RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

MAURIZIO TROMBETTA

Strutture di convergenza per filtri

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 61 (1979), p. 91-114

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1979__61__91_0>

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1979, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (http://rendiconti.math.unipd.it/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

REND. SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol. 61 (1979)

Strutture di convergenza per filtri.

MAURIZIO TROMBETTA (*)

1. Introduzione.

In un lavoro di M. Dolcher ([1]) vengono esaurientemente studiate le relazioni intercorrenti fra le categorie $\mathcal{T}$ degli spazi topologici e $\mathcal{L}$ degli insiemi dotati di struttura di convergenza per successioni. Lo studio viene condotto attraverso l'introduzione di due funtori fra $\mathcal{T}$ e $\mathcal{L}$ nei due versi. In particolare, vi si affrontano i problemi della deducibilità di una struttura di convergenza da una topologia e viceversa.

Ora, ogni successione S su un insieme E è pensabile come un filtro φ_S sullo stesso insieme. È noto poi che in uno spazio topologico (E, τ) si dà una nozione di convergenza anche per i filtri e che, se in esso una successione S converge a un punto p, accade lo stesso anche per φ_S. Essendo dunque il concetto di filtro una generalizzazione di quello di successione, mi sono proposto, in questo lavoro, di studiare i legami intercorrenti fra le due strutture, quella di spazio topologico e la « struttura di convergenza per filtri », analogamente a quanto fatto per le successioni nel citato lavoro [1].

Ho dunque cominciato questo studio introducendo (n. 2) il concetto di « struttura di convergenza per filtri », adattando a questo caso i tre assiomi di Fréchet-Kuratowski (cfr. [1], pag. 68, per il caso delle successioni) sì da ottenere una nuova categoria $\mathcal{F}$. Fra le sottocategorie di $\mathcal{F}$, mi sono interessato a due che mi sono apparse signi-

(*) Indirizzo dell'A.: Istituto di Matematica dell'Università - Piazzale Europa 1 - 34100 Trieste.

ficative e corrispondenti, grosso modo, alle sottocategorie topologiche $\mathcal{T}_1$ e $\mathcal{T}_2$ degli spazi (T_1) e (T_2).

Ho poi introdotto i due funtori F di $\mathcal{T}$ in $\mathcal{F}$ e T di $\mathcal{F}$ in $\mathcal{T}$ (1) (n. 3 e 4) e ne ho studiato talune proprietà. Per quanto concerne la deducibilità di una topologia da una struttura di convergenza per filtri, la risposta è delle più semplici. Meno banale è, invece, la risposta al problema inverso (n. 5).

Ho affrontato, a questo punto, lo studio delle relazioni intercorrenti direttamente fra le categorie di « convergenza » $\mathfrak{L}$ e $\mathcal{F}$, cioè prescindendo dalla categoria $\mathcal{T}$. Ho così introdotto (n. 6) e studiato il funtore M di $\mathfrak{L}$ in $\mathcal{F}$ che traduce, in termini formali, l'idea di riguardare la convergenza di successioni come casi particolari di convergenza di filtri.

Ho, inoltre, affrontato (n. 7) alcune questioni riguardanti certi funtori composti in cui intervengono, fra l'altro, anche quelli già noti che legano le categorie $\mathfrak{L}$ e $\mathcal{T}$.

Alcune notazioni. Scriveremo SCS (SCF) in luogo di « struttura di convergenza per successioni (per filtri) ». Data una successione S su un insieme E, indicheremo con C_S una sua generica coda e, quando è il caso, con $C_S(n)$ quella coda che si ottiene prescindendo dai primi $n-1$ termini di S. Inoltre, $|S|$ indicherà l'insieme degli elementi di E che compaiono in S. Il filtro generato dalle code di S verrà sempre indicato con φ_S. Se x è un elemento di E, i simboli (x) e $[x]$ indicheranno sempre la successione di termine costante x e l'ultra filtro (u.f.) banale generato da tale elemento. Inoltre, dati uno spazio topologico (E, τ) e un suo punto p, con $\mathfrak{U}_p$ indicheremo sempre il filtro dei τ-intorni di p. In fine, dati due filtri φ e ψ su un medesimo insieme E, diremo che essi sono fra loro *concatenati* se, comunque si prendano un $B \in \varphi$ e un $D \in \psi$, è sempre $B \cap D \neq \phi$. Indicheremo con $\varphi \wedge \psi$ il loro filtro intersezione e, quando esiste, con $\varphi \vee \psi$ quello disgiunzione; scriveremo $\varphi < \psi$ per dire che φ è meno fine di ψ.

2. La categoria $\mathcal{F}$.

È noto che gli spazi topologici costituiscono una categoria $\mathcal{T}$ nel senso di Eilenberg e Maclane, in cui i morfismi o mappe sono le applicazioni continue. Parimenti è noto che gli insiemi dotati di una SCS,

(1) Il simbolo T ha qui un significato diverso da quello che ha in [1].

che intenderemo nel senso definito in [1], formano anch'essi una categoria $\mathfrak{L}$ i cui morfismi sono le applicazioni che conservano la convergenza: cioè un'applicazione $f\colon (E, \lambda) \to (E', \lambda')$, dove λ e λ' indicano due SCS, è una mappa di $\mathfrak{L}$ se accade che, per ogni successione

$$S \xrightarrow{\lambda} p \ (\in E), \text{ è } f(S) \xrightarrow{\lambda'} f(p) \ (\in E').$$

Vogliamo ora definire una categoria analoga alla $\mathfrak{L}$, partendo dai filtri anzichè dalle successioni.

DEFINIZIONE (2.1). Diremo che in un insieme non vuoto E è definita una *struttura di convergenza per filtri* (SCF) se è assegnata una legge Φ che ad ogni filtro φ di E associa un sottoinsieme E_φ (eventualmente vuoto) di E, in modo che siano soddisfatte le tre condizioni (assiomi di Fréchet-Kuratowski) più sotto riportate. Se $p \in E_\varphi$, diremo che p è un *punto limite* di φ o che φ *tende* o *converge* a p e scriveremo $\varphi \to p$, o, quando è il caso, $\varphi \xrightarrow{\Phi} p$.

Gli assiomi richiesti ad una SCF Φ sono i seguenti:

($FK\Phi 1$) – Per ogni punto $p \in E$, l'u.f. banale $[p]$ converge a p.

($FK\Phi 2$) – Se un filtro φ converge a p ($\in E$), e se è $\psi > \varphi$, allora anche ψ converge a p.

($FK\Phi 3$) – Se $\varphi \not\to p$, esiste $\psi > \varphi$ tale che nessun filtro più fine di ψ converge a p.

Per poter enunciare più comodamente la ($FK\Phi 3$), diamo la seguente

DEFINIZIONE (2.2). Un filtro φ è detto *totalmente divergente* da un punto p ($\in E$) se nessun filtro più fine di φ converge a p. Scriveremo, in tal caso, $\varphi \not\to p$.

Si può allora scrivere

($FK\Phi 3$) – Se $\varphi \not\to p$, esiste $\psi > \varphi$, tale che $\psi \not\to p$.

Essendo che, per ogni filtro φ, esiste un u.f. ψ che lo raffina, la condizione ($FK\Phi 3$) equivale alla

($FK\Phi 3'$) – Se $\varphi \not\to p$, esiste un u.f. $\psi > \varphi$, tale che $\psi \not\to p$.

O, ciò che è lo stesso,

($FK\Phi 3''$) – Se per ogni u.f. $\psi > \varphi$, $\psi \to p$, anche φ converge a p.

DEFINIZIONE (2.3). Diciamo che un puuto $p \in E$ è *isolato* in Φ se l'unico filtro convergente a p in Φ è l'u.f. banale $[p]$.

Ricordiamo ora che, data un'applicazione $f\colon E \to E'$ e dato un filtro φ su E, le imagini, attraverso f, degli insiemi di φ sono una base di filtro in E': indicheremo con $f(\varphi)$ il filtro da questa generato. Si verifica ora immediatamente che gli insiemi (E, Φ) dotati di una SCF costituiscono una categoria $\mathcal{F}$ non appena si assumano come morfismi quelle applicazioni $f\colon (E, \Phi) \to (E', \Phi')$ che conservano la convergenza dei filtri, ossia tali che, se $\varphi \xrightarrow{\Phi} p$ $(\in E)$, allora $f(\varphi) \xrightarrow{\Phi'} f(p)$ $(\in E')$.

I tre assiomi richiesti sono indipendenti. Infatti

ESEMPI (2.1). Sulla retta reale $\mathcal{R}$, consideriamo le tre seguenti leggi di convergenza. I punti $\neq 0$ siano sempre isolati. Verso 0: *a*) non converge alcun filtro; *b*) convergono solo i filtri successione che vi tendono in senso ordinario; *c*) convergono tutti e soli gli u.f. È immediato constatare che in ciascuna delle tre situazioni valgono esattamente due delle tre condizioni richieste da una SCF.

Notiamo che la condizione richiesta dal terzo assioma è molto forte. Taluni AA. la sostituiscono con altre più deboli. Per es. Frič in [2], sia pure con un linguaggio diverso da quello qui adottato, richiede come terza condizione che

(*a*) Se $\varphi \to p$, allora anche $\varphi \wedge [p] \to p$.

