Rendiconti
del
Seminario Matematico
della
Università di Padova

Franco Parodi

Categoria degli universi di dispositivi e categoria delle T-algebre

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 62 (1980), p. 1-15

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1980__62__1_0>

REND. SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol. 62 (1980)

Categoria degli universi di dispositivi e categoria delle T-algebre.

FRANCO PARODI (*)

Introduzione.

L'esigenza di formulare una impostazione globale della teoria dei dispositivi ha indotto G. Darbo [1] ad individuare le operazioni di composizione in rete ed a considerare totalità di dispositivi chiuse rispetto a tali operazioni.

Universi di dispositivi e morfismi tra questi costituiscono una categoria già considerata in [1]; nell'intento di studiare proprietà di questa categoria (tale studio sarà oggetto di un successivo lavoro) è parso opportuno introdurre la categoria delle T-algebre ridotte sul $\mathfrak{T}$-anello T dei trasduttori elementari che dimostriamo essere equivalente alla categoria degli universi di dispositivi.

L'opportunità di considerare questa categoria non è solo strettamente tecnica; la nozione di T-algebra costituisce infatti una assiomatizzazione del calcolo formale dei dispositivi in un linguaggio più consueto di quello usato nella assiomatizzazione di universo di dispositivi, essendo le T-algebre insieme strutturati algebricamente.

È interessante osservare, a riprova della naturalezza delle strutture qui definite, che la struttura di $\mathfrak{T}$-anello è equivalente alla struttura di PROP (product and permutation category) che è già stata presa in considerazione da altri autori [3] per esigenze di diversa origine.

(*) Indirizzo dell'A.: Istituto di Matematica dell'Università - Via L. B. Alberti 4 - 16132 Genova.

Lavoro eseguito nell'ambito dei gruppi di ricerca matematica del C.N.R.

Richiamiamo per comodità di lettura le definizioni di universo di dispositivi e di morfismo tra universi date da G. Darbo in [1].

Definizione. La coppia $(\mathfrak{D}, \sigma)$ dove $\mathfrak{D}$ è un funtore definito nella categoria dei trasduttori [2] a valori nella categoria degli insiemi e σ è una trasformazione naturale

$$\sigma_{\alpha,\beta}\colon \mathfrak{D}_\alpha \times \mathfrak{D}_\beta \to \mathfrak{D}_{\alpha+\beta}$$

è un universo di dispositivi se sono soddisfatti i seguenti assiomi:

1) Assioma di restrizione

È commutativo il diagramma

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{D}_\alpha \times \mathfrak{D}_\beta \arrow[r, "\sigma_{\alpha,\beta}"] \arrow[dr, "\pi"'] & \mathfrak{D}_{\alpha+\beta} \arrow[d, "\varrho^*"] \\
 & \mathfrak{D}_\alpha
\end{tikzcd}$$

dove π è la proiezione canonica, ϱ^* l'applicazione indotta dal funtore sul trasduttore $\varrho\colon \alpha + \beta \to \alpha$ reciproco dell'inclusione canonica.

2) Assioma di commutatività

È commutativo il diagramma

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{D}_\alpha \times \mathfrak{D}_\beta \arrow[r, "\sigma_{\alpha,\beta}"] \arrow[d] & \mathfrak{D}_{\alpha+\beta} \arrow[d] \\
\mathfrak{D}_\beta \times \mathfrak{D}_\alpha \arrow[r, "\sigma_{\beta,\alpha}"] & \mathfrak{D}_{\beta+\alpha}
\end{tikzcd}$$

dove le frecce verticali sono gli isomorfismi canonici.

3) Assioma di associatività

$$\begin{tikzcd}
(\mathfrak{D}_\alpha \times \mathfrak{D}_\beta) \times \mathfrak{D}_\gamma \arrow[r] \arrow[d] & \mathfrak{D}_{(\alpha+\beta)+\gamma} \arrow[d] \\
D_\alpha \times (\mathfrak{D}_\beta \times \mathfrak{D}_\gamma) \arrow[r] & \mathfrak{D}_{\alpha+(\beta+\gamma)}
\end{tikzcd}$$

dove le frecce verticali sono gli isomorfismi canonici, le frecce orizzontali sono i morfismi canonicamente individuati da σ,

