

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

REMO GATTAZZO

Punti di tipo 9 di una cubica ellittica

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 61 (1979), p. 285-301

[<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1979__61__285_0>](http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1979__61__285_0)

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1979, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

Punti di tipo 9 di una cubica ellittica.

REMO GATTAZZO (*)

SUMMARY - Let E be an elliptic cubic of $\mathbf{P}_k^2$, k algebraically closed field of characteristic p , $p \neq 2, 3$. An algebraic process is given to determine the 72 points $P \in E$, flexes excepted, for which a cubic $C_3 \subset \mathbf{P}_k^2$ exists with $E \cdot C_3 = 9P$. Such a point P is called of type 9. For each of these points P the equation of relative cubic C_3 is calculated. Moreover a generalization of such process is given.

Introduzione.

Sia E una cubica ellittica $E \subset \mathbf{P}_\mathbf{C}^2$, con $\mathbf{C}$ campo dei numeri complessi. Le applicazioni geometriche del teorema di Abel (cfr. [2], vol I, pag. 488) permettono di determinare il numero dei punti $P \in E$ tali che $3nP$ è intersezione completa di E e di una curva algebrica $C_n \subset \mathbf{P}_\mathbf{C}^2$, in simboli $E \cdot C_n = 3nP$ e tale numero è $(3n)^2$. Il teorema dell'inversione degli integrali abeliani di prima specie permette di determinare tali punti.

Mi risulta che solo in pochi casi (flessi, punti sestatici, cfr. [3], vol. I, pag. 277) è stato scritto un procedimento algebrico per determinare tali punti. Notiamo inoltre che i teoremi citati non forniscono un criterio per trovare l'equazione della curva C_n la cui intersezione completa con E è $3nP$.

È noto che tali punti rientrano tra quelli di ordine finito per E

(*) Indirizzo dell'A.: Istituto di Matematica Applicata, Università di Padova.

Lavoro svolto nell'ambito dei gruppi di ricerca matematica del C.N.R. (G.N.S.A.G.A.).

dotata della nota struttura di gruppo abeliano $(E, \oplus)$ nel senso che, se viene fissato un flesso $0 \in E$ come elemento neutro, allora $E \cdot C_n = 3nP$ se e solo se $\underbrace{P \oplus \dots \oplus P}_{3n\text{-volte}} = 0$ in $(E, \oplus)$. Inoltre è noto (cfr. [5],

Example 4.8.1 e 4.8.3, pag. 322) che in caratteristica p , $p \neq 2, 3$, il sottogruppo degli elementi di ordine $3n$ è costituito da $(3n)^2$ elementi.

Col seguente scritto si vuole dare un procedimento algebrico, valido per ogni campo k algebricamente chiuso di caratteristica p arbitraria, eccettuati al più i valori $p = 2, 3$, per la determinazione dei punti $P \in E$ tali che $9P$ è intersezione completa di E con una cubica C_3 . Questi sono i 9 flessi e i 72 punti di tipo 9 (cioè punti non di flesso per i quali esiste una cubica C_3 per cui $E \cdot C_3 = 9P$) che determiniamo in modo algebrico fornendo in sostanza le loro coordinate. Viene esteso poi lo studio ai punti $P \in E$ tali che esiste una curva C_n con $E \cdot C_n = 3nP$, con $n = (2^r - (-1)^r)/3$ e $n = 2^t + (-1)^t$, per $r \geq 3$ e $t \geq 2$.

Si fornisce inoltre un procedimento per la determinazione della equazione di C_3 nel caso dei punti di tipo 9 e di alcune C_n , con $n > 3$, che finora mi risulta fosse noto solo per $n = 1$: tangente di flesso, $n = 2$: conica surosculatrice (cfr. [3], vol. 1, pag. 277). Un rapido cenno di un procedimento per trovare i punti $P \in E$ di cui un flesso è un tangenziale successivo e la C_n , con $n = 2^s$ e $s \geq 1$, relativa ad essi, trovasi in [8], Oss. 6, pag. 178.

1. Flessi e punti sestatici di E .

Supponiamo in questo numero che E sia una cubica ellittica di $\mathbf{P}_k^2$, con k campo algebricamente chiuso di caratteristica p , $p \neq 2, 3$. I punti di flesso di E sono 9 (cfr. [5], Example 4.8.3, pag. 322) e si trovano intersecando E con la sua curva hessiana (cfr. [1]). Le rette tangenti nei punti di flesso si trovano con l'usuale formula. I flessi di E sono a tre a tre allineati e formano il sottogruppo degli elementi di ordine 3 di $(E, \oplus)$.

