $a, b \in B$. Nach Lemma 3. (1) sind $(a) + A/A$ und $(b) + A/A$ nilpotent. Also ist $(a) + (b) + A/A$ nilpotent. Nach Lemma 6 gilt $[(a), (b)] \subset A$. Nun folgt unmittelbar die Behauptung.

(3) Zeigt man analog mit Lemma 3. (2).

LEMMA 8. Sei R linksseitig primitiver Ring.

(1) Ist R (F, α) -Ring, so ist R Schiefkörper oder 2 — 2-Matrizenring über einem F -algebraischen Schiefkörper.

(2) Ist R (F, β) -Ring, so ist R Schiefkörper.

BEWEIS. R ist dichter Unterring des Ringes L aller D -linearen Abbildungen $V_D \rightarrow V_D$ eines Vektorraumes V_D über einem Schiefkörper D .

(1) Angenommen, die Behauptung gilt nicht. Dann besitzt V_D einen 3-dimensionalen Unterraum W . Sei

$$S := \{u \in R \mid u(W) \subset W\} \quad \text{und} \quad T := \{u|W \mid u \in S\}.$$

T ist ringisomorph zum 3 — 3-Matrizenring über D und die Abbildung $S \rightarrow T, u \rightarrow u|W$ ein surjektiver Ringmorphismus. Es gibt $c, d \in T$, so daß $\langle \{c, d\} \rangle^3 = 0$ und $[c, d] \neq 0$. Für $a, b \in S$ mit $a|W = c$ und $b|W = d$ erhält man bei Beachtung von Lemma 6 den Widerspruch

$$[a, b]|W \neq 0 \quad \text{und} \quad f_{a,b}(a, b)|W = 0.$$

Sei nun R 2 — 2-Matrizenring über D mit Einselement 1.

Wegen $F1 \subset Z(D)$ sei o.E. $F \subset Z(D)$. Zu $0 \neq d \in D$ gibt es $g(x) \in F[x]$, so daß für $A := \begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ und $B := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ gilt

$$\begin{pmatrix} 0 & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = [A, B] = f_{A,B}(A, B) = \begin{pmatrix} 0 & g(d)d \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

also $g(d) = 1$.

(2) Nach Lemma 7. (3) ist R nicht 2 — 2-Matrizenring über einem Schiefkörper. Mit (1) erhält man die Behauptung.

LEMMA 9. Sei R (F, β) -Ring und A Ideal von R .

- (1) Ist $[A, A] = 0$, so gilt $A \subset Z$.
- (2) Ist $[A, A] \subset Z$ und $A \subset J$, so gilt $A \subset Z$.

BEWEIS. Seien $a, b \in A$ und $r \in R$.

- (1) Mit Lemma 1. (*) erhält man

$$[a, r] = f_{a,r}(a, r) \in ([A, R])A + A([A, R]) \subset ([A, A]) = 0.$$

- (2) Nach Lemma 1. (*) gibt es $g(x, y) \in F\langle x, y \rangle$, so daß

$$[a, b] = f_{a,b}(a, b) = g(a, b)[a, b]$$

mit $g(a, b) \in J$, also $[a, b] = 0$. Mit (1) folgt die Behauptung.

LEMMA 10. Sei R ein Ring mit folgender Eigenschaft:

Es gibt nicht Ideale A und B von R , so daß $B \subset A \subset J$ und A/B einfacher (radikaler) Ring.

- (1) Ist R (F, α) -Ring, so ist $J \cap R'$ kommutativ.
- (2) Ist R (F, β) -Ring, so gilt $J \subset Z$.

BEWEIS.

(1) Nach Lemma 7. (2) reicht es zu zeigen, daß $C := J \cap R'$ nil ist. Hierzu führen wir die Annahme $c \in C$ und $c^3 \neq 0$ zum Widerspruch. Nach Zorn's Lemma gibt es ein Ideal B von R , so daß $B \subset (c^3)$ und $(c^3)/B$ einfacher Ring oder $(c^3)^2 \subset B$. Nach Voraussetzung ist $(c^3)^2 \subset B$, also nach Lemma 7. (2) $[(c), (c)] \subset B$, somit $(c)^3 \subset (c)^2 R' \subset \subset [(c), (c)] \subset B$ im Widerspruch zu $c^3 \notin B$.

- (2) Gilt nach (1) und Lemma 9. (2).