4) Assioma di unità

$$\mathfrak{D}_{\emptyset} = \{1\}$$

Definizione. Siano $(\mathfrak{D}, \sigma)$ e $(\mathfrak{D}', \sigma')$ universi di dispositivi, diciamo Φ un morfismo dell'universo $(\mathfrak{D}, \sigma)$ nell'universo $(\mathfrak{D}', \sigma')$ se Φ è una trasformazione naturale del funtore $\mathfrak{D}$ nel funtore $\mathfrak{D}'$ tale che sia commutativo il diagramma

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{D}_\alpha \times \mathfrak{D}_\beta \arrow[r, "\sigma_{\alpha,\beta}"] \arrow[d, "\Phi_\alpha \times \Phi_\beta"'] & \mathfrak{D}_{\alpha+\beta} \arrow[d, "\Phi_{\alpha+\beta}"] \\
\mathfrak{D}'_\alpha \times \mathfrak{D}'_\beta \arrow[r, "\sigma'_{\alpha,\beta}"'] & \mathfrak{D}'_{\alpha,\beta}
\end{tikzcd}$$

Richiamiamo infine per motivare la definizione che daremo della struttura di T-algebra, le proprietà formali del calcolo dei dispositivi.

Se A, B, C sono dispositivi dell'universo $(\mathfrak{D}, \sigma)$, $A \in \mathfrak{D}_\alpha$, $B \in \mathfrak{D}_\beta$, $C \in \mathfrak{D}_\gamma$ e $\varphi\colon \alpha \to \beta$, $\psi\colon \beta \to \gamma$, $\varrho\colon \alpha \to \alpha'$, $\sigma\colon \beta \to \beta'$ sono trasduttori, posto per definizione $A + B = \sigma_{\alpha,\beta}(A, B)$ e $\varphi A = \varphi_*(A)$ si ha ovviamente;

$$\psi(\varphi A) = (\psi\varphi) A$$

$$(A + B) + C = A + (B + C) \quad (^1)$$

$$(\varrho + \sigma)(A + B) = \varrho A + \sigma B$$

1. Definizione di T-algebra.

Definizione 1. Diciamo $\mathfrak{T}$-anello un insieme bigraduato $T = (T^n_m)_{m,n\in\mathbf{N}}$ in cui sono date due operazioni (2)

$$\cdot : \ T^p_n \times T^n_m \to T^p_m \qquad \text{per ogni } m, n, p \in \mathbf{N} \ (^3)$$

$$+ : \ T^n_m \times T^q_p \to T^{n+q}_{m+p} \qquad \text{per ogni } m, n, p, q \in \mathbf{N}$$

(1) L'eguaglianza scritta è abusiva, i due elementi si corrispondono in un ismorfismo naturale (assioma 2).

(2) Un elemento φ di T^n_m sarà detto un elemento di T ($\varphi \in T$) di bigrado (m, n).

(3) Il simbolo « $\cdot$ » che denota tale operazione sarà di regola omesso senza che ciò crei ambiguità.

soddisfacenti le seguenti proprietà:

1 T. « Associatività di $\cdot$ »: se $\varphi \in T^q_p$, $\psi \in T^p_n$, $\chi \in T^n_m$ allora

$$\chi(\psi\varphi) = (\chi\psi)\varphi$$

2 T. « Identità locale rispetto a $\cdot$ »: per ogni $n \in \mathbf{N}$ esiste in T^n_n un elemento ε_n tale che se $\varphi \in T^n_m$ e $\psi \in T^p_n$ allora $\varepsilon_n\varphi = \varphi$ e $\psi\varepsilon_n = \psi$ inoltre per ogni $n, m \in N$ $\varepsilon_n + \varepsilon_m = \varepsilon_{n+m}$.

3 T. « Associatività di $+$ »: se $\varphi \in T^n_m$, $\psi \in T^q_p$, $\chi \in T^s_r$ allora

$$\chi + (\psi + \varphi) = (\chi + \psi) + \varphi$$

4 T. « Elemento neutro rispetto a $+$ »; $T^0_0 = \{0\}$ e se $\varphi \in T^n_m$ allora

$$0 + \varphi = \varphi = \varphi + 0 .$$

5 T. « Pseudo distributività »: se $\varphi \in T^n_m$, $\chi \in T^p_n$, $\psi \in T^r_q$, $\tau \in T^s_r$ allora

$$(\tau + \chi)(\psi + \varphi) = (\tau\psi) + (\chi\varphi)$$

Sia T un assegnato $\mathfrak{T}$-anello

DEFINIZIONE 2. Diciamo T-algebra un insieme graduato $H = (H^n)_{n\in\mathbf{N}}$ in cui sono date due leggi di composizione (4)

$$+ : H^n \times H^m \to H^{n+m} \qquad \text{per ogni } n, m \in \mathbf{N}$$

$$\circ : \ T^n_m \times H^m \to H^n \qquad \text{per ogni } n, m \in \mathbf{N} \ (^5)$$

soddisfacenti le seguenti proprietà;