Solo come condizione supplementare, e in tal caso parla di *Limitierung*, richiede la

(*b*) Se φ e ψ convergono a p, ciò accade anche per $\varphi \wedge \psi$.

Mostriamo a tale riguardo che, supposti verificati i primi due assiomi, l'assioma $(FK\Phi 3)$ è strettamente più forte della condizione (*b*):

TEOREMA (2.2). *Data su E la SCF Φ, se i due filtri φ_1 e φ_2 convergono ad un punto p, allora converge a p anche il filtro $\varphi_1 \wedge \varphi_2$.*

DIM. Siano dati due filtri φ_1 e φ_2 entrambi convergenti a un punto p $(\in E)$, e sia $\xi = \varphi_1 \wedge \varphi_2$. Diciamo ψ un arbitrario filtro più fine di ξ. Mostriamo che ψ deve essere concatenato con almeno uno dei due filtri φ_1 e φ_2. Se così non fosse, esisterebbero $B_1, B_2 \in \psi$; $D_1 \in \varphi_1$; $D_2 \in \varphi_2$ tali che $B_1 \cap D_1 = B_2 \cap D_2 = \phi$. Da cui si dedurrebbe

$$\phi = (B_1 \cap B_2) \cap D_1 = (B_1 \cap B_2) \cap D_2$$

ossia:

$$(B_1 \cap B_2) \cap (D_1 \cup D_2) = \phi\,,$$

ma $B_1 \cap B_2 \in \psi$ ed anche $D_1 \cup D_2 \in \psi$, essendo $D_1 \cup D_2 \in \xi$. Si ha così un assurdo, Sia dunque, per fissare le idee, ψ concatenato con φ_1. Esiste allora $\psi \vee \varphi_1$. Un tale filtro deve convergere a p, essendo più fine di φ_1. Si conclude che ψ non può essere totalmente divergente da p. Ma allora il filtro ξ, non ammettendo raffinamenti totalmente divergenti da p, deve convergervi. c.v.d.

Che non valga l'implicazione opposta è provato dal seguente

Esempio (2.3). Sia E un insieme infinito e sia $p_0 \in E$. Definiamo in E la seguente legge Φ. Tutti gli elementi di E diversi da p_0 sono isolati. A p_0 convergono tutti gli u.f. di E, le loro intersezioni finite e i relativi raffinamenti. Gli assiomi $(FK\Phi 1)$, $(FK\Phi 2)$ e la condizione (b) sono ovviamente soddisfatti. Mostriamo che non vale la $(FK\Phi 3'')$. Sarà sufficiente trovare un filtro non convergente a p_0: proviamo che tale è il filtro ψ formato dal solo insieme E. Supposto $\psi \xrightarrow{\Phi} p_0$, esistono n u.f. $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ tali che $\psi > \varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \ldots \wedge \varphi_n$. Ma allora, comunque si prendano dei $B_i \in \varphi_i$, con $i = 1, 2, \ldots, n$, è $B_1 \cup \cup B_2 \cup \ldots \cup B_n \in \psi$; ossia $\bigcup_{i=1}^{n} B_i = E$. Sia $[p]$ un u.f. banale non compreso fra i φ_i, e prendiamo, per ogni $i = 1, 2, \ldots, n$, un $\bar{B}_i \in \varphi_i$ tale che $p \notin \bar{B}_i$. Si ha $\bigcup_{i=1}^{n} \bar{B}_i \neq E$. Assurdo. La $(FK\Phi 3'')$ non vale.

Il Teorema (2.2) ci dice che in una SCF Φ la famiglia Φ_p dei filtri convergenti a $p \in E$ è chiusa rispetto all'intersezione finita. Non è però detto che tale proprietà valga anche per l'intersezione arbitraria. Un controesempio in tal senso verrà dato al n. 6.

Anche per le SCF, come già per le SCS, si può introdurre il concetto di finezza. Precisamente:

Definizione (2.4). Date due SCF Φ e Ψ su un medesimo insieme E, diremo che la Φ è *meno fine* della Ψ e scriveremo $\Phi < \Psi$ se per ogni filtro φ e per ogni punto $p \in E$ l'essere $\varphi \xrightarrow{\Psi} p$ implica $\varphi \xrightarrow{\Phi} p$.

Si ha così una relazione d'ordine parziale nella famiglia delle SCF definibili su un dato insieme E.

Fra le sottocategorie di $\mathcal{F}$ ci occuperemo nel seguito esclusivamente delle due che ci sembrano le più interessanti. Precisamente:

$\mathcal{F}_1$) costituita da quelle SCF nelle quali ogni u.f. banale $[p]$ converge soltanto a p;

$\mathcal{F}_2$) formata da quelle SCF in cui ogni filtro converge al più verso un unico punto di E.

Si constata immediatamente che $\mathcal{F}_1$ e $\mathcal{F}_2$ sono due sottocategorie *piene* (« *full* ») e *superiormente sature* di $\mathcal{F}$ (cfr. [3], Cap. 1).

3. Il funtore F.

Sappiamo che in uno spazio topologico (E, τ) si dicono convergenti a un punto $p \in E$ tutti e soli i filtri di E più fini del filtro degli intorni $\mathfrak{U}_p$. Ebbene, la legge ora ricordata definisce su E proprio una SCF nel senso da noi inteso. Infatti le $(FK\Phi 1)$ e $(FK\Phi 2)$ sono immediate; proviamo la $(FK\Phi 3)$. Supposto $\varphi \nrightarrow p$, esiste $U^* \in \mathfrak{U}_p$ tale che $U^* \notin \varphi$. Se φ e $\mathfrak{U}_p$ non sono concatenati, non esiste alcun loro raffinamento comune e φ risulta totalmente divergente da p. In caso contrario, consideriamo la famiglia $\mathcal{A} = \{B - U^* : B \in \varphi\}$. Per ogni $B \in \varphi$, è $B - U^* \neq \phi$, altrimenti sarebbe $B \subset U^*$ e quindi $U^* \in \varphi$ contro la ipotesi. Inoltre, se $B_1, B_2 \in \varphi$, è

$$(B_1 - U^*) \cap (B_2 - U^*) = (B_1 \cap B_2) - U^* \in \mathcal{A}$$

essendo $B_1 \cap B_2 \in \varphi$. La famiglia $\mathcal{A}$ genera dunque un filtro $\psi > \varphi$ non concatenato con $\mathfrak{U}_p$, d'onde $\psi \nrightarrow p$.

Definizione (3.1). Dato uno spazio topologico (E, τ), diciamo $F(\tau)$ la SCF nella quale convergono a un punto $p \in E$ tutti e soli i filtri più fini del filtro degli intorni $\mathfrak{U}_p$.

Definizione (3.2). Dato un morfismo della categoria $\mathcal{T}$, cioè una applicazione continua f di uno spazio topologico (E, τ) in uno spazio topologico (E', τ'), diremo *applicazione associata* ad f quella legge $\bar{f}: E \to E'$ che si ottiene dalla f prescindendo dalle topologie τ e τ'. Analoga definizione per i morfismi delle altre categorie che incontreremo.

Definizione (3.3). Data una mappa $f: (E, \tau) \to (E', \tau')$, diciamo $F(f)$ la legge di $(E, F(\tau))$ in $(E', F(\tau'))$ che ha la medesima associata di f. In altre parole, $F(f)$ è la stessa legge f però pensata in $\mathcal{F}$ anzichè in $\mathcal{T}$.

Una tale definizione è coerente: infatti la legge $F(f)$ è effettivamente un morfismo di $\mathcal{F}$. Per provarlo, consideriamo un filtro φ $F(\tau)$-convergente a p $(\in E)$. È cioè $\varphi > \mathfrak{U}_p$ in τ. Ma allora, attesa la con-

tinuità della f, per ogni $V \in \mathfrak{U}_{f(p)}$, esiste un $U \in \mathfrak{U}_p$ tale che $f(U) \subset V$ e quindi $V \in f(\varphi)$. Si conclude che è $\mathfrak{U}_{f(p)} \prec f(\varphi)$, ossia che $f(\varphi) \xrightarrow{F(\tau)} f(p)$.

Da quanto precede, si conclude col

TEOREMA (3.1). *La legge F sopra definita è un funtore covariante di $\mathcal{T}$ in $\mathcal{F}$.*

TEOREMA (3.2). *Il funtore F è crescente rispetto all'ordine per finezza ed è iniettivo.*

DIM. Su un dato insieme E sia $\tau_1 \prec \tau_2$. Per ogni $p \in E$, risulta $\mathfrak{U}_p^{(1)} \prec \mathfrak{U}_p^{(2)}$ con ovvio significato dei simboli. Se $\varphi \xrightarrow{F(\tau_2)} p$, si ha $\varphi \succ \mathfrak{U}_p^{(2)} \succ \mathfrak{U}_p^{(1)}$ da cui $\varphi \xrightarrow{F(\tau_1)} p$. Se poi è $\tau_1 \neq \tau_2$, esiste un punto p_0 per cui è $\mathfrak{U}_{p_0}^{(1)} \neq \mathfrak{U}_{p_0}^{(2)}$ e quindi almeno uno dei due filtri non è più fine dell'altro; sia, per es., $\mathfrak{U}_{p_0}^{(1)} \not\succ \mathfrak{U}_{p_0}^{(2)}$. Si conclude che il filtro $\mathfrak{U}_{p_0}^{(1)}$ converge a p_0 in $F(\tau_1)$, ma non in $F(\tau_2)$. c.v.d.