Assunte tre rette contenenti i 9 flessi come triangolo di riferimento (X, Y, Z) per $\mathbf{P}_k^2$, si può scegliere un conveniente punto unità in modo che i flessi di E siano i seguenti

$$\begin{array}{lll} (0, 1, -1) & (0, 1, -\varepsilon) & (0, 1, -\varepsilon^2) \\ (-\varepsilon^2, 0, 1) & (-1, 0, 1) & (-\varepsilon, 0, 1) \\ (1, -\varepsilon, 0) & (1, -\varepsilon^2, 0) & (1, -1, 0) \end{array} \quad (\text{tabella } \Phi)$$

ove ε è una radice cubica di 1, con $\varepsilon \neq 1$. Rispetto a tale riferimento E assume la forma canonica (cfr. [3], vol. II, pag. 218)

$$(1) \quad X^3 + Y^3 + Z^3 - 3aXYZ \quad \text{con } a^3 \neq 1.$$

I punti sestatici di E sono i punti $P \in E$ per i quali esiste una conica irriducibile (conica surosculatrice) che interseca E secondo il divisore $6P$. Tali punti sono quelli che hanno il tangenziale (cioè il punto $Q \in E$ che è intersezione di E con la retta tangente in P ad E) coincidente con un flesso di E . I punti sestatici di E si trovano intersecando E con le curve polari prime di E relative ai flessi di E ; tali coniche sono riducibili nella tangente di flesso ed in una ulteriore retta che interseca E secondo tre punti sestatici. Se E è data dalla (1), le 9 rette che intersecano E secondo i punti sestatici sono le componenti della

$$(X^3 - Y^3)(X^3 - Z^3)(Y^3 - Z^3).$$

I punti sestatici sono 27 distinti tra loro e dai flessi. Flessi e sestatici formano il sottogruppo degli elementi di ordine 6 di $(E, \oplus)$.

L'equazione di ciascuna conica surosculatrice ad E in un punto sestatico si può calcolare secondo il procedimento riportato in [3], vol. I, pag. 271 che vale in ogni caratteristica p , $p \neq 2, 3$, oppure secondo il procedimento qui riportato nell'Osservazione 3 del n. 2.

2. Punti di tipo 9 di E .

Sia k un campo algebricamente chiuso e di caratteristica arbitraria. Indicheremo con C_n una curva algebrica di $\mathbb{P}_k^2$ di ordine n .

DEFINIZIONE 1. Diciamo che il punto $P \in E$ è di tipo $3n$ se esiste una curva $C_n \subset \mathbb{P}_k^2$ che individua su E il divisore $3nP$ e non esiste alcuna curva $C_{n'} \subset \mathbb{P}_k^2$, con $n' < n$, che individui il divisore $3n'P$; chiameremo C_n curva $3n$ -osculatrice ad E in P .

OSSERVAZIONE 1. Ogni curva C_n $3n$ -osculatrice risulta essere chiaramente ridotta ed irriducibile, mentre se esiste una curva $C_n \subset \mathbb{P}_k^2$ ridotta ed irriducibile tale che individua su E il divisore $E \cdot C_n = 3nP$ allora non è detto che P è punto di tipo $3n$ di E . Infatti se F è un flesso di E e T è la retta tangente ad E in F , esisterà, almeno in

caratteristica zero, per il teorema di Bertini una curva del fascio $E + \lambda T^3$, con λ parametro, che sia ridotta ed irriducibile.

Nel numero precedente abbiamo considerato i flessi di E (punti di tipo 3) ed i punti sestatici (punti di tipo 6) e le relative curve $3n$ -osculatrici, con $n = 1, 2$ (tangenti di flesso e coniche surosculatrici). Ci si pone ora il problema di determinare i punti di tipo 9 di E e le relative cubiche 9-osculatrici. Premettiamo la seguente

DEFINIZIONE 2. *Dicesi triangolo tangenziale di E una terna (ordinata) di punti distinti $A_1, A_2, A_3 \in E$ tali che*

A_2 è il tangenziale di A_1 ,

A_3 è il tangenziale di A_2 ,

A_1 è il tangenziale di A_3 .

I punti A_1, A_2, A_3 si dicono i vertici e le rette A_1A_2, A_2A_3, A_3A_1 si dicono i lati del triangolo tangenziale.

NOTA. La nozione di triangolo tangenziale era già noto implicitamente in passato (cfr., ad esempio, [7], pag. 30).

OSSERVAZIONE 2. Nessun punto di tipo 3 o di tipo 6 può essere vertice di un triangolo tangenziale (altrimenti due vertici coinciderebbero).

PROPOSIZIONE 2.1. *Il punto $A \in E$ è un vertice di un triangolo tangenziale di E se e solo se A è di tipo 9.*

Premettiamo alla dimostrazione della Prop. 2.1 il

LEMMA 2.2. *Sia $J(E)$ l'ideale omogeneo di E in $k[X, Y, Z]$, R l'anello delle coordinate omogenee di E , $R = k[X, Y, Z]/J(E)$, ed infine K il campo dei quozienti di R . Per ogni elemento omogeneo $h \in K$ tale che il divisore definito su E da h , $\text{div}(h)$, sia effettivo, esiste almeno una curva (non necessariamente ridotta o irriducibile) $C_n \subset \mathbf{P}_k^2$, con*

$$n = \text{grado } \text{div}(h)/3, \quad \text{tale che } E \cdot C_n = \text{div}(h).$$

