

# RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

GIUSEPPE ZAMPIERI

**Sistemi del tipo  $(Pu = f, Qu = g)$  non  
globalmente risolubili**

*Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,*  
tome 61 (1979), p. 325-329

[<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP\\_1979\\_\\_61\\_\\_325\\_0>](http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1979__61__325_0)

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1979, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques*  
<http://www.numdam.org/>

## **Sistemi del tipo $(Pu = f, Qu = g)$ non globalmente risolubili.**

GIUSEPPE ZAMPIERI (\*)

**SUMMARY** - In the following we present a class of systems of P.D.E. with constant coefficients which are not globally solvable for some compatible data  $(f, g)$ . We'll make use of this result to give a theoretic explanation for a M. Nacinovich's fine example.

### **1. Introduzione.**

Nel seguito si userà il seguente teorema:

siano  $E$  ed  $F$  spazi di Fréchet e sia  $f: E \rightarrow F$  un'applicazione lineare e continua;  ${}^t f: F' \rightarrow E'$  sia la trasposta di  $f$  fra i duali forti.

**TEOREMA.** Le seguenti proposizioni  $a)$ ,  $b)$  e  $c)$  sono equivalenti:

- $a)$   $f$  è suriettiva;
- $b)$   ${}^t f$  è iniettiva e  ${}^t f(F')$  è chiuso in  $E'$ ;
- $c)$  per ogni seminorma continua  $p$  su  $E$  esiste una seminorma continua  $q$  su  $F$  tale che:
  - $c_1)$  per ogni  $y$  in  $F$  esiste  $x$  in  $E$  tale che:  $q(f(x) - y) = 0$ ;
  - $c_2)$  se  $y' \in F'$  e se  ${}^t f(y') \in E'_p$ , allora  $y' \in F'_q$ .

(\*) Indirizzo dell'A.: Seminario Matematico dell'Università - Via Belzon 7 - I-35100 Padova.

Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività dei Gruppi di Ricerca Matematica del C.N.R.

( $E'_p$  è lo spazio dei funzionali lineari e continui su  $E$  rispetto alla seminorma continua  $p$ ; analogamente per  $F'_q$ .)

**SIMBOLI.**  $E(A)$  indicherà lo spazio delle funzioni indefinitamente differenziabili sull'aperto  $A$  di  $R^n$ ;  $E'(A)$  il suo duale.

**2.** In  $R^{n+1}$  la variabile si indicherà con  $(x, t)$ ,  $x = (x_1, \dots, x_n)$ . Sia  $A_0$  un aperto in  $R^n$  e sia  $A = A_0 \times R_t$  il cilindro aperto di  $R^{n+1}$  di base  $A_0$ . Sia  $P = P(D_x)$  un operatore differenziale, a coefficienti costanti, in  $n$  variabili; sia  $Q = Q(D) = D_t^k + P(D)$  un secondo operatore.

Si indicherà con  $D$  il sottospazio chiuso di  $E(A)^2$  dei dati compatibili per  $P$  e  $Q$ , i.e.  $D = \{(f, g): Qf = Pg\}$ ;  $D$  abbia la topologia di spazio di Fréchet ereditata da  $E(A)^2$ .

Si supponga che  $A_0$  non sia  $P$ -convesso; i.e. esiste un aperto relativamente compatto,  $K$ , in  $A_0$  tale che l'insieme delle  $h$  in  $C_c^\infty(A_0)$  tali che  ${}^tP(h)$  ha il supporto in  $K$ , non abbia supporto in un medesimo aperto relativamente compatto  $K'$  di  $A_0$  (qui  ${}^tP = P(-D)$ ).

**TEOREMA 1.** Esiste  $(f, g)$  in  $D$  tale che il sistema:  $(Pu = f, Qu = g)$  non ha soluzione in  $E(A)$ .

**DIMOSTRAZIONE.** Si consideri l'applicazione:  $(P, Q): E(A) \rightarrow D$ , definita da:  $(P, Q)(u) = (Pu, Qu)$ . L'applicazione è lineare e continua; poichè gli spazi in oggetto sono spazi di Fréchet, se essa fosse suriettiva (ovvero se il sistema:  $Pu = f, Qu = g$  fosse risolubile in  $E(A)$  per ogni dato ammissibile), applicando il teorema nell'introduzione si dovrebbe aver soddisfatta la condizione  $c_2$ ).

Dimostriamo che ciò è impossibile.

Se  $(h, h') \in E'(A)^2$  ed è ortogonale a  $D$ , deve essere:  ${}^tPh + {}^tQh' = 0$ , ovvero:  ${}^tP(h + h') = -(-1)^k D_t^k h'$ . Per il fatto che  $P$  e  $D_t$  sono primi fra di loro risulta:

$$h + h' = -(-1)^k D_t^k h_0$$

con  $h_0$  distribuzione a supporto compatto in  $A$ , visto che una soluzione fondamentale dell'operatore  $D_t$  può esser scelta del tipo:  $\delta \otimes h''$  con  $D_t h'' = \delta_t$ , e visto che  $A$  è un cilindro.