1 H. « Associatività mista »: se $\varphi \in T^n_m$, $\psi \in T^p_n$, $h \in H^m$ allora

$$\psi(\varphi h) = (\psi\varphi)h$$

2 H. « Identità »; se $h \in H^n$ allora $\varepsilon_n h = h$

(4) Un elemento h di H^n sarà detto un elemento di H ($h \in H$) di grado n.

(5) Il simbolo « $\circ$ » che denota tale legge di composizione esterna sarà di regola omesso senza che ciò crei ambiguità.

3 H. « Associatività di $+$ »: se $h \in H^m$, $k \in H^n$, $l \in H^p$ allora

$$h + (k + l) = (h + k) + l$$

4 H. « Elemento neutro rispetto a $+$ »: esiste in H^0 un elemento 0 tale che se $h \in H^n$ allora $0 + h = h = h + 0$

5 H. « Pseudo distributività »: se $\psi \in T_r^s$, $\varphi \in T_m^n$, $h \in H^r$, $k \in H^m$ allora

$$(\psi + \varphi)(h + k) = (\psi h) + (\varphi k)$$

Consideriamo per ogni $n \in \mathbf{N}$ l'insieme $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$ se $n \geqslant 1$, $[0] = \emptyset$; consideriamo il gruppo S_n di tutte le permutazioni di $[n]$ (gruppo simmetrico di grado n).

Se $\alpha \in S_n$ e $\beta \in S_m$ si definisce la permutazione somma come la permutazione che opera sui primi n elementi di $[n + m]$ come α e sui rimanenti m come β:

$$(\alpha + \beta)(\iota) = \begin{cases} \alpha(\iota) & \text{se } 1 \leqslant \iota \leqslant n \\ n + \beta(\iota - n) & \text{se } n + 1 \leqslant \iota \leqslant n + m \,. \end{cases}$$

Tale operazione non è ovviamente commutativa, si noti tuttavia che se $\alpha \in S_n$ e $\beta \in S_m$

$$(\alpha + \beta)\tau_{m,n} = \tau_{m,n}(\beta + \alpha)$$

essendo $\tau_{m,n}$ la permutazione di $[m + n]$ che scambia ordinatamente i primi m elementi di $[m + n]$ con gli ultimi n:

$$\tau_{m,n}(\iota) = \begin{cases} n + \iota & \text{se } 1 \leqslant \iota \leqslant m \\ \iota - m & \text{se } m + 1 \leqslant \iota \leqslant m + n \,. \end{cases}$$

Sia T un $\mathcal{C}$-anello, per ogni $n \in \mathbf{N}$ T_n^n è un semigruppo con identità.

DEFINIZIONE 3. Un $\mathcal{C}$-anello T si dice permutativo se per ogni $n \in N$ il gruppo S_n è immerso come sottogruppo nel gruppo di tutti gli elementi invertibili di T_n^n e inoltre se per ogni $\alpha \in S_n$ e $\beta \in S_m$ la somma $\alpha + \beta$ in T_{n+m}^{n+m} è la permutazione somma di α e β in S_{n+m} infine se verifica la proprietà

6 T. « Legge di permutazione »: se $\varphi \in T^n_m$, $\psi \in T^q_p$ allora

$$(\psi + \varphi)\tau_{m,p} = \tau_{n,q}(\varphi + \psi) \text{ } (^6)$$

Sia T un $\mathfrak{T}$-anello permutativo.

DEFINIZIONE 4. Una T-algebra H si dirà permutativa se verifica la proprietà:

6 H. « Legge di permutazione »: se $h \in H^n$, $k \in H^m$ allora

$$h + k = \tau_{m,n}(k + h)$$

DEFINIZIONE 5. Una T-algebra permutativa H si dice ridotta se $H_0 = \{0\}$.