Al n. 5 vedremo che il funtore F non è suriettivo. Chiudiamo questo numero con due risultati riguardanti la restrizione di F alle sottocategorie $\mathcal{T}_1$ e $\mathcal{T}_2$ di $\mathcal{T}$.

TEOREMA (3.3). *Si ha $F(\mathcal{T}_1) = \mathcal{F}_1 \cap F(\mathcal{T})$.*

DIM. *a*) Sia $(E, \tau) \in \mathcal{T}_1$. Detti p e q due elementi distinti di E, esistono un intorno U_p di p e un intorno U_q di q tali che $q \notin U_p$ e $p \notin U_q$. Ne risulta $\mathfrak{U}_p \not\prec [q]$ e $\mathfrak{U}_q \not\prec [p]$, da cui $[p] \xrightarrow{F(\tau)} q$ e $[q] \xrightarrow{F(\tau)} p$. Si conclude che è $F(\mathcal{T}_1) \subset \mathcal{F}_1$.

b) Sia ora $(E, \tau) \notin \mathcal{T}_1$. Esistono due punti distinti p e q di E tali che p appartiene ad ogni intorno U_q di q. Ma allora è $\mathfrak{U}_q \prec [p]$, da cui $[p] \xrightarrow{F(\tau)} q$. Si conclude che è $F(\mathcal{T} - \mathcal{T}_1) \subset \mathcal{F} - \mathcal{F}_1$. c.v.d.

E analogamente

TEOREMA (3.4). *Si ha $F(\mathcal{T}_2) = \mathcal{F}_2 \cap F(\mathcal{T})$.*

DIM. *a*) Sia $(E, \tau) \in \mathcal{T}_2$. Dati gli elementi distinti p e q di E, esistono un intorno U_p di p e un intorno U_q di q fra loro disgiunti. Ora se $\varphi \xrightarrow{F(\tau)} p$, è $\varphi \succ \mathfrak{U}_p$, ed essendo $U_q \notin \varphi$, è $\varphi \not\succ \mathfrak{U}_q$, ossia $\varphi \not\xrightarrow{F(\tau)} q$. Dall'arbitrarietà dei due punti considerati, si conclude che è $F(\mathcal{T}_2) \subset \mathcal{F}_2$.

b) Sia ora $(E, \tau) \notin \mathcal{T}_2$. Esistono due elementi distinti p e q di E tali che i relativi filtri degli intorni sono fra loro concatenati. Detto φ il filtro $\mathfrak{U}_p \vee \mathfrak{U}_q$, questo converge sia a p che a q. Si conclude che è $F(\mathcal{T} - \mathcal{T}_2) \subset \mathcal{F} - \mathcal{F}_2$. c.v.d.

In altre parole: *una SCF con unicità del limite può essere dedotta solo da una topologia di Hausdorff e da tali topologie si deducono solo SCF con unicità del limite.*

4. Il funtore T.

Sappiamo che in uno spazio topologico (E, τ) sono aperti quegli insiemi che appartengono al filtro degli intorni di ogni loro punto. Vogliamo generalizzare la cosa partendo da un'arbitraria SCF.

DEFINIZIONE (4.1). Data una SCF (E, Φ), diciamo $T(\Phi)$ la legge che proclama aperto un sottoinsieme A di E se e solo se A appartiene ad ogni filtro φ che sia Φ-convergente a qualche punto $p \in A$.

La legge $T(\Phi)$ introduce effettivamente su E una topologia: ne omettiamo la facile verifica.

DEFINIZIONE (4.2). Se $f\colon (E, \Phi) \to (E', \Phi')$ è un morfismo di $\mathcal{F}$, diciamo $T(f)$ la mappa di $(E, T(\Phi))$ in $(E', T(\Phi'))$ che ha la medesima applicazione associata di f.

Proviamo che $T(f)$ è effettivamente un morfismo di $\mathcal{T}$. Sia dunque $f\colon (E, \Phi) \to (E', \Phi')$ un morfismo di $\mathcal{F}$. Detto $A' \subset E'$ un aperto in $T(\Phi')$, mostriamo che $A = f^{-1}(A') \subset E$ è aperto in $T(\Phi)$. Sia dunque $\varphi \xrightarrow{\Phi} p$ $(\in A)$; si ha $f(\varphi) \xrightarrow{\Phi'} f(p)$ $(\in A')$, da cui $A' \in f(\varphi)$. Esiste pertanto un $X \in \varphi$ tale che $A' \supseteq f(X)$, da cui $f^{-1}(A') = A \supset X$ e quindi $A \in \varphi$. Dall'arbitrarietà di φ, si ha la tesi.

Da quanto precede si conclude che

TEOREMA (4.1). *La legge T sopra definita è un funtore covariante di $\mathcal{F}$ in $\mathcal{T}$.*

TEOREMA (4.2). *Il funtore T è monotono non decrescente.*

DIM. Siano dunque date su un insieme E due SCF Φ e Ψ, con $\Phi \prec \Psi$. Diciamo poi $A \subset E$ un aperto in $T(\Phi)$. A appartiene, per def., a tutti i filtri φ che sono Φ-convergenti a un punto $p \in A$, e quindi, in particolare, A appartiene ai filtri Ψ-convergenti a $p \in A$. In conclusione, A è aperto anche in $T(\Psi)$. c.v.d.

Vedremo al prossimo numero qualche risultato riguardante la restrizione del funtore T alle sottocategorie $\mathcal{F}_1$ e $\mathcal{F}_2$ di $\mathcal{F}$.

5. I funtori composti TF e FT.

Veniamo ora ad alcuni risultati riguardanti i funtori composti TF e FT. Cominciamo col seguente

TEOREMA (5.1). *Per ogni topologia τ, si ha $TF(\tau) = \tau$.*

DIM. *a*) Sia $A \subset E$ aperto in $TF(\tau)$. Dunque A appartiene ad ogni filtro φ $F(\tau)$-convergente a $p \in A$. In particolare, si ha che, per ogni $p \in A$, $A \in \mathfrak{U}_p$. Si conclude che A è aperto in τ.

b) Sia ora A aperto in τ. Dunque $A \in \mathfrak{U}_p$ per ogni $p \in A$. Anzi, per ogni $\varphi > \mathfrak{U}_p$ e per ogni $p \in A$, è $A \in \varphi$. Si conclude che A, appartenendo ad ogni filtro $F(\tau)$-convergente a qualche suo punto, è aperto in $TF(\tau)$. c.v.d.

COROLLARIO (5.2). *Ogni topologia τ è deducibile da qualche SCF, ossia, il funtore T è suriettivo.*

Un po' più complesso è il problema della deducibilità di una SCF da una topologia.

TEOREMA (5.3). *Una SCF Φ è deducibile da una topologia se e solo se è $\Phi = FT(\Phi)$.*

DIM. Se è $\Phi = FT(\Phi)$, è $\Phi = F[T(\Phi)]$, con $T(\Phi) \in \mathfrak{T}$. Se poi è $\Phi = F(\tau)$, si ha $\Phi = F[TF(\tau)] = FT[F(\tau)] = FT(\Phi)$. c.v.d.

TEOREMA (5.4). *Per ogni SCF Φ, risulta $FT(\Phi) < \Phi$.*

DIM. In (E, Φ) sia dato un filtro φ convergente verso un punto p. Ogni insieme A contenente p che sia aperto in $T(\Phi)$ appartiene pertanto a φ, quindi è $\varphi > \mathfrak{U}_p$. Si conclude che φ converge a p anche in $FT(\Phi)$. c.v.d.

Proviamo ora con un esempio che, in generale, non sussiste la relazione opposta, cioè che può essere $\Phi \neq FT(\Phi)$.

ESEMPIO (5.5). Sulla retta reale $\mathfrak{R}$, consideriamo la seguente SCF Φ. A ogni punto $p \neq 0$ convergono tutti e soli quei filtri che vi tendono in senso ordinario. Consideriamo poi la successione $S = (1/n)_{n \in N^+}$ e diciamo convergenti a 0 tutti e soli i filtri più fini di $\varphi_S \wedge [0]$. Proviamo che si tratta di una SCF. Le $(FK\Phi 1)$ e $(FK\Phi 2)$ sono ovvie e così pure la $(FK\Phi 3)$ per quanto riguarda i punti diversi

da 0. Sia dunque $\varphi \mapsto 0$, ossia $\varphi \not> \varphi_{\bar{S}} \wedge [0] = \varphi_{\bar{S}}$; dove $\bar{S}$ è la successione $1, 0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{3}, 0, \ldots\ldots, 0, 1/n, 0, \ldots$. Esiste dunque una coda $C^*_{\bar{S}}$ tale che $|C^*_{\bar{S}}| \notin \varphi$. Se φ e $\varphi_{\bar{S}}$ non sono concatenati, non ammettono raffinamenti in comune e $\varphi \not\mapsto 0$. In caso contrario, consideriamo la famiglia $\mathcal{A} = \{B - |C^*_{\bar{S}}| : B \in \varphi\}$. Si vede subito che $\phi \notin \mathcal{A}$ e che tale famiglia è chiusa rispetto alla intersezione finita. $\mathcal{A}$ è perciò base di un filtro ψ. Si conclude che ψ ($\gneq \varphi$), non essendo concatenato con $\varphi_{\bar{S}}$, è totalmente divergente da p. Mostriamo ora che si ha $FT(\Phi) \neq \Phi$. Descriviamo dunque la topologia $T(\Phi) = \tau$. Per i punti $p \neq 0$, gli intorni sono quelli ordinari. Invece, un insieme A contenente 0, per essere τ-aperto, deve contenere un insieme del tipo $U_{\bar{n}} = \{0\} \cup \left(\bigcup_{\bar{n}}^{+\infty}{}_n I_n\right)$, dove I_n è un intervallo aperto di centro $1/n$. Concludendo, il filtro $\mathfrak{U}_0$ dei τ-intorni di 0, cioè il filtro generato dagli insiemi del tipo U_n, è convergente a 0 in $FT(\Phi)$, ma non in Φ, non essendo più fine di $\varphi_{\bar{S}}$. È dunque, come si voleva, $FT(\Phi) \neq \Phi$.