Hauptsatz 1 erhält man nun unmittelbar mit Lemma 8. (2), Lemma 10. (2), Corollary 4 and Lemma 5.

2. In diesem Teil sei R eine subdirekt irreduzible F -Algebra mit kleinstem F -Algebraideal U und R' kommutativ.

LEMMA 11. Es gilt (1), (2) oder (3).

- (1) $(R')^2 = 0$ und $R' \cap Z = 0$;
- (2) $U \subset Z$ und $RU = 0$;
- (3) $U \subset Z$ und R/V Körper. Hierbei sei $V := \{a \in R \mid aU = 0\}$.

BEWEIS. Zunächst ist $(R')^2 \subset Z$, also $(R')^2 = 0$ oder $U \subset Z$.

Falls $(R')^2 = 0$, ist $R' \cap Z$ Ideal von R , also $R' \cap Z = 0$ oder $U \subset Z$.

Sei nun $U \subset Z$ und $V \neq R$. Wir zeigen, daß R/V Körper ist.

Zunächst ist $R'D = 0$, also $R' \subset V$. Somit ist R/V kommutativ.

Für $a, b \in R \setminus V$ gilt: Es gibt $u \in U$, sodaß $au \neq 0$, demnach $Rau = U$. Folglich gibt es $c \in R$, so daß $cau = u$, also $bcau = bu$, somit $(bca - b)u = 0$, demnach $bca - b \in V$.

Insgesamt ist R/V Körper.

LEMMA 12. Sei R (F, α) -Ring.

Ist $a, b \in V$ und $[a, b] \in Z$, so gilt $[a, b] = 0$.

BEWEIS. Wir führen die Annahme $[a, b] \neq 0$ mit $a, b \in V$ zum Widerspruch. Mit Lemma 1. (*) erhält man

$$[a, b] = f_{a,b}(a, b) \in V[a, b].$$

Also gibt es $c \in V$, so daß $d = cd$ für alle $d \in ([a, b]) \cap D$; Widerspruch.

LEMMA 13. Ist R nicht kommutativer (F, β) -Ring, so ist $V \subset Z$ und R/V Körper.

BEWEIS. Nach Lemma 9. (1) ist $R' \subset Z$, insbesondere $R' \cap Z \neq 0$.

Lemma 12 erbringt $[V, V] = 0$. Mit Lemma 9. (1) erhält man nun $V \subset Z$, insbesondere $V \neq R$. Die Behauptung ist jetzt eine Konsequenz von Lemma 11.

Bis zum Ende von Teil II sei $V \subset Z$, R/V Körper und $e \in R$, so daß $e + V$ Einselement von R/V . Für $a \in R$ sei $\bar{a} := a + V$.

LEMMA 14. Ist R (F, γ) -Ring, als F -Algebra endlich erzeugt und $K\bar{e} \neq 0$, so gilt:

- (1) R/V ist algebraisch über $Q(K\bar{e})$;
- (2) $e \in Z$;
- (3) R ist kommutativ.

BEWEIS. (1) Gilt nach [4; Corollar 1, p. 255].

(2) Wir führen die Annahme $[e, a] \neq 0$ mit $a \in R$ zum Widerspruch. Sei $g(x) \in K[x]$ so gewählt, daß $\bar{e}g(x)$ Minimalpolynom von $\bar{a}$ über $Q(K\bar{e})$ ist. Für die formale Ableitung $g'(x)$ von $g(x)$ nach x gilt $0 = [eg(a), e] = eg'(a)[a, e]$, also $\bar{e}g'(\bar{a}) = 0$, somit $\bar{e}g'(x) = 0$. Im Widerspruch hierzu ist $Q(K\bar{e})$ perfekt.

(3) Wir führen die Annahme $[a, b] \neq 0$ mit $a, b \in R$ zum Widerspruch. Sei $g(x) \in K[x]$ so gewählt, daß $\bar{e}g(x)$ Minimalpolynom von $\bar{a}$ über $Q(K\bar{e})$ ist. Wegen (2) gilt $0 = [eg(a), b] = eg'(a)[a, b]$, also $\bar{e}g'(\bar{a}) = 0$, somit $\bar{e}g'(x) = 0$. Im Widerspruch hierzu ist $Q(K\bar{e})$ perfekt.

LEMMA 15. Ist R (F, γ) -Ring, als F -Algebra endlich erzeugt und $K\bar{e} = 0$, so ist R kommutativ.