Allora è:

$$-(-1)^k ({}^tP(D_t^k h_0)) + (-1)^k D_t^k h' + {}^tPh' = 0,$$

che dà:  $h' = {}^tPh_0$ , e quindi:  $h = -{}^tQh_0$ .

La proposizione in  $c_2$ ) dimostra che: per ogni compatto  $K$  in  $A$  e per ogni  $n$ , numero naturale, esiste  $K_n$ , compatto in  $A$ , tale che: se  $(h, h') \in E'(A)^2$ , se  ${}^tPh + {}^tQh'$  ha il suo supporto in  $K$  e se l'ordine di  ${}^tPh + {}^tQh' \leq n$ , allora esiste  $r$  in  $E'(A)$  tale che:

$$\text{supp}((h - {}^tQr), (h' + {}^tPr)) \subseteq K_n \times K_n,$$

sempre che  $(P, Q)$  sia suriettiva su  $D$ .

Sia allora  $K_0$  un compatto di  $A_0$  e si consideri l'insieme delle funzioni  $g$  in  $C_c^\infty(A_0)$  tali che:

$$\text{supp}({}^tPg) \subseteq K_0.$$

Se  $z \in C_c^\infty(R_t)$  e se  $\int z(t) dt = 1$ , ovviamente:

$$\text{supp}({}^tP(g \otimes z)) \subseteq K_0 \times L, \quad \text{con } L = \text{supp}(z).$$

Allora: per ognuna delle  $g$  di sopra, dovrebbe esistere  $r$  in  $E'(A)$ , tale che:

$$\text{supp}(g \otimes z - {}^tQr) \subseteq K'_0 \quad \text{e} \quad \text{supp}({}^tPr) \subseteq K'_0,$$

con  $K'_0$  compatto in  $A$  dipendente esclusivamente da  $K_0 \times L$ .

Per ogni  $h \in E'(R^{n+1})$  si consideri la distribuzione  $\bar{h} \in E'(R^n)$  così definita:

$$\langle \bar{h}, f \rangle = \langle h, f \rangle.$$

È facile dimostrare che:  $\bar{h} = 0$  se e solo se  $h = D_i h'$  per qualche  $h'$  in  $E'(R^{n+1})$ . Si ha inoltre:

$$\overline{{}^tPh} = {}^tP\bar{h} \quad \text{e} \quad \overline{{}^tQh} = {}^tP\bar{h},$$

di facile verifica; come è facile verificare che:

$$\overline{g \otimes z} = g,$$

per la particolare scelta di  $z$ .

Se  $\bar{K}$  indica la proiezione di  $K'_0$  in  $R^n$ , per il fatto che  $\text{supp } (\bar{h})$  è contenuto nella proiezione in  $R^n$  del supporto di  $h$ , la suriettività dell'applicazione  $(P, Q)$  implicherebbe che: per ogni  $g$  come sopra, i.e. tale che:  $\text{supp } ({}^tPg) \subseteq K_0$ , esiste un compatto  $\bar{K}$  in  $A_0$ , indipendente da  $g$ , tale che:  $g - {}^tP(\bar{r})$  e  ${}^tP(\bar{r})$  hanno il loro supporto in  $\bar{K}$  con  $\bar{r}$  in  $E'(A_0)$ ; e questo per ogni compatto  $K_0 \subset A_0$ .

Ciò è assurdo poichè  $A_0$  non è  $P$ -convesso.

Il teorema è concluso.

Viceversa è immediato dimostrare il seguente teorema:

**TEOREMA 2.** Se  $A$  è un cilindro a base  $P$ -convessa allora i sistemi del tipo  $(Pu = f, (D_t^k + P)u = g)$  sono risolubili in  $E(A)$  per ogni coppia di dati compatibili.

**OSSERVAZIONE.** Comunque siano scelti gli operatori  $P$  e  $Q$  e l'aperto  $A$ , se il sistema  $(Pu = f, Qu = g)$  non ha soluzioni in  $E(A)$  per qualche dato compatibile, allora il medesimo sistema non è « *quasi mai* » risolubile, nel senso che l'insieme dei dati compatibili per il sistema per i quali il sistema non è risolubile costituisce, in  $D$ , un insieme di seconda categoria; ciò è conseguenza immediata del teorema della « mappa aperta », [2], pag. 99.

Sia  $A$  un aperto di  $R^n$ ; siano  $P$  e  $Q$  operatori differenziali a coefficienti costanti.