Corollario (5.6). *Il funtore T non è iniettivo, ossia, una topologia può dedursi da più SCF.*

Infatti, per ogni *SCF* Φ è $T(\Phi) = T[FT(\Phi)]$, mentre può essere, come ora visto, $\Phi \neq FT(\Phi)$.

Dal Teorema (5.2) si deduce poi che

Corollario (5.7). *Per ogni topologia τ, la $F(\tau)$ è la SCF meno fine fra quelle da cui si deduce, mediante T, la topologia stessa.*

Inoltre

Corollario (5.8). *Una SCF può non essere deducibile da topologie, se lo è, tale topologia è unica.* Ossia: *Il funtore F non è suriettivo.*

Esaminiamo ora il problema di dare delle condizioni per la validità dell'uguaglianza $\Phi = FT(\Phi)$.

In una SCF Φ deducibile da una topologia convergono ad un punto p tutti e soli i filtri più fini di quello dei suoi τ-intorni. Si conclude che

Teorema (5.9). *Condizione necessaria affinchè una SCF Φ su E sia deducibile da una topologia è che, per ogni punto p, la famiglia Φ_p dei filtri Φ-convergenti a p abbia un minimo nel consueto ordine per finezza dei filtri.*

Tale condizione non è però sufficiente, come appare dall'Esempio (5.5). D'altra parte, possiamo osservare che, data la *SCF* (E, Φ) e

supposta verificata la condizione del Teor. (5.9), detto, al variare di p in E, $\bar{\varphi}_p$ il minimo di Φ_p, se vogliamo che sia $\Phi = F(\tau)$, il filtro $\bar{\varphi}_p$ deve coincidere con quello $\mathfrak{U}_p$ dei τ-intorni. Ma ciò comporta che il filtro $\bar{\varphi}_p$ deve soddisfare agli assiomi di Kuratowski sugli intorni. Quanto ai primi tre, la cosa è manifesta. Diversa è invece la situazione per l'ultimo. Questo è, infatti, di natura diversa dei precedenti in quanto lega tra loro intorni di punti diversi. Il problema è perciò quello di tradurre il quarto assioma degli intorni nel linguaggio delle *SCF*. Concludiamo col

TEOREMA (5.10). *Condizione necessaria e sufficiente affinchè una SCF* (E, Φ) *sia deducibile da una topologia è che, oltre alla condizione del Teor.* (5.9), *sia verificata anche la seguente: per ogni* $p \in E$ *e per ogni* $B \in \bar{\varphi}_p$, *esiste* $B' \subset B$ *con* $B' \in \bar{\varphi}_p$ *tale che* $B' \in \bar{\varphi}_q$ *per ogni* $q \in B'$.

Osserviamo ancora che, come già in precedenza notato e come si proverà al n. 6, data la *SCF* (E, Φ), non sempre le famiglie Φ_p ammettono un minimo. In ogni caso, però, ponendo $\bar{\varphi}_p = \wedge \Phi_p$, si constata immediatamente che è $\bar{\varphi}_p > \mathfrak{U}_p$.

Chiudiamo questo numero esaminando la restrizione del funtore T alle sottocategorie $\mathcal{F}_1$ e $\mathcal{F}_2$.

TEOREMA (5.11). *Si ha* $T(\mathcal{F}_1) = \mathcal{T}_1$.

DIM. *a*) Sia $(E, \Phi) \notin \mathcal{F}_1$. Esistono allora due punti distinti p e q di E tali che $[p] \xrightarrow{\Phi} q$. Un qualunque insieme A contenente q e che sia aperto in $T(\Phi)$ deve quindi appartenere a $[p]$, cioè p appartiene ad ogni aperto in $T(\Phi)$ che contiene q. Si conclude che $T(\Phi) \notin \mathcal{T}_1$.

b) Sia ora $(E, \Phi) \in \mathcal{F}_1$. Ciò significa che, per $p \neq q$, risulta $[p]$ non convergente a q in Φ e ciò accade anche per ogni $\varphi < [p]$. Quindi, se $\varphi \xrightarrow{\Phi} q$, è $\varphi \nless [p]$ e, di conseguenza, $E - \{p\} \in \varphi$. Dunque $E - \{p\}$ è un intorno di q. Data l'arbitrarietà di q, si ha che $E - \{p\}$ è aperto. Si conclude che $T(\Phi) \in \mathcal{T}_1$. c.v.d.

TEOREMA (5.12). *Si ha* $\mathcal{T}_2 \subset T(\mathcal{F}_2)$, *ossia* $T(\mathcal{F} - \mathcal{F}_2) \subset \mathcal{T} - \mathcal{T}_2$.

DIM. Sia $\Phi \in T^{-1}(\tau)$, con $\tau \in \mathcal{T}_2$. Si ha $FT(\Phi) \in F(\mathcal{T}_2) \subset \mathcal{F}_2$. Essendo $\Phi > FT(\Phi)$, si conclude che è $\Phi \in \mathcal{F}_2$. E dunque $\tau \in T(\mathcal{F}_2)$.

c.v.d.

In altre parole: *Ogni topologia di Hausdorff è deducibile solo da SCF con unicità del limite.*

Può però accadere che *da una SCF con unicità del limite si deduca una topologia non di Hausdorff* come mostra il seguente

ESEMPIO (5.13). Sia $E = \{p_{r,s}: r, s \in N^+\} \cup \{p'; p''\}$. Per ragioni di comodità, poniamo $R_h = \{p_{h,s}: s \in N^+\}$ e $C_k = \{p_{r,k}: r \in N^+\}$; $\forall h, k \in N^+$. Definiamo in E la seguente *SCF* Φ: I punti $p_{r,s}$ sono tutti isolati. Verso p' convergono tutti i filtri φ che soddisfano alle tre seguenti condizioni:

a') Non esiste alcun punto $x \neq p'$ che appartenga a tutti gli insiemi di φ.

b') Per ogni $\bar{B} \in \varphi$, l'insieme $\{k: B \cap C_k \neq \phi\}$ o è vuoto o è superiormente illimitato.

c') Esistono un $B_0 \in \varphi$ e un $h \in N^+$ tali che, per ogni $n \in N^+$, $B_0 \cap C_n$ non contiene più di h termini.

Verso p'' convergono tutti i filtri ψ che soddisfano alle tre condizioni seguenti:

a'') Non esiste alcun punto $x \neq p''$ che appartenga a tutti gli insiemi di ψ.

b'') Per ogni $\mathbb{D} \in \psi$, l'insieme $\{h: \mathbb{D} \cap R_h \neq \phi\}$ o è vuoto o è superiormente illimitato.

c'') Esistono un $\mathbb{D}_0 \in \psi$ e un $k \in N^+$ per i quali si ha $\mathbb{D}_0 \subset \{p''\} \cup \cup \left(\bigcup_{s=1}^{k} C_s\right)$.

Osserviamo, prima di procedere oltre, che la condizione b') (risp. b'')), nel caso che sia $\varphi \neq [p']$ (risp. $\psi \neq [p'']$), è conseguenza delle altre due. Avremo potuto dunque sostituirle imponendo la ($FK\Phi 1$) anche per i punti p' e p''; le abbiamo enunciate esplicitamente solo per ragioni di comodità. Proviamo ora che quella sopra definita è effettivamente una *SCF*. Per i punti diversi da p' e p'' non ci sono problemi, occupiamoci perciò solo di questi due elementi. La ($FK\Phi 1$) è ovvia. Sia ora $\varphi \to p'$ e sia $\psi > \varphi$. Il filtro ψ soddisfa alle condizioni a') e c') e quindi o $\psi = [p']$ o ψ soddisfa anche alla b') in base all'osservazione precedente. La ($FK\Phi 2$) è così provata per quanto riguarda il punto p', analogamente per p''. Proviamo ora la ($FK\Phi 3$). Sia φ non convergente a p': dunque φ non soddisfa ad almeno una delle tre condizioni di cui sopra.

1) Non sia soddisfatta la a'). Esiste dunque un $x \neq p'$ comune a tutti gli insiemi di φ. Si ha $\varphi < [x]$, con $[x] \not\to p'$.