BEWEIS. Nach [4; Corollar 1, p. 255] ist R/V algebraisch über seinem Primkörper. Weiter schließt man wie im Beweis von Lemma 14.

LEMMA 16. Ist R $(F, \bar{\beta})$ -Ring, so ist R kommutativ.

BEWEIS. Sei $S := \{u \in R \mid [u, e] = 0\}$. Dann ist $\bar{S} := S/V$ Körper und $F\bar{e} \subset \bar{S}$. Für alle $a \in R \setminus S$ gilt

$$[a, e] = f(a, e) = g(a, e)[a, e] \quad \text{mit} \quad g(x, y) \in F[x, y],$$

also $g(\bar{a}, \bar{e}) - \bar{e} = 0$ mit $g(x, \bar{e}) - \bar{e} \in \bar{S}[x]$. Somit ist $R = S$ oder R/V endlich, also $e \in Z$ oder $R' = 0$.

Sei nun $e \in Z, b \in R$ und $T := \{u \in R \mid [u, b] = 0\}$.

Dann ist $\bar{T} := T/V$ Körper und $F\bar{b} \subset \bar{T}$. Für alle $a \in R \setminus T$ gilt

$$[a, b] = f(a, b) = g(a, b)[a, b] \quad \text{mit} \quad g(x, y) \in F[x, y],$$

also $g(\bar{a}, \bar{b}) - \bar{b} = 0$ mit $g(x, \bar{b}) - \bar{b} \in \bar{T}[x]$. Somit ist $R = T$ oder R/V endlich, also $b \in Z$ oder $R' = 0$.

Insgesamt ist R kommutativ.

3. Beweis von Hauptsatz 2 und 3.

BEWEIS VON HAUPTSATZ 2. Sei (*) aus Hauptsatz 1 nicht gegeben. Nach Hauptsatz 1 und Lemma 10. (2) ist $([I, I]) \subset J \subset Z$.

Für $a, b \in I$ sei S die von a und b erzeugte F -Unteralgebra von R . Anwendung von Lemma 13-15 auf die subdirekt irreduziblen Bilder von S erbringt $[a, b] = 0$.

Insgesamt ist $[I, I] = 0$, also $I \subset Z$ nach Lemma 9. (1).

BEWEIS VON HAUPTSATZ 3.

(a) Sei zunächst R primer Ring. Für alle $a, b \in R$ und $z \in Z$

gilt

$$z[a, b] = [za, b] = f(za, b).$$

Ist Z nicht endlich, so erhält man durch Homogenisierung $[a, b] = 0$ für alle $a, b \in R$. Ist Z endlich, also Z Körper, so sei o.E. $F \subset Z$ wegen $F1 \subset Z$. Nach [1; Theorem 6, p. 455 und Theorem 7, p. 464] ist R endlicher einfacher Ring. Nach Lemma 8. (2) ist R Körper.

(b) Ist R halbprim, so ist $R' = 0$ nach (a).

(c) Für einen beliebigen Ring gilt $R' \subset Z$ nach (b), Lemma 7. (3) und Lemma 9. (1). Anwendung von Lemma 16 auf die subdirekt irreduziblen Bilder von R erbringt $R' = 0$.

4. Beweis zu Beispiel 3.

Seien $u, v \in R$. Ist $\det[u, v] \neq 0$, so gilt $[u, v]^{2j} = 1$, also Beispiel 3. (*) für $x = u$ und $y = v$. O.E. sei deshalb $\det[u, v] = 0$, somit $[u, v]^2 = 0$.

Es reicht zu zeigen:

$$(a) [u, v] = g(u, v).$$

Ist $\det(u) \neq 0$ oder $\det(v) \neq 0$, so gilt $u^k = 1$ oder $v^k = 1$, also (a). O.E. sei deshalb zusätzlich $\det(u) = 0 = \det(v)$.

Zunächst bemerken wir:

(b) Mit $[u, v] = g(u, v)$ gilt $[ru, sv] = g(ru, sv)$ für alle $r, s \in K$.
Aus

$$(c) \{u^k[u, v], [u, v]u^k, v^k[u, v], [u, v]v^k\} = \{0, [u, v]\}$$

folgt (a). Es reicht deshalb (c) zu zeigen:

Ist genauer $u = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ und $v = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$, so gilt:

$$(d) u^2 = (a + d)u \text{ und } v^2 = (e + h)v.$$

(e) Für $a = 1 = e$ oder $d = 1 = h$ gilt

$$0 = \det[u, v] = (1 + bg)(1 + cf)(b - f)(c - g).$$

Für $a = 1 = e$ oder $d = 1 = h$ ermöglicht (e) eine Fallunterscheidung mit der man bei Beachtung von (d) leicht (c) verifiziert.