Siano T un $\mathfrak{T}$-anello, H e K T-algebre.

DEFINIZIONE 6. Diciamo $\Phi\colon H \to K$ morfismo di T-algebre un morfismo Φ di insiemi graduati $\Phi = (\Phi^n)_{n\in\mathbf{N}}$, $\Phi^n\colon H^n \to K^n$ applicazione per ogni $n \in \mathbf{N}$, tale che

1) Se $h \in H^n$, $k \in H^m$ allora $\Phi^{n+m}(h + k) = \Phi^n(h) + \Phi^m(k)$
2) $\Phi^0(0) = 0$
3) Se $\psi \in T^n_m$, $h \in H^m$ allora $\Phi^n(\psi h) = \psi\Phi(h)$.

È ovvio che date H, K, J T-algebre e $\Phi\colon H \to K$, $\Psi\colon K \to J$ morfismi di T-algebre, $(\Psi\Phi); H \to J$ è ancora un morfismo di T-algebre

Il morfismo $I\colon H \to H$, $I = (I^n)_{n\in\mathbf{N}}$ con $I^n\colon H^n \to H^n$ identità per ogni $n \in \mathbf{N}$, è morfismo identico di T-algebre.

T-algebre e morfismi costituiscono una categoria che diremo la categoria delle T-algebre.

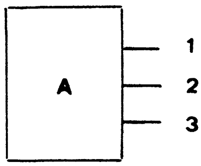
ESEMPI.

1) Il modello a livello euristico da cui trae spunto la definizione di T-algebra e che a livello teorico verrà affrontato e studiato nel seguito, è fornito dai « dispositivi elettrici » con i loro terminali e dalle operazioni che su di essi si compiono per collegarli in rete.

L'insieme di tutti i dispositivi elettrici è un insieme graduato dal numero dei terminali di ogni singolo dispositivo.

(6) La struttura di $\mathfrak{T}$-anello permutativo è equivalente alla struttura nota nella lettura col nome di PROP (product and permutation category) [3].

Rappresenteremo spesso dispositivi con raffigurazioni del tipo:

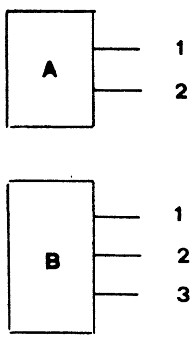


A dispositivo a tre terminali

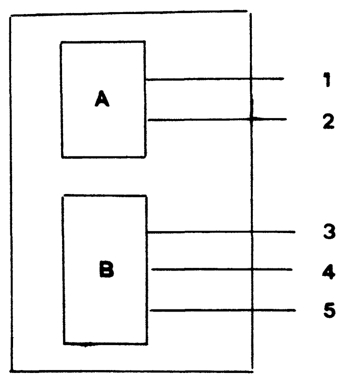
La « somma » di due dispositivi (intesa come assemblaggio senza ulteriori collegamenti) assegna nell'insieme dei dispositivi una operazione che associa ad ogni coppia di dispositivi un dispositivo che ha come numero di terminali la somma dei numeri dei rispettivi terminali.

Ad esempio con la rappresentazione già usata

Dati

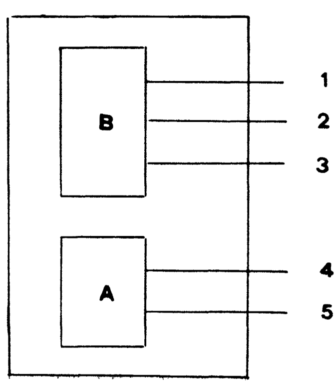


sarà $A + B$



Si intuisce che non è detto che tale somma sia commutativa $A + B$ differisce infatti da $B + A$ per una permutazione di terminali essendo

$B + A$

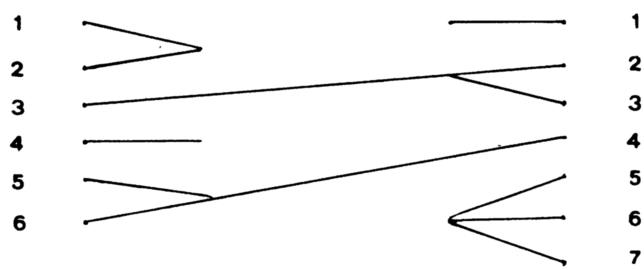


Il $\mathcal{T}$-anello che opera sull'insieme dei dispositivi è l'insieme di tutti i trasduttori elementari, ovvero le operazioni che si fanno sui terminali dei dispositivi: « cortocircuitazione » di terminali, « soppressione » di terminali, « aggiunta di terminali fittizi », « sdoppiamento » di terminali.