DIM. È lecito pensare E quale cono affine $V \subset k^3$. Essendo V non singolare in $\text{codim} = 1$, R risulta allora integralmente chiuso in K (cfr. [6], pag. 391), e quindi, per il teorema di struttura dei domini

noetheriani integralmente chiusi,

$$(2) \quad R = \bigcap_{h(\mathfrak{p})=1} R_{\mathfrak{p}}.$$

Ne segue che, per ogni elemento omogeneo $h \in K$ tale che $\text{div}(h)$ sia effettivo, $h \in R_{\mathfrak{p}}$ per ogni ideale primo $\mathfrak{p} \subset R$ di altezza $h(\mathfrak{p}) = 1$. Quindi, per la (2), si ha $h \in R$. Esiste allora in $k[X, Y, Z]$ almeno un polinomio omogeneo H tale che, nell'omomorfismo canonico $k[X, Y, Z] \rightarrow R$, ha per immagine h . Ogni tale polinomio H individua in $\mathbb{P}_k^2$ una curva C_n tale che $E \cdot C_n = \text{div}(h)$. Per il teorema di Bézout, C_n avrà allora necessariamente ordine $n = \text{grado div}(h)/3$. ■

Riferendoci alle notazioni del Lemma 2.2, indicheremo in seguito con f l'immagine di $F \in k[X, Y, Z]$ in R e, nel caso in cui F sia omogeneo, indicheremo ancora con F la curva di $\mathbb{P}_k^2$ individuata da F .

DIM. (della Prop. 2.1). Si supponga che $A = A_1, A_2, A_3$ siano punti di E che sono vertici di un triangolo tangenziale. Sia T_i la retta tangente ad E in A_i , ($i = 1, 2, 3$). Si ha allora

$$(3) \quad \text{div}\left(\frac{t_1^4 t_3}{t_2^2}\right) = 9A_1 = 9A.$$

Per il Lemma 2.2 risulta allora che esiste una curva $C_3 \subset \mathbb{P}_k^2$ tale che $E \cdot C_3 = 9A$. Proviamo che A è un punto di tipo 9. Infatti se non fosse di tipo 9 sarebbe di tipo 6 o di tipo 3 contro l'Osservazione 2.

Viceversa supponiamo che esista una cubica C_3 9-osculatrice ad E in un punto $A \in E$. Siano inoltre A_2 il punto tangenziale di A e A_3 il punto tangenziale di A_2 . Affermo che il punto A_3 ha per tangenziale esattamente A . Infatti detto Q il punto tangenziale di A_3 , siano T, T_2, T_3 le rette tangenti ad E rispettivamente in A, A_2, A_3 . Si ha

$$\text{div}\left(\frac{t_1^4 t_3}{t_2^2}\right) = 8A + Q, \quad \text{div}(c_3) = 9A, \quad \text{div}\left(\frac{c_3 t_2^2}{t_1^4 t_3}\right) = Q - A.$$

In altre parole A è linearmente equivalente a Q : $A \equiv Q$. D'altra parte per il teorema di Riemann-Roch applicato al divisore A di E risulta $\dim |A| = 0$, cioè $|A| = \{A\}$ e quindi $A = Q$. ■

OSSERVAZIONE 3. Nella dimostrazione della Prop. 2.1 abbiamo dato un procedimento costruttivo per la determinazione dell'equa-

zione della cubica 9-osculatrice ad E in un vertice di un triangolo tangenziale.

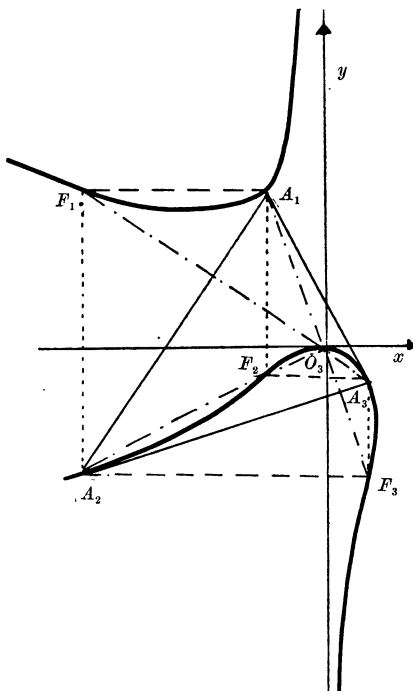


Figura 1

Ad esempio sia E la curva (cfr. fig. 1 per $b = 0$)

$$XY^2 + YZ^2 + ZX^2 + 3bXYZ \quad \text{con } b^3 \neq -1$$

che ha per triangolo tangenziale $O_1 = (1, 0, 0)$, $O_2 = (0, 1, 0)$, $O_3 = (0, 0, 1)$. Le (3) per O_3 diventano

$$\begin{aligned} \frac{y^4 x}{z^2} &= \frac{y^2(-yz^2 - zx^2 - 3bxyz)}{z^2} = -y^3 - \frac{xy^2(x + 3by)}{z} = \\ &= -y^3 + \frac{(yz^2 + zx^2 + 3bxyz)(x + 3by)}{z} = \\ &= -y^3 + (yz + x^2 + 3bxy)(x + 3by), \end{aligned}$$

che è un elemento di R . Allora in $k[X, Y, Z]$ il polinomio

$$(X + 3bY)(YZ + X^2 + 3bXY) - Y^3$$

determina una curva $C_3 \subset \mathbb{P}_k^2$ che risulta essere 9-osculatrice ad E in O_3 . Ogni altra curva 9-osculatrice ad E in O_3 appartiene al fascio di cubiche individuato da E e da C_3 ed ogni cubica del fascio risulta ridotta ed irriducibile.

3. Determinazione dei punti di tipo 9 di E .

Premettiamo due lemmi.