2) Valga ora la prima condizione ma non la seconda. Devono allora esistere un $B_0 \in \varphi$ e un $k \in N^+$ tali che $B_0 \subset C_1 \cup C_2 \cup \ldots C_k \cup \cup \{p'\}$. Ora $B_0 - \{p'\}$ deve essere infinito e quindi deve contenere infiniti elementi di almeno una colonna $C_{\bar{k}}$. Detto ψ il filtro delle code della successione $(p_{r,\bar{k}})_{r \in N^+}$, questo è ovviamente concatenato con φ. Detto ξ un loro raffinamento comune, questo è totalmente divergente da p'.

3) Valgano, in fine, le prime due condizioni ma non la terza. Per ogni $B \in \varphi$ e per ogni $n \in N^+$, esiste un $k_B^{(n)} \in N^+$ tale che l'intersezione $B \cap C_{k_B^{(n)}}$ ha più di n elementi. Diciamo ψ il filtro generato dalla famiglia $\mathfrak{D} = \{\mathbb{D}_n\}_{n \in N^+}$, con $\mathbb{D}_n = \{p_{r,s}: r \geqslant n\}$. Un tale filtro è totalmente divergente da p' non potendo alcun suo raffinamento soddisfare alla c'). Basta ora considerare un qualunque raffinamento comune a φ e ψ per avere un filtro più fine di φ e totalmente divergente da p'. Per tale punto è provata così la $(FK\Phi 3)$. Quanto a p'', si vede che, salvo lo scambio di righe e colonne nella matrice infinita formata dai $p_{r,s}$, le condizioni a'') e b'') coincidono con le a') e b'). Ci si può dunque limitare al caso in cui l'unica condizione a non valere è la c''): un'argomentazione simile a quella del caso 3) ci permette di concludere che la $(FK\Phi 3)$ è ancora soddisfatta. La Φ è dunque una SCF. In essa vale l'unicità del limite, in quanto le condizioni a' e b' sono incompatibili con la c''), e così pure a'') e b'') con c'). Descriviamo ora la topologia $T(\Phi)$. I punti $p_{r,s}$ sono tutti isolati. Una base di intorni di p' è data dagli insiemi $U_k = \{p_{r,s}: s \geqslant k\} \cup \{p'\}$, mentre una base di intorni di p'' è quella formata dagli insiemi $V_f = \{p_{r,s}: r \geqslant f(s)\} \cup \cup \{p''\}$. È immediato constatare che l'intersezione di un insieme della prima famiglia con uno della seconda è sempre non vuota. Dunque $T(\Phi)$ non è di Hausdorff.

Osserviamo, inoltre, che, per il Teor. (3.4), $FT(\Phi) \notin \mathcal{F}_2$, da cui $FT(\Phi) \neq \Phi$. Dunque, contrariamente a quanto accade nel caso delle SCS, (cfr. [1], n. 14), *una SCF $\Phi \in \mathcal{F}_2$ può non essere deducibile da topologie.*

6. Il funtore M.

Riandando alle definizioni delle due categorie di « convergenza », $\mathfrak{L}$ e $\mathcal{F}$, appare chiara l'analogia delle due situazioni; anzi, la $\mathcal{F}$ è stata costruita proprio come una generalizzazione di $\mathfrak{L}$. È dunque naturale pensare alle convergenze di successioni come a casi particolari di con-

vergenze di filtri. Ma se, partendo da una SCS (E, λ), ci si limita a pensare le successioni come filtri, proclamando convergente a un punto $p \in E$ un filtro φ se e solo se $\varphi = \varphi_S$, con S λ-convergente a p, non si ottiene una SCF nel senso da noi inteso, salvo che nel caso banale in cui λ è una SCS in cui a ciascun punto $p \in E$ convergono solo successioni con un numero finito di elementi distinti. Infatti, se S è una successione con infiniti termini distinti, il filtro φ_S si può sempre raffinare con un altro che non sia di tipo successione e se φ_S tende a qualche punto di E, lo stesso deve accadere per ogni suo raffinamento.

Definizione (6.1). Data la SCS (E, λ), diciamo $M(\lambda)$ la SCF così definita: a un punto $p \in E$ convergono tutti e soli i filtri φ per i quali esiste una successione S λ-convergente a p con $\varphi \succ \varphi_S$.

Mostriamo che $M(\lambda)$ è effettivamente una SCF. Le $(FK\Phi 1)$ e $(FK\Phi 2)$ sono immediate; proviamo la $(FK\Phi 3)$. Sia dunque $\varphi \overset{M(\lambda)}{\longmapsto} p$. Per ogni successione S λ-convergente a $p \in E$, esiste una coda $C_S(\overline{n}_S)$ tale che $|C_S(\overline{n}_S)| \notin \varphi$. Perciò, se $n \geqslant \overline{n}_S$, è ancora $|C_S(n)| \notin \varphi$. Anzi, per ogni $n \geqslant \overline{n}_S$ e per ogni $B \in \varphi$, è $B \not\subset |C_S(n)|$, da cui $B - |C_S(n)| \neq \phi$. In conclusione, la famiglia $\mathcal{A} = \{B - |C_S(n)| : B \in \varphi;\ S \xrightarrow{\lambda} p;\ n \geqslant \overline{n}_S\}$ è base di un filtro $\psi \succsim_{\neq} \varphi$. Infatti se S_1 e S_2 tendono a p in λ, $n_1 \geqslant \overline{n}_{S_1}$ e $n_2 \geqslant \overline{n}_{S_2}$ e se, in fine, $B_1, B_2, \in \varphi$, si ha

$$(B_1 - |C_{S_1}(n_1)|) \cap (B_2 - |C_{S_2}(n_2)|) = \\ = (B_1 \cap B_2) - (|C_{S_1}(n_1)| \cup |C_{S_2}(n_2)|) \subset B_3 - |C_{S_3}(n_3)| \in \mathcal{A}\,,$$

dove si è posto $B_3 = B_1 \cap B_2 \in \varphi$ e S_3 indica la successione che si ottiene scrivendo alternativamente e nello stesso ordine i termini di S_1 e di S_2 ed in fine è $n_3 \geqslant \overline{n}_{S_3}$. Ora, qualunque sia la successione S λ-convergente a p, i filtri ψ e φ_S sono non concatenati e quindi privi di raffinamenti comuni. Si constata così che $\psi \not\longmapsto p$.

Definizione (6.2). Se $f: (E, \lambda) \to (E', \lambda')$ è un morfismo di $\mathfrak{L}$, diciamo $M(f): (E, M(\lambda)) \to (E', M(\lambda'))$ il morfismo di $\mathcal{F}$ che ha la medesima applicazione associata di f, secondo la Def. (3.2).

Per poter provare che $M(f)$ è effettivamente una mappa di $\mathcal{F}$, premettiamo due risultati di cui tralasciamo la facile verifica:

1) Se f è un'applicazione di un insieme A in un insieme B, e se $\varphi \prec \psi$ sono due filtri su A, si ha anche $f(\varphi) \prec f(\psi)$.

2) Sia f come sopra. Per ogni successione S di punti di A, si ha $f(\varphi_S) = \varphi_{f(S)}$.

Sia dunque $f\colon (E, \lambda) \to (E', \lambda')$ una mappa di $\mathfrak{L}$ e sia φ $M(\lambda)$-convergente a $p \in E$. Esiste dunque una successione S λ-convergente a p, con $\varphi > \varphi_S$. Ora, per l'ipotesi su f, $f(S) \xrightarrow{\lambda'} f(p) \in E'$. Concludendo, si ha $f(\varphi) > f(\varphi_S) = \varphi_{f(S)}$, che implica $f(\varphi) \xrightarrow{M(\lambda')} f(p)$, cioè la tesi.

Da quanto precede, risulta

TEOREMA (6.1). *La legge M è un funtore covariante di $\mathfrak{L}$ in $\mathcal{F}$.*

Dalla stessa definizione di M, è poi immediato che

TEOREMA (6.2). *Il funtore M è iniettivo e monotono crescente.*

Si vede subito che, per contro, M non è suriettivo. Basta infatti pensare a una SCF in cui sono convergenti dei filtri che non sono più fini di filtri del tipo successione. Se poi λ è la SCS ordinaria sulla retta reale, è immediato constatare che in $M(\lambda)$ la famiglia Φ_p dei filtri convergenti ad un dato punto p non è stabile rispetto all'intersezione arbitraria. Resta così provata l'affermazione fatta dopo l'Es. (2.3).

Occupiamoci ora della restrizione del funtore M a due sottocategorie di $\mathfrak{L}$, analoghe a quelle considerate per $\mathcal{F}$ Precisamente:

$\mathfrak{L}_1$) Costituita da quelle SCS in cui ogni successione costante non converge a più di un limite.

$\mathfrak{L}_2$) Formata da quelle SCS per cui vale l'unicità del limite.

TEOREMA (6.3). *Si ha* $M(\mathfrak{L}_1) = \mathcal{F}_1 \cap M(\mathfrak{L})$.

DIM. Sia $(E, \lambda) \in \mathfrak{L}_1$ e supponiamo che $(E, M(\lambda)) \notin \mathcal{F}_1$. Esistono allora un u.f. banale $[p]$ e un punto $q \neq p$ tali che $[p] \xrightarrow{M(\lambda)} q$. Deve dunque esistere $S \xrightarrow{\lambda} q$, con $[p] \geq \varphi_S$. Ciò implica che, per ogni $n \in N^+$, è $p \in |C_S(n)|$. Dunque p compare in S un numero infinito di volte, cioè S ammette una sottosuccessione S' di termine costante p che deve convergere anch'essa a q. Si ha così un assurdo da cui si conclude che è $M(\mathfrak{L}_1) \subset \mathcal{F}_1$. È poi banale che $M(\mathfrak{L} - \mathfrak{L}_1)$ sia contenuto in $\mathcal{F} - \mathcal{F}_1$. c.v.d.