Tali operazioni trasformano un dispositivo con un certo numero di terminali in un nuovo dispositivo con un nuovo numero di terminali.

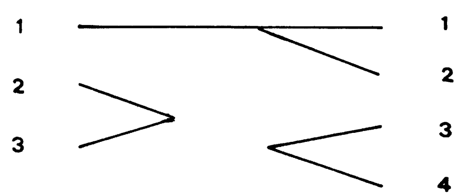
L'insieme dei trasduttori risulta così bigraduato, ogni trasduttore individua il numero di terminali del dispositivo su cui opera e il numero dei terminali del dispositivo trasformato.

Rappresenteremo spesso trasduttori con grafi del tipo:



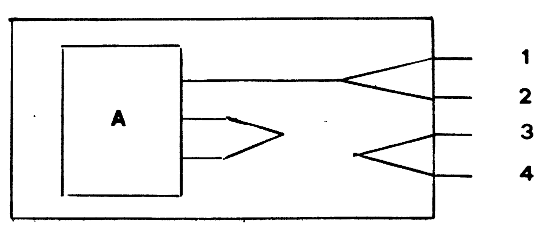
trasduttore di 6 in 7

Così se ad esempio φ è il trasduttore seguente di 3 in 4



φ

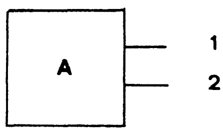
ed A un dispositivo a 3 terminali, φA sarà:



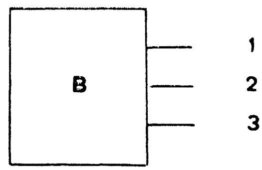
Composto di due trasduttori consecutivi sarà ovviamente il trasduttore che si ottiene operando consecutivamente con i due trasduttori; la somma di due trasduttori sarà il trasduttore che si ottiene per giustapposizione dei due senza ulteriori collegamenti.

Interpretiamo infine su questo modello euristico la « permutatività »; è espressivo il seguente esempio:

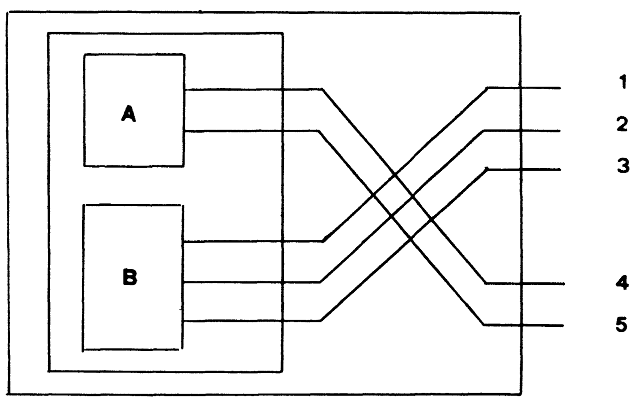
dati



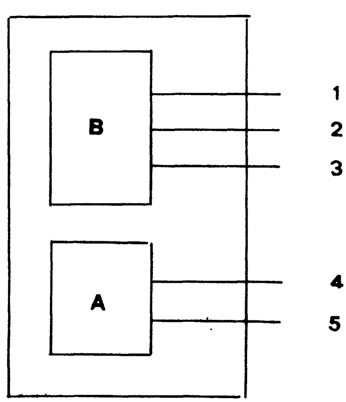
e



$\tau_{2,3}(A + B)$



$B + A$



2) Sia k un corpo.

Diciamo per ogni $n, m \in \mathbf{N}$ T^n_m l'insieme delle matrici $n \times m$ a coefficienti in k (se $n = 0$ oppure $m = 0$ $T^n_m = \{\emptyset\}$).