LEMMA 3.1 (D. Gallarati, cfr. [4]). *Se $E \subset \mathbb{P}_k^2$ è una cubica ellittica con k campo algebricamente chiuso di caratteristica arbitraria, se A, B, C sono punti (distinti) allineati di E per i quali esistono curve $H_1, H_2 \subset \mathbb{P}_k^2$ (non necessariamente irriducibili o ridotte) tali che*

$$E \cdot H_1 = 3m_1 A, \quad E \cdot H_2 = 3m_2 B$$

allora esiste una curva $H \subset \mathbb{P}_k^2$ (non necessariamente irriducibile o ridotta) tale che $E \cdot H = 3mC$, ad esempio con $m = m \cdot c \cdot m\{m_1, m_2\}$. In particolare se fra A, B uno è un flesso ed uno è un punto di tipo 9 allora necessariamente C è di tipo 9; mentre se A, B sono entrambi di tipo 9 allora C può essere un flesso o un punto di tipo 9.

DIM. Sia L la retta di $\mathbb{P}_k^2$ tale che $E \cdot L = A + B + C$; con m denotiamo il minimo comune multiplo fra m_1 e m_2 . Posto

$$h = \frac{l^{3m}}{h_1^{m/m_1} h_2^{m/m_2}},$$

risulta $\text{div}(h) = 3mC$. Applicando il Lemma 2.2 esiste un polinomio omogeneo H di grado m che dà la curva desiderata e questo prova la prima parte del lemma.

In particolare supponendo che A sia punto di tipo 9 e B un flesso, allora dalla Def. 1 segue che esistono curve H_1, H_2 di ordine 3 e 1 rispettivamente, per cui esiste una curva H di ordine 3 tale che $E \cdot H = 9C$. Il punto C è di tipo 9 se escludiamo che esso possa essere

un flesso o un punto sestatico. Infatti se C fosse flesso o sestatico, l'essere allineato col flesso B e col punto A comporterebbe, per l'attuale lemma, che anche A sarebbe flesso o sestatico contrariamente a quanto detto nell'Osservazione 2 del n. 2. ■

LEMMA 3.2. *Se $A \in E$ è un punto di tipo $3n$ ed $A' \in E$ è il punto tangenziale di A , allora A' è di tipo $3n$ se n è dispari, A' è di tipo $3n/2$ se n è pari.*

DIM. Sia H_1 la curva tale che $E \cdot H_1 = 3nA$ e T la retta tangente ad E in A . Procediamo come nella dimostrazione del Lemma 3.1 distinguendo due casi: n dispari ed n pari. Posto $n' = n$ se n è dispari e $n' = n/2$ se n è pari, si sceglie ora rispettivamente nei due casi

$$h = \frac{t^{3n'}}{h_1^2}, \quad h = \frac{t^{3n'}}{h_1}$$

per cui $\text{div}(h) = 3n'A'$. Allora esiste una curva $H \subset \mathbb{P}_k^2$ tale che $E \cdot H = 3n'A'$. Per provare che A' è di tipo $3n'$ dobbiamo riconoscere che non esiste una curva D di ordine m , con $m < n'$, tale che $E \cdot D = 3mA'$. Se esistesse una tale curva, allora esisterebbe pure una curva $\bar{D}$ di ordine $n' - m$, con $\bar{D}$ definita dall'elemento $h/d \in K$, tale che $E \cdot \bar{D} = 3(n' - m)A'$. Scambiando eventualmente D con $\bar{D}$ si può supporre che $m \leq n' - m$. Allora quando n è dispari $n = n' > 2m$; mentre $n > n' = n/2 \geq 2m$ quando n è pari. Risulta allora

$$\text{div}\left(\frac{t^m}{d}\right) = 3.2mA \quad \text{con } 2m < n$$

per cui A non sarebbe punto di tipo $3n$ (cfr. Def. 1) come assunto nell'ipotesi. ■

PROPOSIZIONE 3.3. *Sia $E \subset \mathbb{P}_k^2$ una cubica ellittica, con k campo algebricamente chiuso di caratteristica p , $p \neq 2, 3$. I punti di tipo 9 di E sono i 72 vertici di 24 triangoli tangenziali che si possono ottenere dall'equazione di E con un procedimento algebrico.*

DIM. Procederemo per passi.

PASSO I. Con un eventuale cambio del riferimento delle coordinate di $\mathbb{P}_k^2$, come accennato nel n. 1, possiamo assumere che E abbia

la forma canonica

$$(1) \quad X^3 + Y^3 + Z^3 - 3aXYZ \quad \text{con } a^3 \neq 1.$$

PASSO II. Posto

$$c_i = \sqrt[3]{\varepsilon^{i-1} + \frac{a}{\sqrt[3]{1-a^3}}} \quad (i = 1, 2, 3)$$

con le determinazioni delle radici cubiche tali che $c_1 c_2 c_3 \sqrt[3]{1-a^3} = 1$, consideriamo i punti