TEOREMA (6.4). *Si ha* $M(\mathfrak{L}_2) = \mathcal{F}_2 \cap M(\mathfrak{L})$.

DIM. Sia $(E, \lambda) \in \mathfrak{L}_2$ e supponiamo che $(E, M(\lambda)) \notin \mathcal{F}_2$. Esiste dunque un filtro φ $M(\lambda)$-convergente a due punti distinti p e q di E. Devono esistere allora due successioni S_1 e S_2 convergenti in λ rispettivamente a p e a q tali che $\varphi > \varphi_{S_1}$ e $\varphi > \varphi_{S_2}$. Dunque i filtri φ_{S_1}

e φ_{S_2}, ammettendo un raffinamento comune, devono essere concatenati. Ciò implica che le due successioni S_1 e S_2 ammettono una sottosuccessione S in comune. Infatti, posto $S_1 = (x_n)_{n\in N^+}$ e $S_2 = (y_n)_{n\in N^+}$, diciamo i_1 il minimo indice per cui $x_i \in |S_1| \cap |S_2| \neq \phi$ e j_1 il minimo indice per cui $y_j = x_{i_1}$. Chiamiamo poi i_2 $(> i_1)$ il minimo indice per cui $x_i \in |C_{S_1}(i_1 + 1)| \cap |C_{S_2}(j_1 + 1)| \neq \phi$ e j_2 $(> j_1)$ il minimo indice per cui $y_j = x_{i_2}$. E così di seguito: i_n $(> i_{n-1})$ è il minimo indice per cui $x_i \in |C_{S_1}(i_{n-1} + 1)| \cap |C_{S_2}(j_{n-1} + 1)| \neq \phi$ e j_n $(> j_{n-1})$ il minimo indice per cui è $y_j = x_{i_n}$. Il procedimento non può aver termine dopo un numero finito di passaggi. Si costruisce così la successione

$$S = x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n}, \ldots \equiv y_{j_1}, y_{j_2}, \ldots, y_{j_n}, \ldots$$

che è una sottosuccessione comune di S_1 e S_2. Ma allora la successione S deve essere contemporaneamente λ-convergente a p e a q. Dall'assurdo si deduce che $(E, M(\lambda)) \in \mathcal{F}_2$. Si ha poi banalmente $M(\mathfrak{L} - \mathfrak{L}_2) \subset \mathcal{F} - \mathcal{F}_2$. c.v.d.

Data la SCF $(E, \Phi) \in M(\mathfrak{L})$, vogliamo costruire la SCS λ da cui proviene la Φ tramite M. La risposta è, in verità, del tutto naturale, ma, per provarlo, dobbiamo premettere un risultato riguardante le SCS. Precisamente:

LEMMA (6.5). *Siano date, in una SCS (E, λ), due successioni S e S^* tali che S converga ad un punto p e $\varphi_{S^*} > \varphi_S$, allora $S^* \xrightarrow{\lambda} p$.*

DIM. Per ogni coda C_S di S, $|C_S| \in \varphi_{S^*}$. Ne segue che, per ogni $n \in N^+$, esiste un $k \in N^+$ tale che $|C_{S^*}(k)| \subset |C_S(n)|$. Perciò, se un elemento x compare in S un numero finito di volte, deve comparire al più un numero finito di volte anche in S^*. Mostriamo ora che S e S^* ammettono una sottosuccessione comune $\bar{S}$. Se esiste un elemento x che compare infinite volte in S^*, dovendo x comparire infinite volte anche in S, basterà prendere come $\bar{S}$ la successione di termine costante x. Se, per contro, nessun termine di S^* si ripete infinite volte, ogni coda di S^* contiene infiniti elementi distinti e, di conseguenza, ciò accade anche per ogni coda di S. Poniamo $S = (x_n)_{n\in N^+}$ e $S^* = (y_n)_{n\in N^+}$. Ora, data la coda $C_S(1) = S$, esiste un k_1 per cui $|C_{S^*}(k_1)| \subset |C_S(1)|$. Quindi $y_{k_1} \in |C_S(1)|$ ed esiste perciò un h_1 per cui è $y_{k_1} = x_{h_1}$. Procediamo per ricorrenza: data la coda $C_S(h_r + 1)$, esiste $k_{r+1} > k_r$ tale che $|C_{S^*}(k_{r+1})| \subset |C_S(h_r + 1)|$, da cui $y_{k_{r+1}} = x_{h_{r+1}} \in$ $\in |C_S(h_r + 1)|$. Tale procedimento non può avere termine dopo un

numero finito di passaggi: si costruisce così la successione

$$\bar{S} = y_{k_1}, y_{k_2}, \ldots, y_{k_n}, \ldots \equiv x_{h_1}, x_{h_2}, \ldots, x_{h_n}, \ldots$$

che è una sottosuccessione comune ad S e S^*. In conclusione, siccome $\bar{S} \xrightarrow{\lambda} p$, non può essere S^* totalmente divergente da p. D'altra parte, per ogni sottosuccessione $\tilde{S}$ di S^*, è $\varphi_{\tilde{S}} > \varphi_{S^*} > \varphi_S$ e neanche $\tilde{S}$ può divergere totalmente da p. S^* deve pertanto essere λ-convergente a p. c.v.d.

La tesi del Lemma vale ovviamente anche se, in particolare, è $\varphi_{S^*} = \varphi_S$. Una prima conseguenza di questo risultato è espressa dal seguente

COROLLARIO (6.6). *Data la SCS* (E, λ), *se* $S \to p$ *e se* S^* *si ottiene da* S *permutandone i termini, allora* $S^* \to p$.

DIM. Risultà $\varphi_{S^*} = \varphi_S$, come si prova senza difficoltà.
Possiamo ora provare il

TEOREMA (6.7). *Data la SCF* (E, Φ), *se* $\Phi = M(\lambda)$, *con* $\lambda \in \mathfrak{L}$, *la SCS* λ *è definibile mediante la legge*

$$(*) \qquad S \xrightarrow{\lambda} p \text{ se e solo se } \varphi_S \xrightarrow{\Phi} p\,.$$

DIM. Il « solo se » è banale, proviamo il « se ». Sia dunque S una successione tale che $\varphi_S \xrightarrow{\Phi} p$. Esiste perciò una successione S^* λ-convergente a p tale che $\varphi_S > \varphi_{S^*}$. Ma allora, per il lemma, anche S converge a p in λ. c.v.d.

Osserviamo che, data una *SCF* (E, Φ), la legge $(*)$ del teorema precedente, se non è soddisfatta l'ipotesi $\Phi = M(\lambda)$, non definisce, in generale, una *SCS*. Infatti

ESEMPIO (6.8). Consideriamo l'insieme E dell'Esempio (5.13) con la stessa *SCF*. Diciamo poi χ la legge che proclama convergenti ad un punto p tutte e sole le successioni i cui filtri delle code vi convergono in Φ. Mostriamo che questa non è una *SCS* in quanto non è soddisfatta la condizione $(FK3)$ (cfr. [1], pag. 68). Consideriamo dunque la successione

$$S = p_{11}, p_{12}, p_{22}, p_{13}, p_{23}, p_{33}, \ldots, p_{1k}, p_{2k}, \ldots, p_{kk}, \ldots\,.$$

Il relativo filtro φ_S non è Φ-convergente a p', in quanto non soddisfa alla condizione c'). Dunque $S \overset{\chi}{\not\to} p'$. Ma se S' è una qualunque sottosuccessione di S, S' contiene elementi di un numero infinito di colonne della matrice infinita formata dagli elementi $p_{r,s}$. Si può perciò sempre estrarre da S' una nuova sottosuccessione S'' che contenga non più di un elemento per ogni colonna. Dunque $S'' \overset{\chi}{\to} p'$, poichè $\varphi_{S''} \overset{\Phi}{\to} p'$. Si conclude che S' non è totalmente divergente da p', e, data la sua arbitrarietà, non vale la condizione $(FK3)$.

Data una SCF (E, Φ), la legge $(*)$ può definire su E una SCS anche se $\Phi \notin M(\mathfrak{L})$, come si vede nel caso che Φ sia la SCF ordinaria sulla retta reale. Per contro non è detto che se tale legge definisce effettivamente una SCS λ, sia $\Phi = M(\lambda)$ come prova il seguente

Esempio (6.9). Sia $E' = \{p_{r,s}, r, s \in N^+\}$ e sia poi $E = E' \cup \{p\}$. Su E' sia definita una SCS λ' che non coincida con quella discreta, e poniamo $\Phi' = M(\lambda')$. Definiamo ora su E la seguente SCF Φ: Per i punti $p_{r,s}$ la Φ coincide con la Φ'; a p convergono tutti e soli i filtri più fini del filtro $\bar{\varphi}$ generato dagli insiemi $B_{n,f} = \{p_{r,s}: r \geqslant n;\ s \geqslant f(r)\}$. Si tratta effettivamente di una SCF, come si prova senza difficoltà. Applicando a Φ la legge $(*)$ si ottiene la SCS λ che coincide con λ' su E' e in cui il punto p è isolato. È poi immediato che risulta $M(\lambda) \neq \Phi$.