Consideriamo l'insieme bigraduato $T = (T^n_m)_{m,n\in\mathbf{N}}$ ed in T le operazioni:

$\cdot$: $T^p_n \times T^n_m \to T^p_m$ il prodotto righe per colonne di matrici

$+$: $T^n_m \times T^q_p \to T^{n+q}_{m+p}$ la somma diretta di matrici nel senso seguente:

siano A matrice $n \times m$ B matrice $q \times p$

$$A + B = \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & B \end{array}\right) \text{ matrice } (n+q)\times(m+p)\,.$$

Si verifica facilmente che T con le operazioni dette verifica le proprietà 1 $T, \ldots, 5$ T ed è pertanto un $\mathcal{T}$-anello; è inoltre un $\mathcal{T}$-anello permutativo infatti per ogni $n \in \mathbf{N}$ il gruppo S_n si immerge come sottogruppo nel gruppo delle matrici $n \times n$ invertibili facendo corrispondere ad ogni permutazione α dell'insieme $[n]$ la matrice di permutazione $p_\alpha = (p_{i,j})$ con $p_{i,j} = \delta_{i,\alpha(j)}$.

Verifichiamo che se A è una matrice $n \times m$, B una matrice $q \times p$

$$(B + A)\,\tau_{m,p} = \tau_{n,q}(A + B)$$

essendo per ogni $r, s \in \mathbf{N}$

$$\tau_{r,s} = \left(\begin{array}{c|c} 0 & I_s \\ \hline I_r & 0 \end{array}\right) \quad (I_k \text{ matrice identica di ordine } k)$$

infatti

$$(B + A)\,\tau_{m,p} = \left(\begin{array}{c|c} B & 0 \\ \hline 0 & A \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} 0 & I_p \\ \hline I_m & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} 0 & B \\ \hline A & 0 \end{array}\right)$$

$$\tau_{n,q}(A + B) = \left(\begin{array}{c|c} 0 & I_q \\ \hline I_n & 0 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & B \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} 0 & B \\ \hline A & 0 \end{array}\right).$$

Consideriamo poi per ogni $n \in \mathbf{N}$ lo spazio vettoriale k^n ($k^0 = 0$) i cui elementi denoteremo con vettori colonna.

Consideriamo l'insieme graduato $K = (k^n)_{n\in\mathbf{N}}$ con le operazioni seguenti:

$+: k^n \times k^n \to k^{n+m}$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \quad \text{per ogni} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in k^n , \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \in k^m$$

$*: T^n_m \times k^m \to k^n$

$A * y$ è il prodotto righe per colonne di A matrice $n \times m$ per il vettore colonna $y \in k^m$.

Si prova facilmente che K con le operazioni così definite verifica le proprietà $1\,H, \ldots, 5\,H$ ed è pertanto una T-algebra; K è inoltre una T-algebra permutativa, verifichiamo infatti che se

$$x \in K^n , \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad y \in k^m , \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

$$x + y = \tau_{m,n}(y + x)$$

infatti

$$(y + x) = \left(\begin{array}{c|c} 0 & I_n \\ \hline I_m & 0 \end{array}\right)\begin{pmatrix} y \\ \hline x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ \hline y \end{pmatrix} = x + y \, .$$

È poi ovvio che K è una T-algebra ridotta.

3) Sia S un insieme, consideriamo W il monoide graduato delle parole su S: per ogni $n \in \mathbf{N}$ $n \neq 0$

$$W^n = \{\varphi | p\colon [n] \to S, \text{ applicazione}\} \qquad W^0 = \{\emptyset\} \, .$$

Se $p \in W^n$ e $q \in W^m$, $p + q W^{n+m}$ è la parola somma di p e q che si ottiene per giustapposizione di p e q nell'ordine, cioè se $n \neq 0$ ed $m \neq 0$ $\quad p + q\colon [n + m] \to S$

$$(p + q)(\iota) = \begin{cases} p(\iota) & \text{se } 1 \leqslant \iota \leqslant n \\ q(\iota - n) & \text{se } n + 1 \leqslant \iota \leqslant n + m \end{cases}$$

Diciamo per ogni $n, m \in \mathbf{N}$ T^n_m l'insieme delle applicazioni di $[m]$ in $[n]$, $T = (T^n_m)_{m,n \in \mathbf{N}}$ ha la struttura naturale di $\mathcal{T}$-anello e W la struttura naturale di T-algebra, definendo il prodotto tra $\varphi \in T^n_m$ e $p \in W^m$ l'applicazione composta φp $[n] \xrightarrow{\varphi} [m] \xrightarrow{p} S$.

Le proprietà $1, \ldots, 5$ sono ovviamente verificate.

W è un'algebra permutativa, essendo $S_n \subset T^n_n$ si ha ovviamente $p + q = \tau_{m,n}(q + p)$ per ogni $p \in W^n$, $q \in W^m$.