(c_1, c_2, c_3)	$(c_1, \varepsilon c_2, \varepsilon^2 c_3)$	$(c_1, \varepsilon^2 c_2, \varepsilon c_3)$	
(c_2, c_3, c_1)	$(c_2, \varepsilon c_3, \varepsilon^2 c_1)$	$(c_2, \varepsilon^2 c_3, \varepsilon c_1)$	(tabella Γ_0^+)
$(c_3, \varepsilon c_1, \varepsilon^2 c_2)$	$(c_3, \varepsilon^2 c_1, \varepsilon c_2)$	(c_3, c_1, c_2)	
(c_1, c_3, c_2)	$(c_1, \varepsilon^2 c_3, \varepsilon c_2)$	$(c_1, \varepsilon c_3, \varepsilon^2 c_2)$	
(c_3, c_2, c_1)	$(c_3, \varepsilon^2 c_2, \varepsilon c_1)$	$(c_3, \varepsilon c_2, \varepsilon^2 c_1)$	(tabella Γ_0^-)
$(c_2, \varepsilon^2 c_1, \varepsilon c_3)$	$(c_2, \varepsilon c_1, \varepsilon^2 c_3)$	(c_2, c_1, c_3)	

Dal calcolo diretto si constata che

- a) i punti di $\Gamma_0 = \Gamma_0^+ \cup \Gamma_0^-$ sono 18 tra loro distinti;
- b) i punti di ogni riga delle tabelle Γ_0^+ e Γ_0^- sono vertici di uno stesso triangolo tangenziale e quindi sono punti di tipo 9 di E ;
- c) i 9 punti di Γ_0^+ (di Γ_0^-) appartengono a 9 rette distinte congiungenti un arbitrario vertice di un triangolo con un arbitrario vertice di un secondo triangolo e passanti di conseguenza per un vertice del terzo;
- d) un punto arbitrario di Γ_0^+ e un punto arbitrario di Γ_0^- sono allineati con un flesso di E (dato dalla tabella Φ del n. 1);
- e) un punto arbitrario di Γ_0^+ (di Γ_0^-) ed un flesso arbitrario di E sono allineati con un punto di Γ_0^- (di Γ_0^+).

PASSO III. Cambiando il riferimento di $\mathbf{P}_k^2$ con le

$$\begin{cases} X = X_1 + Y_1 + Z_1 \\ Y = X_1 + \varepsilon^2 Y_1 + \varepsilon Z_1 \\ Z = X_1 + \varepsilon Y_1 + \varepsilon^2 Z_1 \end{cases}$$

otteniamo per E la

$$(1') \quad X_1^3 + Y_1^3 + Z_1^3 - 3 \frac{a+2}{a-1} X_1 Y_1 Z_1,$$

e, sostituendo a con $a_1 = (a+2)/(a-1)$, otteniamo come al Passo II nel riferimento (X_1, Y_1, Z_1) un insieme Γ_1 di punti di tipo 9 di E che godono delle medesime proprietà $a), b), c), d), e)$ dell'insieme Γ_0 (si noti che la tabella Φ del n. 1 fornisce i flessi di E anche rispetto al riferimento (X_1, Y_1, Z_1)).

Verifichiamo ora che $\Gamma_0 \cap \Gamma_1 = \emptyset$. Allo scopo si consideri la funzione razionale su E

$$\alpha = \frac{(x^3 + y^3 + z^3)^2}{x^6 + y^6 + z^6}$$

che rispetto al riferimento (X_1, Y_1, Z_1) diviene

$$\alpha = \frac{3(x_1^3 + y_1^3 + z_1^3 + 6x_1 y_1 z_1)^2}{x_1^6 + y_1^6 + z_1^6 + 30x_1 y_1 z_1 (x_1^3 + y_1^3 + z_1^3) + 20(x_1^3 y_1^3 + x_1^3 z_1^3 + y_1^3 z_1^3) + 90x_1^2 y_1^2 z_1^2}.$$

Sui punti di Γ_0 e di Γ_1 α assume lo stesso valore costante e si ha, con ovvio significato dei simboli,

$$\alpha(\Gamma_0) = 3, \quad \alpha(\Gamma_1) = \frac{3a^2}{3a^2 + 2a + 2}.$$

Essendo per ipotesi $a^3 \neq 1$ risulta $\alpha(\Gamma_0) \neq \alpha(\Gamma_1)$ e quindi $\Gamma_0 \cap \Gamma_1 = \emptyset$.

PASSO IV. Dal Lemma 3.1 ogni punto $C \in E$ allineato con un punto A ed un punto B , entrambi di tipo 9 di E , è un flesso o un punto di tipo 9. Se assumiamo $A \in \Gamma_0$ e $B \in \Gamma_1$ il punto $C \in E$ allineato con tali A e B non può essere un flesso altrimenti, per la $e)$, $A, B \in \Gamma_0 \cap \Gamma_1$, contrariamente a quanto provato al Passo III. Quindi C è un punto di tipo 9 di E e per la $c)$ $C \notin \Gamma_0 \cup \Gamma_1$. Facendo variare A in Γ_0 e B in Γ_1 , C descrive un insieme costituito da punti di tipo 9 non appartenenti a $\Gamma_0 \cup \Gamma_1$.