Gemäß (b) sei deshalb o.E. $ae = 0 = dh$. Ist

$$b = 0 = f \quad \text{oder} \quad c = 0 = g,$$

so zeigt man unmittelbar (c).

Gemäß (b) sei deshalb o.E. ($b = 1$ oder $f = 1$) und ($c = 1$ oder $g = 1$). Nun folgt leicht (c).

Übrigens gilt im Ring der Matrizen $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ mit $a, b \in K$ sogar die Identität $[x, y] = (x^j + y^j - x^j y^j)[x, y]$.

BEWEIS ZU BEISPIEL 4.

(1) $\Leftarrow$ gilt nach Lemma 8. (1).

$\Leftarrow$: Zunächst ist K_2 algebraisch über F . Seien $u, v \in K_2$:

Ist $\det(u) \neq 0$, so gibt es $f(x) \in F[x]$, so daß $u = u^2 f(u)$, also $[u, v] = [u^2 f(u), v]$. O.E. sei deshalb $\det(u) = 0$ und analog $\det(v) = 0$.

Ist $\det[u, v] \neq 0$, so gibt es $f(x) \in F[x]$, so daß $[u, v] = [u, v]^2 f([u, v])$. O.E. sei deshalb $\det[u, v] = 0$.

Sei nun genauer $u = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ und $v = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$.

Ist $a + d \neq 0$, so gibt es $f(x) \in F[x]$, so daß $(a + d)f(a + d) = 1$, also $u^2 f(u) = u(a + d)f(a + d) = u$, somit $[u, v] = [u^2 f(u), v]$. O.E. sei deshalb $a + d = 0$ und analog $e + h = 0$.

Für $a \neq 0 \neq e$ ist $u = a \begin{pmatrix} 1 & r \\ -r^{-1} & -1 \end{pmatrix}$ und $v = e \begin{pmatrix} 1 & s \\ -s^{-1} & -1 \end{pmatrix}$, also

$$0 = \det[u, v] = (ae)^2(1 - rs^{-1})(1 - r^{-1}s)(r - s)(s^{-1} - r^{-1}),$$

somit $r = s$, demnach $[u, v] = 0$.

O.E. sei $a = 0$ oder $e = 0$. Jetzt erhält man leicht die Behauptung.

(2) $\Leftarrow$: Die Annahme, K sei nicht endlich, führt analog Beweis von Hauptsatz 3, Schritt (a), auf den Widerspruch $[K_2, K_2] = 0$.

$\Leftarrow$ gilt nach Beispiel 3.

(3) $\Leftarrow$: Nach Lemma 8. (1) ist K $\mathbb{Z}$ -algebraisch, also $\text{char } K \neq 0$. Weiter schließt man mit (1).

$\Leftarrow$ gilt nach (1).

(4) gilt nach Lemma 8. (1) und (1).

LITERATUR

- [1] P. M. COHN, *Algebra*, vol. 2, John Wiley & Sons, London - New York - Sydney - Toronto, 1977.
- [2] I.N. HERSTEIN, *The structure of a certain class of rings*, Amer. J. Math., **75** (1953), pp. 864-871.
- [3] I. N. HERSTEIN, *Rings with Involution*, University of Chicago Press, Chicago, 1976.
- [4] S. LANG, *Algebra*, Addison-Wesley Publishing Company, Reading, Massachusetts - Menlo Park, California - London - Sydney - Manila, 1971.
- [5] J. E. McLAUGHLIN - A. ROSENBERG, *Zero divisors and commutativity of rings*, Proc. Amer. Math. Soc., **4** (1953), pp. 203-211.
- [6] T. NAKAYAMA, *On the commutativity of certain division rings*, Cand. J. Math., **5** (1953), pp. 242-244.
- [7] T. NAKAYAMA, *A remark on the commutativity of algebraic rings*, Nagoya Mat. J. **14** (1959), pp. 39-44.

Manoscritto pervenuto in redazione il 26 febbraio 1980.