Chiudiamo questo numero con una condizione sufficiente affinchè la legge $(*)$ definisca, a partire da una SCF (E, Φ), una SCS (E, λ).

Teorema (6.10). *Data la SCF (E, Φ), se per ogni $p \in E$, la famiglia Φ_p dei filtri Φ-convergenti a p ammette un minimo $\bar{\varphi}_p$, allora la legge $(*)$ definisce su E una SCS λ.*

Dim. Gli assiomi $(FK1)$ e $(FK2)$ sono ovvi; proviamo il terzo. Se la successione $S = (x_n)_{n \in N^+}$ non è λ-convergente a $p \in E$, ossia se il filtro φ_S non vi converge in Φ, si ha $\varphi_S \not\geqslant \bar{\varphi}_p$. Se i filtri φ_S e $\bar{\varphi}_p$ non sono concatenati, si ha subito $S \not\to p$, altrimenti, diciamo B_0 un insieme di $\bar{\varphi}_p$ che non appartiene a φ_S, e consideriamo l'insieme J degli indici $k \in N^+$ per cui $x_k \notin B_0$. L'insieme J è infinito, altrimenti B_0, contenendo una coda di S, apparterebbe a φ_S. Si può dunque costruire una sottosuccessione S' di S tutta di termini non appartenenti a B_0. Essendo i filtri $\varphi_{S'}$ e $\bar{\varphi}_p$ non concatenati, la successione S' è totalmente divergente da p. c.v.d.

7. Su taluni funtori composti.

Passiamo ora ad uno studio di talune questioni che coinvolgono tutte tre le categorie da noi considerate. Vogliamo precisamente analizzare e confrontare fra loro alcuni funtori che si ottengono componendo quelli fin qui definiti e quelli introdotti in [1] fra le categorie $\mathfrak{L}$ e $\mathfrak{T}$. A proposito di questi ultimi, conviene qui ricordare le loro definizioni e taluni risultati che sfrutteremo in seguito. Ricordiamo ancora che indicheremo con R quel funtore che in [1] è chiamato T.

Il funtore $L\colon \mathfrak{T} \to \mathfrak{L}$. Dato uno spazio topologico (E, τ), indicheremo con $L(\tau)$ la SCS in cui convergono ad un punto $p \in E$ tutte e sole le successioni S che finiscono in ogni τ-intorno di p; ossia $S \xrightarrow{L(\tau)} p$ se è $\varphi_S \succ \mathfrak{U}_p$.

Il funtore $R\colon \mathfrak{L} \to \mathfrak{T}$. Data una *SCS* (E, λ), si definisce $R(\lambda)$ lo spazio topologico in cui un sottoinsieme A di E è aperto se e solo se ogni successione S λ-convergente a qualche punto di A finisce in A; ossia se $A \in \varphi_S$.

Le leggi L e R sono due funtori covarianti fra le categorie $\mathfrak{L}$ e $\mathfrak{T}$ che portano ogni morfismo dell'una in quella mappa dell'altra che ha la medesima applicazione associata nel senso della Def. (3.2). I funtori L e R sono monotoni non decrescenti rispetto all'ordine per finezza definito in ciascuna delle due categorie.

Per ogni topologia τ è $RL(\tau) \succ \tau$, mentre per ogni *SCS* λ è $LR \cdot (\lambda) \prec \lambda$, con $LR(\lambda) = \lambda$ se $\lambda \in \mathfrak{L}_2$.

La condizione $\lambda = LR(\lambda)$ (risp. $\tau = RL(\tau)$) è necessaria e sufficiente per la deducibilità di una *SCS* da una topologia (di una topologia da una *SCS*).

Possiamo riassumere la situazione riguardante i funtori fin qui introdotti col seguente diagramma

$$\begin{tikzcd}
 & \mathfrak{T} \arrow[dl, shift left, "L"] \arrow[dr, shift left, "F"] & \\
\mathfrak{L} \arrow[ur, shift left, "R"] \arrow[rr, "M"] & & \mathfrak{F} \arrow[ul, shift left, "T"]
\end{tikzcd}$$

Il primo risultato fondamentale è il seguente

TEOREMA (7.1). *Per ogni SCS* (E, λ), *si ha* $R(\lambda) = TM(\lambda)$.

DIM. *a*) Sia $A \subset E$ aperto in $R(\lambda)$. Ciò significa che, per ogni S λ-convergente a $p \in A$, S finisce in A che implica $A \in \varphi_S$. Se ora $\varphi \xrightarrow{M(\lambda)} p \in A$, esiste una S λ-convergente a p con $\varphi > \varphi_S$. Si deduce che $A \in \varphi$, e, dall'arbitrarietà di φ, che A è aperto in $T[M(\lambda)] = TM(\lambda)$.

b) Sia ora $A \subset E$ aperto in $TM(\lambda)$. Dunque $A \in \varphi$, per ogni filtro φ $M(\lambda)$-convergente a qualche suo punto. In particolare, $A \in \varphi_S$, per ogni S λ-convergente a p. Dunque A è aperto in $R(\lambda)$. c.v.d.

Vediamo ora alcune conseguenze di questo teorema. Abbiamo visto che fra le categorie $\mathfrak{L}$ e $\mathcal{F}$ opera il funtore M, inoltre si può ovviamente definire anche il funtore composto FR. Ebbene:

TEOREMA (7.2). *Per ogni SCS* (E, λ), *si ha* $M(\lambda) > FR(\lambda)$.

DIM. Sia φ $M(\lambda)$-convergente a $p \in E$: esiste pertanto una successione S che vi converge in λ, tale che $\varphi_S < \varphi$. Essendo, d'altra parte, $\varphi_S > \mathfrak{U}_p$ in $R(\lambda)$, si ha $\varphi > \mathfrak{U}_p$, da cui $\varphi \xrightarrow{FR(\lambda)} p$. c.v.d.

È subito visto che, in generale, non sussiste la relazione opposta. Basta, a tale scopo, che λ sia la *SCS* ordinaria sulla retta reale. Inoltre:

TEOREMA (7.3). *Condizione necessaria e sufficiente affinchè per una SCS* (E, λ) *sia* $M(\lambda) = FR(\lambda)$, *è che la SCF* $M(\lambda)$ *sia deducibile da una topologia* τ *che, per altro, è necessariamente la* $R(\lambda)$.

DIM. Se è $M(\lambda) = FR(\lambda)$, si ha $M(\lambda) = F[R(\lambda)]$. Se poi $M(\lambda)$ è deducibile da una topologia τ, si ha $M(\lambda) = F(\tau)$, da cui, per i Teoremi (7.1) e (5.1), si ha $R(\lambda) = TM(\lambda) = TF(\tau) = \tau$ e quindi $M(\lambda) = F[R(\lambda)] = FR(\lambda)$. L'unicità di τ è poi assicurata dall'iniettività di T. c.v.d.

Una tale condizione è, in verità, molto restrittiva, infatti:

TEOREMA (7.4). *Data la SCS* (E, λ), *se la SCF* $M(\lambda)$ *è deducibile dalla topologia* $R(\lambda)$, *in quest'ultima i filtri degli intorni di ogni punto di* E *sono dei filtri successione.*

DIM. Il filtro $\mathfrak{U}_p$ degli $R(\lambda)$-intorni di un qualunque punto $p \in E$ è $FR(\lambda)$-convergente a p. Se ora è $M(\lambda) = FR(\lambda)$, $\mathfrak{U}_p \xrightarrow{M(\lambda)} p$. Ciò comporta che esista una successione S λ-convergente a p, con $\mathfrak{U}_p > \varphi_S$. Essendo poi, per definizione di $R(\lambda)$, $\mathfrak{U}_p < \varphi_S$, si conclude che è $\mathfrak{U}_p = \varphi_S$. c.v.d.