PASSO V. Dimostriamo ora che quando A varia in un insieme di due punti $A', A'' \in \Gamma_1$ che sono allineati con un flesso $F \in E$ (e per il resto sono arbitrari) e B varia in Γ_0 allora i punti $C \in E$ allineati con A e B descrivono un insieme di 36 punti distinti di tipo 9. Infatti

l'insieme delle rette che congiungono A' con un punto B variabile in Γ_0 sono 18 (quanti i punti di Γ_0) e tutte distinte tra loro per la e). Tali rette intersecano E secondo il punto A' contato 18 volte, secondo tutti i punti di Γ_0 e secondo un insieme Γ' di 18 punti che sono distinti tra loro e da A' e dai punti di Γ_0 , per il Passo IV. Lo stesso dicasi per i punti di E allineati con A'' e con B variabile in Γ_0 ; indichiamo con Γ'' l'insieme di tali 18 punti. Verifichiamo che $\Gamma' \cap \Gamma'' = \emptyset$.

Se esistesse $C \in \Gamma' \cap \Gamma''$ allora esisterebbero due rette R_1, R_2 tali che $\text{div}(r_1) = A' + B' + C$, $\text{div}(r_2) = A'' + B'' + C$ con $B', B'' \in \Gamma_0$. Indichiamo con T la retta tangente in C ad E , con S la retta congiungente A' con A'' , con U la retta congiungente B' con B'' ed infine denotiamo con C_1 il punto tangenziale di C . Risulta

$$\text{div}\left(\frac{stu}{r_1 r_2}\right) = F + C_1 + D$$

ove D denota il punto di E allineato con B' e B'' . Proviamo che $D \in \Gamma_0$. Per il Lemma 2.2 i punti F, C_1, D sono allineati. Ora il punto C_1 è di tipo 9 in quanto tangenziale di C (cfr. Lemma 3.2); d'altra parte, essendo D allineato con B' e B'' , D è un flesso oppure è di tipo 9 per le d) e c) e nel secondo caso $D \in \Gamma_0$. Escludiamo il primo caso; infatti C_1 sarebbe allineato con i due flessi F e D il che non può succedere in quanto C_1 è di tipo 9. Dunque $D \in \Gamma_0$. Per la e) anche $C_1 \in \Gamma_0$ ed essendo C il tangenziale del tangenziale di C_1 allora per la b) $C \in \Gamma_0$. Ciò è in contrasto con quanto stabilito al Passo IV.

PASSO VI. Riconosciamo che tutti i punti di tipo 9 di E formano l'insieme $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \Gamma' \cup \Gamma''$. Infatti dal Passo V Γ è costituito da 72 punti distinti di tipo 9 di E che sono vertici di 24 triangoli tangenziali di E ; inoltre gli elementi di Γ ed i flessi di E sono tutti elementi di ordine 9 per $(E, \oplus)$. D'altra parte il sottogruppo di $(E, \oplus)$ costituito dagli elementi di ordine 9 consta di 81 elementi (cfr. [5], Example 4.8.1, pag. 322) per cui non possono esistere in E punti di tipo 9 diversi da quelli contenuti in Γ . ■

4. Poligoni tangenziali di E .

In questo numero si proponiamo di estendere la nozione di triangolo tangenziale in quella di poligono tangenziale e di dare informazioni sul tipo dei vertici di tali poligoni.

DEFINIZIONE 3. Diciamo che i punti distinti $P_0, \dots, P_{r-1} \in E$ sono i vertici di un poligono tangenziale di E di r lati se P_i è il tangenziale del punto P_{i-1} per $i = 1, \dots, r-1$ e P_0 è il tangenziale di P_{r-1} . Le rette $P_0P_1, \dots, P_{r-1}P_0$ si dicono i lati del poligono tangenziale.

OSSERVAZIONE 4. La Def. 3 può essere accolta per $r \geq 3$ sebbene per $r = 1$ si potrebbero considerare poligoni tangenziali di un vertice e di un lato consistenti in un flesso di E e nella relativa tangente; per $r = 2$ la Def. 3 non ha senso.

Si osservi inoltre che se $A \in E$ è un vertice di un poligono tangenziale di r lati, allora A non può essere vertice di un poligono tangenziale di r' lati con $r' < r$.

PROPOSIZIONE 4.1. Il punto $A \in E$ è vertice di un poligono tangenziale di E di r lati, con $r \geq 3$, se e solo se esiste una curva $C_n \subset \mathbb{P}_k^2$ di ordine $n = (2^r - (-1)^r)/3$ tale che $E \cdot C_n = 3nA$. (k campo algebricamente chiuso di caratteristica arbitraria.)

DIM. È l'ovvia estensione della dim. della Prop. 2.1, prescindendo dal fatto che A sia di tipo $3n$. ■

Ci si pone ora il problema di stabilire in quali casi la curva C_n è ridotta ed irriducibile e di ordine minimo tra tutte quelle che godono di tale proprietà, cioè stabilire quando il vertice A è di tipo $3n$ e in caso contrario determinare il tipo dei vertici di un poligono tangenziale di r lati per $r > 3$. Intanto abbiamo la seguente

OSSERVAZIONE 5. Per il Lemma 3.2 possiamo dire a priori che i vertici di un poligono tangenziale sono tutti dello stesso tipo ed esso deve essere dispari. Infatti se fosse pari il tipo di un vertice, allora il tipo del vertice successivo sarebbe la metà del precedente; il tipo dell'ulteriore vertice sarebbe non maggiore della metà del tipo del primo, ecc. Dopo r passi otterremo una contraddizione.