**DEFINIZIONE.** La quaterna  $(A, A, P, Q)$  si dice compatibile se e solo se per ogni  $f \in \text{Ker } Q/A$  ( $= \{f \in E(A): Qf = 0\}$ ) il sistema  $(Pu = f, Qu = 0)$  ammette soluzione in  $E(A)$ .

**LEMMA.** Se l'aperto  $A$  è  $Q$ -convesso, allora la compatibilità della quaterna  $(A, A, P, Q)$  è equivalente alla risolubilità del sistema  $(Pu = f, Qu = g)$  per ogni dato compatibile.

**DIMOSTRAZIONE.** Si supponga  $P: \text{Ker } Q/A \rightarrow \text{Ker } Q/A$  suriettiva; allora se  $(h, h') \in E'(A) \times E'(A)$  con  ${}^tPh + {}^tQh' = 0$  ne segue che

$$h \in (\text{Ker } Q/A)^\perp \quad (\text{polare}).$$

Perciò, osservato che  $(\text{Ker } Q/A)^\perp = {}^tQE'(A)$  per la  $Q$ -convessità di  $A$ , esiste  $h_0 \in E'(A)$  tale che  $h = {}^tQh_0$ ,  $h' = -{}^tPh_0$ . Inoltre  ${}^tPE'(A) + (\text{Ker } Q/A)^\perp$  (e cioè  ${}^tPE'(A) + {}^tQE'(A)$ ) è chiuso in  $E'(A)$ . Da ciò segue evidentemente che la mappa  $(P, Q): E(A) \rightarrow D$  è suriettiva.

Il lemma è concluso.

### 3. Applicazione all'esempio di M. Nacinovich [4].

Sia  $A_0 = \{(x, y) \in R^2: y < 8x^2\}$ ;  $A = A_0 \times R_t$ .

Siano:  $P = P(D) = D_x^4 + D_y^2$  e  $Q = Q(D) = -D_t^6 - P(D)$ .

a)  $A_0$  non è  $P$ -convesso: immediata conseguenza del Teorema 3.7.2 di [3], pag. 89.

Il teorema in 2. dimostra allora che esiste un dato ammissibile,  $(f, g)$ , per il sistema:  $(Pu = f, Qu = g)$  per il quale il sistema non ha soluzione in  $E(A)$ .

Per dimostrare che la quaterna  $(A, A, P, Q)$  non è compatibile, basta dimostrare, secondo il lemma, che  $A$  è  $Q$ -convesso.

Sia  $K$  un compatto di  $A$  e sia  $g \in C_c^\infty(A)$  con  ${}^tPg \in C_c^\infty(K)$ ; sia  $\bar{K}$  la proiezione, in  $A_0$ , di  $K$  e sia  $L$  un segmento, in  $R_t$ , contenente la proiezione, in  $R_t$ , di  $K$ .

Dimostriamo che  $\text{supp}(g) \subseteq \bar{K} \times L$ , ovvero la  $Q$ -convessità di  $A$ . Sia  $p$  un punto di  $R^3$  tale che  $p \notin \bar{K} \times L$ ; esiste un cono aperto e convesso  $D$ , di vertice  $p$  ed asse verticale, tale che:  $D \cap \bar{K} \times L = \emptyset$ . Sia  $D_1 = D \cap S$  dove  $S$  è, a seconda del caso:  $S = \{(x, y, t): t > t_0, \text{ o } t < t_0\}$ , con  $t_0$  determinato in modo che  $g|_S = 0$ .

Poichè  ${}^tPg = 0$  in  $D$  e  $g = 0$  in  $D_1$ , e poichè i piani caratteristici di  $Q$  sono paralleli all'asse  $t$ , e quindi, se intersecano  $D$  intersecano anche  $D_1$ , il fatto che  $g$  sia nulla in  $D$  discende dal Teorema 5.3.3 dell'inevitabile [3], pag. 129.

COMMENTO. Essenzialmente in questo lavoro le conclusioni sono raggiunte in virtù del teorema citato nell'introduzione: J. DIEUDONNÉ - L. SCHWARTZ, *La dualité entre les espaces  $F$  e  $LF$* , Ann. de l'Inst. Fourier, 1949.

### BIBLIOGRAFIA

- [1] G. BRATTI, *Un'applicazione del teorema del grafico chiuso alla risolubilità dei sistemi del tipo:  $(Pu = f, Qu = g)$* , in stampa.
- [2] J. L. KELLEY - I. NAMIOKA, *Linear Topological Spaces*, D. Van Nostrand, (1963).
- [3] L. HÖRMANDER, *Linear partial differential operators*, Springer (1963).
- [4] M. NACINOVICH, *Una osservazione su una congettura di De Giorgi*, Boll. U.M.I., (4), **12** (1975), pp. 9-14.

Manoscritto pervenuto in redazione il 12 gennaio 1979.