2. Equivalenza fra la categoria delle T-algebre ridotte e la categoria degli « Universi di dispositivi ».

Consideriamo la sottocategoria $\mathcal{T}_N$ della categoria $\mathcal{T}$ [2] dei trasduttori che ha per oggetti i tratti iniziali di $\mathbf{N}$ e per mappe tutti i trasduttori fra tratti iniziali di N.

$\mathcal{T}_N$ è lo scheletro [4] della calegoria $\mathcal{T}$.

Se $n, m \in N$ $[n] + [m]$ denota la seguente realizzazione della somma diretta di $[n]$ ed $[m]$ nella sottocategoria delle applicazioni; $[n] + [m] = [n + m]$ con le iniezioni

$$i_1 \colon [n] \to [n + m] \qquad i_1(x) = x \quad \text{per ogni } x \in [n]$$

$$i_2 \colon [m] \to [n + m] \qquad i_2(x) = n + x \quad \text{per ogni } x \in [m]$$

DEFINIZIONE 7. Diciamo N-universo di dispositivi la coppia (D, s) $D \colon \mathcal{T}_N \to \mathcal{S}$ funtore, $\mathcal{S}$ essendo la categoria degli insiemi,

$$s \colon D_{[n]} \times D_{[m]} \to D_{[n+m]}$$

trasformazione naturale di funtori soddisfacenti gli assiomi $1, 2, 3, 4$.

Si dà in modo ovvio la definizione di morfismo fra N-universi di dispositivi.

N-universi di dispositivi e morfismi costituiscono una categoria che indicheremo con $\mathcal{U}_N$, con $\mathcal{U}$ indicheremo invece la categoria degli universi di dispositivi.

TEOREMA 1.1. La categoria degli N-universi di dispositivi è equivalente alla categoria degli universi di dispositivi.

Dimostrazione. Siano $\mathcal{C} \underset{\iota}{\overset{\varepsilon}{\rightleftarrows}} \mathcal{C}_N$ la coppia di funtori che con le ovvie trasformazioni naturali danno l'equivalenza tra le due categorie $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}_N$.

Sia $(\mathfrak{D}, \sigma)$ un universo di dispositivi, consideriamo $(\mathfrak{D}\iota, \sigma\iota)$ (7), è ovviamente un N-universo.

Sia Φ: $(\mathfrak{D}, \sigma) \to (\mathfrak{D}', \sigma')$ morfismo di $\mathcal{U}$,

Φi: $(\mathfrak{D}i, \sigma i) \to (\mathfrak{D}'i, \sigma' i)$ è ovviamente un morfismo di $\mathcal{U}_N$.

Resta così individuato un futore I: $\mathcal{U} \to \mathcal{U}_N$.

Sia (D, s) un N-universo di dispositivi, consideriamo $(D\varepsilon, s\varepsilon)$, è ovviamente un uninverso di dispositivi.

Sia F: $(D, s) \to (D', s')$ morfismo di $\mathcal{U}_N$

$F\varepsilon$: $(D\varepsilon, s\varepsilon) \to (D'\varepsilon, s'\varepsilon)$ è ovviamente un morfismo di $\mathcal{U}$.

Resta così individuato un funtore E: $\mathcal{U}_N \to \mathcal{U}$.

La coppia di funtori $\mathcal{U} \underset{E}{\overset{I}{\rightleftarrows}} \mathcal{U}_N$ con gli ovvii isomorfismi naturali sono una equivalenza di categorie.

Consideriamo ora per ogni $m, n \in \mathbf{N}$ l'insieme T^n_m dei trasduttori da $[m]$ in $[n]$, $T = (T^n_m)$ con le operazioni di composizione e di somma diretta di trasduttori è un $\mathcal{C}$-anello permutativo.

Teorema 1.2. La categoria degli N-universi di dispositivi è isomorfa alla categoria delle T-algebre ridotte.

Dimostrazione. Sia (D, s) un N-universo, definiamo

$A\big((D, s)\big) = (D_{[n]})_{n\in N}$ che risulta essere una T-algebra ridotta grazie agli assiomi Ax 1, Ax 2, Ax 3, Ax 4.