Per quanto molto forte, questa condizione non è però neppure sufficiente. Infatti:

ESEMPIO (7.5). Sia E l'insieme formato dai punti delle due successioni $(x_n)_{n\in N^+}$, $(y_n)_{n\in N^+}$ e da un ulteriore elemento p, tutti distinti fra loro. Definiamo in E la seguente SCS λ. I punti x_n sono tutti isolati. A $y_{\bar{n}}$ convergono tutte e sole le successioni che contengono, almeno definitivamente, solo $x_{\bar{n}}$ o $y_{\bar{n}}$ o entrambi questi punti. A p convergono, oltre a (p), tutte e sole le successioni in cui, almeno definitivamente, compaiono solo p e degli y_{i_n} e in cui l'indice i_n diverge con n. Proviamo che si tratta di una SCS. Le $(FK1)$ e $(FK2)$ sono ovvie e così pure le $(FK3)$ per i punti diversi da p. Sia dunque S una successione non convergente a p. Da S si può estrarre una sottosuccessione S' fatta tutta di termini diversi da p. Se ora da S' si può ulteriormente estrarre una sottosuccessione S'' fatta solo di elementi x_h, si ha $S'' \not\to p$. In caso contrario, possiamo supporre che nessun x_h compaia in S'. Ma allora, non potendo divergere l'indice i_n, deve esistere un elemento $y_{\bar{n}}$ che compare infinite volte in S'. Tale elemento individua una sottosuccessione di S' totalmente divergente da p. Descriviamo ora la topologia $R(\lambda)$. I punti x_n sono isolati. Un intorno di $y_{\bar{n}}$ è un insieme che contiene, oltre allo stesso punto, anche $x_{\bar{n}}$. Un insieme A, per essere aperto, se contiene p, deve contenere una coda della successione $(y_n)_{n\in N^+}$ e, di conseguenza, anche la corrispondente coda della successione degli x_n. Si conclude che una base d'intorni per p è data dagli insiemi $U_n = \{p\} \cup \{x_k : k \geqslant n\} \cup \{y_h : h \geqslant n\}$. Possiamo anche dire che il filtro degli intorni di p coincide col filtro $\varphi_{\bar{S}}$, dove $\bar{S}$ è la successione $x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots, x_n, y_n, \ldots$. Dunque in $R(\lambda)$ il filtro degli intorni di ciascun punto di E è un filtro successione. Mostriamo, in fine, che, malgrado ciò, si ha $M(\lambda) \neq FR(\lambda)$, ossia che la SCF $M(\lambda)$ non è deducibile dalla topologia $R(\lambda)$. Infatti, per il filtro $\mathfrak{U}_p$ si ha che $\mathfrak{U}_p \xrightarrow{FR(\lambda)} p$, ma $\mathfrak{U}_p \overset{M(\lambda)}{\not\to} p$.

Vediamo altre due conseguenze del Teor. (7.1).

TEOREMA (7.6). *Per ogni SCS (E, λ), si ha $\lambda > LTM(\lambda)$. Inoltre è $\lambda = LTM(\lambda)$ se e solo se λ è deducibile da una topologia.*

DIM. Se $S \xrightarrow{\lambda} p \in E$, $\varphi_S \xrightarrow{M(\lambda)} p$ e quindi $\varphi_S > \mathfrak{U}_p$ in $TM(\lambda)$, da cui $S \xrightarrow{LTM(\lambda)} p$. Inoltre è $LTM(\lambda) = LR(\lambda)$ e sappiamo che l'eguaglianza $\lambda = LR(\lambda)$ equivale alla deducibilità di λ da una topologia. c.v.d.

Un esempio di SCS in cui non vale l'uguaglianza $\lambda = LR(\lambda)$ è dato dall'Es. (7.5) in cui basta considerare la successione degli x_n.

TEOREMA (7.7). *Per ogni spazio topologico* (E, τ), *si ha* $TML(\tau) > \tau$. *Risulta inoltre* $TML(\tau) = \tau$ *se e solo se* τ *è deducibile da una SCS.*

DIM. Sia $A \subset E$ aperto in τ. Ogni successione S $L(\tau)$-convergente a qualche suo punto finisce in A e quindi $A \in \varphi_S$. Dunque A appartiene ad ogni filtro $ML(\tau)$-convergente ad un suo punto. Si conclude che A è aperto in $TML(\tau)$. Inoltre è $TML(\tau) = RL(\tau)$ e sappiamo che l'uguaglianza $RL(\tau) = \tau$ equivale alla deducibilità di τ da una SCS. c.v.d.

ESEMPIO (7.8). Sulla retta reale, definiamo la seguente topologia τ. I punti diversi da 0 sono isolati. Una base di intorni di 0 è data dagli insiemi che si ottengono togliendo da un suo intorno ordinario i punti $(\neq 0)$ di un'arbitraria successione tendente a 0 in senso ordinario. Che si tratti di una topologia è immediato. Si vede subito poi che la $L(\tau)$ è la SCS discreta, come pure la SCF $ML(\tau)$, e la topologia $TML(\tau)$.

Abbiamo così un esempio di topologia τ per cui è $\tau \neq TML(\tau)$.

Vogliamo ora confrontare i funtori F e ML operanti fra le categorie $\mathcal{T}$ e $\mathcal{F}$.

TEOREMA (7.9). *Per ogni spazio topologico* (E, τ), *si ha* $ML(\tau) > F(\tau)$.

DIM. Se $\varphi \xrightarrow{ML(\tau)} p \in E$, esiste una successione S $L(\tau)$-convergente a p con $\varphi > \varphi_S > \mathfrak{U}_p$. Si conclude che $\varphi \xrightarrow{F(\tau)} p$. c.v.d.

TEOREMA (7.10). *Dato uno spazio topologico* (E, τ), *condizione necessaria e sufficiente affinchè risulti* $F(\tau) = ML(\tau)$ *è che in* τ *il filtro degli intorni di ciascun punto sia un filtro successione.*

DIM. *a*) Per ogni $p \in E$, esista una successione S_p tale che $\mathfrak{U}_p = \varphi_{S_p}$. Se $\varphi \xrightarrow{F(\tau)} p$ è $\varphi > \mathfrak{U}_p$. Essendo poi S_p $L(\tau)$-convergente a p, il filtro φ_{S_p} vi converge in $ML(\tau)$. Si conclude che φ converge a p anche in $ML(\tau)$. Dunque, tenuto conto del teorema precedente, si ha $F(\tau) = ML(\tau)$.

b) Se esiste $p_0 \in E$ per cui $\mathfrak{U}_{p_0}$ non è un filtro successione, si ha che $\mathfrak{U}_{p_0}$ tende a p_0 in $F(\tau)$, ma non in $ML(\tau)$. Se, infatti, $\mathfrak{U}_{p_0}$ fosse $ML(\tau)$-convergente a p_0, esisterebbe una successione S $L(\tau)$-convergente al medesimo punto, con $\mathfrak{U}_{p_0} > \varphi_S$ e, dovendo essere $\varphi_S > \mathfrak{U}_{p_0}$, si avrebbe $\mathfrak{U}_{p_0} = \varphi_S$, contro l'ipotesi. c.v.d.

Per concludere, vogliamo fare qualche osservazione sul funtore composto MLT della categoria $\mathcal{F}$ in sè. Vogliamo, precisamente, confrontare le due SCF Φ e $MLT(\Phi)$. La situazione non è delle più semplici, come appare dai due seguenti

ESEMPI (7.11). *a*) Se Φ è la SCF ordinaria sulla retta reale, si constata subito che è $MLT(\Phi) \gneq \Phi$.

b) Sia $\Phi = M(\lambda)$, dove λ è la SCS dell'Es. (7.5). Data la successione $S = (x_n)_{n \in N^+}$, il corrispondente filtro φ_S converge a p in $MLT(\Phi)$, ma non in Φ come immediatamente si constata. È dunque $MLT(\Phi) \lneq \Phi$.

Sussiste, a tale riguardo, il seguente

TEOREMA (7.12). *Data la SCF (E, Φ), si ha:*

a) $\Phi > MLT(\Phi)$, *se* $\Phi \in M(\mathfrak{L})$;

b) $\Phi < MLT(\Phi)$, se $\Phi \in F(\mathfrak{T})$.

DIM. *a*) Dai Teoremi (7.6) e (6.2), si ha che, se è $\Phi = M(\lambda)$, risulta:

$$MLT(\Phi) = MLT[M(\lambda)] = M[LTM(\lambda)] < M(\lambda) = \Phi .$$

b) Dai Teoremi (5.1) e (7.9), si ha ora che, se è $\Phi = F(\tau)$, risulta:

$$MLT(\Phi) = MLT[F(\tau)] = ML[TF(\tau)] = ML(\tau) > F(\tau) = \Phi. \text{ c.v.d.}$$

COROLLARIO (7.13). *Se la SCF $(E, \Phi) \in M(\mathfrak{L}) \cap F(\mathfrak{T})$, si ha $\Phi = MLT(\Phi)$.*

Si ha poi

TEOREMA (7.14). *Se per una SCF (E, Φ), si ha $\Phi = MLT(\Phi)$, risulta $\Phi \in M(\mathfrak{L})$.*

DIM. In tal caso è $\Phi = M[LT(\Phi)]$.

Quindi, se indichiamo con $\overline{\mathcal{F}}$ la classe delle SCF Φ per le quali è $\Phi = MLT(\Phi)$, risulta $F(\mathfrak{T}) \cap M(\mathfrak{L}) \subset \overline{\mathcal{F}} \subset M(\mathfrak{L})$. Proviamo, anzi, che le due inclusioni sono proprie.

ESEMPI (7.15). *a*) Sia $\Phi = M(\lambda)$, dove λ è la *SCS* ordinaria della retta reale. Si ha subito $\Phi = MLT(\Phi)$, ma $\Phi \notin F(\mathfrak{T})$.

b) Sia $\Phi = M(\lambda)$, dove λ è ora la *SCS* dell'Es. (7.5). Si ha, come già visto, $\Phi \neq MLT(\Phi)$, pur essendo $\Phi \in M(\mathfrak{L})$.

BIBLIOGRAFIA

[1] M. DOLCHER, *Topologie e strutture di convergenza*, Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Serie III, vol. **14**, fasc. 1 (1960).

[2] R. FRIČ, *On convergence spaces and groups*, Matematica Slovaca, vol. **27**, no. 4 (1977).

[3] B. MITCHEL, *Theory of categories*, Academic Press (1965).

Manoscritto pervenuto in redazione il 19 maggio 1978.