Informazioni sull'insieme di tutte le curve C_n della Prop. 4.1 vengono date dal

LEMMA 4.2. Sia E una cubica ellittica di $\mathbb{P}_k^2$, e $P \in E$ tale che esiste una curva $C_n \subset \mathbb{P}_k^2$ tale che $E \cdot C_n = 3nP$. Detto $C_n(P)$ l'insieme di tutte tali curve, allora o tutte le curve C_n sono irriducibili oppure esiste una curva irriducibile e ridotta $H_{n'}$, di ordine n' , definita da un polinomio $H_{n'}$, tale che ogni curva di $C_n(P)$ è data da un polinomio del tipo

$$H_{n'}^t + GE, \quad E, G \in k[X, Y, Z] \text{ ed } E \text{ definente la cubica } E.$$

DIM. Se le C_n di $C_n(P)$ non sono tutte irriducibili, basta prendere fra le curve componenti ridotte ed irriducibili delle curve di $C_n(P)$ una curva $H_{n'}$ di ordine n' minimo. Esistono allora degli interi t e n'' tali che $n = tn' + n''$, con $0 \leq n'' < n'$. Sia $C_n \in C_n(P)$ e si consideri il divisore

$$\operatorname{div}\left(\frac{c_n}{h_{n'}^t}\right) = 3(n - tn') P = 3n'' P.$$

Se $n'' > 0$ allora per il Lemma 2.2 esiste almeno una curva $H_{n''}$ tale che la curva che ha per componenti $H_{n'}$ e $tH_{n''}$ appartiene a $C_n(P)$; tale curva ha senz'altro una componente ridotta ed irriducibile di ordine $\leq n'' < n'$, il che non può essere per la minimalità di n' . ■

COROLLARIO 4.3. *Se $E \cdot C_n = 3nP$ si ha che P è di tipo $3n$ oppure di tipo $3m$ con $m = n/t$.*

Esaminiamo ora il tipo dei vertici di un poligono tangenziale di r lati per alcuni valori di r . Per $r = 4, 5$ si ottengono rispettivamente quadrilateri e pentagoni tangenziali i cui vertici, con molteplicità 15 e 33 rispettivamente, sono intersezione completa di E con curve di ordine 5 e 11. Tali curve non possono essere riducibili perchè, altrimenti, per il Lemma 4.2, dovrebbero essere rette contate 5 e 11 volte e quindi i vertici sarebbero flessi. Quindi:

I vertici di ogni quadrilatero tangenziale sono tutti di tipo 15 e quelli di un pentagono tangenziale sono tutti di tipo 33.

Più in generale:

I vertici di ogni poligono tangenziale di r lati sono tutti di tipo

$$3n = 2r - (-1)^r \text{ se l'intero } (2r - (-1)^r)/3 \text{ è primo.}$$

Per $r = 6$ si ottiene $n = 21$ e si presentano due possibilità: le curve C_{21} tali che $E \cdot C_{21} = 63P$, con P vertice di un esagono tangenziale di E , possono essere tutte irriducibili e ridotte, ed allora P ed ogni altro vertice dell'esagono sono di tipo 63; oppure qualcuna delle C_{21} risulta essere una curva riducibile in una C_7 contata 3 volte (non può essere C_3 contata 7 volte perchè altrimenti P sarebbe vertice di un triangolo tangenziale, il che non può essere, per l'Osservazione 4). In tale caso ogni vertice dell'esagono tangenziale è di tipo 21. Rinviamo al prossimo numero per un esempio di esagono tangenziale i cui vertici sono di tipo 21.

5. Poligoni tangenziali aperti di E .

DEFINIZIONE 4. Diciamo che i punti distinti $P_0, \dots, P_r \in E$ sono, nell'ordine, vertici di un Q -poligono tangenziale aperto di E di r lati $P_0P_1, \dots, P_{r-1}P_r$ se P_i è il tangenziale di P_{i-1} per $i = 1, \dots, r$ ed inoltre P_0, P_r, Q sono punti allineati, con Q punto fissato di E .

OSSERVAZIONE 6. Può darsi che i vertici di un Q -poligono tangenziale aperto di r lati siano vertici di un poligono tangenziale di s lati, con $s > r$ (cfr. l'esempio seguente). Può invece accadere che nessun vertice di un Q -poligono tangenziale aperto sia vertice di qualche poligono tangenziale chiuso. Ad esempio ciò succede se tutti i vertici del Q -poligono tangenziale aperto sono di tipo pari (cfr. Osservazione 5 del n. 4).

Osserviamo infine che non è detto che i vertici di un Q -poligono tangenziale aperto siano tutti dello stesso tipo.

La seguente proposizione dà informazioni sul primo vertice di un poligono tangenziale aperto.

PROPOSIZIONE 5.1. Il punto $A \in E$ è il primo vertice di un Q -poligono tangenziale aperto di E di r lati, con Q punto fissato di E di tipo $3m$, se e solo se esiste un curva $C_n \subset \mathbb{P}_k^2$, di ordine $n = m(2^r + (-1)^r)$, tale che $E \cdot C_n = 3nA$, per $r \geq 2$.