Se poi F: $(D, s) \to (D', s')$ è un morfismo di N-universi definiamo

$$A(F)\colon (D_{[n]})_{n\in N} \to (D'_{[n]})_{n\in N}$$

$$\big(A(F)\big)^n = F_{[n]}\colon D_{[n]} \to D'_{[n]}$$

$A(F)$ è ovviamente un morfismo di T-algebre.

(7) Indicheremo come di consueto con la medesima lettera un funtore e la trasformazione naturale identica del funtore medesimo in sè.

Risulta ovviamente A un funtore dalla categoria degli N-universi alla categoria delle T-algebre ridotte.

Sia H una T-algebra ridotta, definiamo $U(H) = (D, s)$ dove $D: \mathcal{C}_N \to \mathcal{S}$ è il funtore così definito:

$D_{[n]} = H^n$, per ogni $n \in N$ per ogni trasduttore $\varphi: [m] \to [n]$

$D\varphi: D_{[m]} \to D_{[n]}$ è l'applicazione $(D\varphi)(h) = \varphi h$ per ogni $h \in H^m$,

che D sia funtore è assicurato dalle proprietà 1 H, 2 H, e dove

s è la trasformazione naturale di funtori così definita:

$$s_{[n],[m]}: D_{[n]} \times D_{[m]} \to D_{[n]+[m]}$$

$$s_{[n],[m]}(h, k) = h + k \qquad \text{per ogni } h \in D_{[n]}, \ k \in D_{[m]},$$

che sia s trasformazione naturale è assicurato dalla proprietà 5 H.

Risulta $U(H)$ un N-universo; per mostrare ciò basta verificare l'assioma 1 di restrizione poichè i rimanenti assiomi sono banalmente verificati grazie alle proprietà 5 H, 6 H, ed al fatto che H è T-algebra ridotta.

Siano dunque $n, m \in N$ il diagramma

$$\begin{tikzcd} D_{[m]} \times D_{[n]} \arrow[r, "S_{[n],[m]}"] \arrow[dr, "\pi"'] & D_{[m]+[n]} \arrow[d, "D_\varrho"] \\ & D_{[m]} \end{tikzcd}$$

risulta commutativo; infatti notiamo che il trasduttore $\varrho: [m]+[n] \to [n]$ è somma dell'identità ε_n e del trasduttore σ reciproco dell'inclusione $[0] \to [m]$, $\varrho = \varepsilon_n + \sigma$; pertanto se $h \in D_{[m]}$, $k \in D_{[n]}$

$$D\varrho(h + k) = \varrho(h + k) = (\varepsilon + \sigma)(h + k) = \varepsilon h + \sigma k = h + 0 = h$$

essendo H T-algebra ridotta e 0 elemento neutro.

Se poi $\Phi: H \to H'$ è morfismo di T-algebre ridotte resta individuato in modo naturale un morfismo di N-universi

$$U(\Phi): U(H) \to U(H').$$

Risulta U un funtore della categoria delle T-algebre ridotte alla categoria degli N-universi, ed è immediato verificare che

$$UA = Id_{\mathfrak{U}_N} \quad \text{e} \quad AU = Id_{T\text{-Alg-Rid}}$$

Conseguenza immediata dei due teoremi precedenti è il seguente

TEOREMA 1.3. La categoria degli universi di dispositivi è equivalente alla categoria delle T-algebre ridotte.

BIBLIOGRAFIA

[1] G. DARBO, *Aspetti algebrico categoriali della teoria dei dispositivi*, Symposia Mathematica, **4** (1970), pp. 303-336.

[2] F. PARODI, *Simmetrizzazioni di una categoria*, part I e II, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, **44** (1970), pp. 185-262; parte III, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, **46** (1971), pp. 273-327.

[3] S. MAC LANE, *Natural associativity and commutativity*, Rice University Studies, **49**, no. 4 (1963), pp. 28-46.

[4] S. MAC LANE, *Categories for the Working Mathematician*, Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin, 1971.

[5] S. MAC LANE - G. BIRKOFF, *Algebra*, McMillan Company, 1967.

— F. PARODI, *Costruzione di un universo di dispositivi non lineari su una coppia di gruppi abeliani*, in corso di pubblicazione su Rend. Sem. Mat. Univ. Padova.

— S. TESTA, *Costruzione di un universo di dispositivi ciclicamente monotoni massimali*, in corso di stampa su Rend. Sem. Mat. Univ. Padova.

Manoscritto pervenuto in redazione il 21 gennaio 1979.