DIM. Si suppone che esista un Q -poligono tangenziale aperto di E di r lati, con $r \geq 2$, e $A = P_0$. Si supponga che C_m sia la curva tale che $E \cdot C_m = 3mQ$. Indicata con T_i la retta tangente ad E in P_i , $i = 0, \dots, r-1$, e con S la retta congiungente P_0, P_r, Q , si ponga

$$h_r = \prod_{j=0}^{r-1} t_j^{(-1)^j 2^{r-1-j}}.$$

Risulta allora

$$\operatorname{div} (h_r^{3m} s^{3m(-1)^r} c_m^{(-1)^{r+1}}) = 3m(2^r + (-1)^r)P_0.$$

Per il Lemma 2.2 esiste allora almeno una curva C_n di ordine $n = m(2^r + (-1)^r)$ per cui $E \cdot C_n = 3nA$. Il viceversa si dimostra facilmente con considerazioni simili a quelle della dim. della Prop. 2.1. ■

Per stabilire il tipo dei vertici $P_0, \dots, P_r$ di un Q -poligono tangenziale aperto di r lati, con $r \geq 2$, si pone lo stesso problema del n. 4 precedente: la Prop. 5.1 assicura l'esistenza e sostanzialmente dice come trovare l'equazione (cfr. Osservazione 2 del n. 2) di una curva C_n tale che $E \cdot C_n = 3nP_0$, ma nulla dice sulla sua eventuale riducibilità. È ancora applicabile il Lemma 4.2 che permette di affermare che: *se Q è un flesso e l'intero $n = 2^r + (-1)^r$ è primo, con $r \geq 2$, allora il punto P_0 è di tipo $3(2^r + (-1)^r)$* . In questo modo si ottengono ad esempio punti $P_0 \in E$ di tipo 15, 21, 51, 93 rispettivamente per $r = 2, 3, 4, 5$ ed $m = 1$. Più difficile è dire in generale qual'è il tipo del primo vertice di un Q -poligono tangenziale aperto per $r \geq 6$ e $m \geq 2$.

Concludiamo col seguente esempio che illustra la nozione di esagono tangenziale e di poligono tangenziale aperto di $r = 3$ lati ed il loro collegamento.

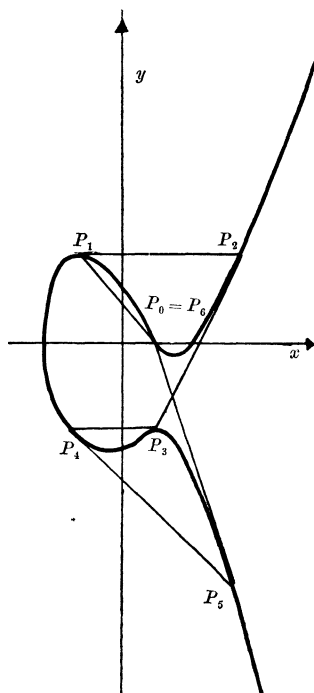


Figura 2

ESEMPIO. Sia E la cubica ellittica (cfr. fig. 2)

$$Y^2Z + XYZ + YZ^2 - X^3 + X^2Z + 3XZ^2 - 3Z^3$$

di $\mathbf{P}_k^2$, con k campo di caratteristica p , $p \neq 2, 3$. E contiene il flesso $F = (0, 1, 0)$ ed il punto $A = (1, 0, 1)$. Detto $P_0 = A$ e P_i il punto tangenziale di P_{i-1} per $i = 1, \dots, 6$, risulta

$$\begin{aligned} P_1 &= (-1, 2, 1), & P_2 &= (3, 2, 1), & P_3 &= (1, -2, 1), \\ P_4 &= (-1, -2, 1), & P_5 &= (3, -6, 1), & P_6 &= P_0. \end{aligned}$$

Poichè P_0, P_3, F sono allineati, si può considerare P_0 quale primo vertice di un F -poligono tangenziale aperto di $r = 3$ lati; esiste perciò una curva ridotta ed irriducibile C_r tale che $E \cdot C_r = 21A$ ed A è di tipo 21. D'altra parte abbiamo visto che A , come del resto tutti gli altri P_i , ($i = 1, \dots, 5$), risulta essere pure vertice di un esagono tangenziale di E ; così A (e P_i) è vertice di un esagono tangenziale ed è di tipo 21.

6. Osservazioni.

1) Se $P_0, \dots, P_{r-1} \in E$ sono vertici di un poligono tangenziale di E , allora esiste almeno una curva $C_r \subset \mathbf{P}_k^2$, di ordine r , tale che

$$E \cdot C_r = 3(P_0 + \dots + P_{r-1}).$$

Infatti dette $C_n^{(i)}$ e T_i rispettivamente la curva $3n$ -osculatrice e la retta tangente ad E in P_i , ($i = 0, \dots, r-1$), basta considerare

$$g = \frac{c_n^{(0)} \dots c_n^{(r-1)}}{(t_1 \dots t_{r-1})^{n-1}} \in K$$

avente per divisore $\text{div}(g) = 3(P_0 + \dots + P_{r-1})$ che individua almeno una curva C_r suddetta.

2) Se C_n e C'_n sono due curve di $\mathbf{P}_k^2$ tali che $E \cdot C_n = (3n-1)P_0 + P_1$ e $E \cdot C'_n = (3n-1)P_0 + P'_1$ allora risulta $P_1 = P'_1$ per il teorema di Riemann-Roch (cfr. dim. della Prop. 2.1); si può perciò gene-

realizzare in modo ovvio la nozione di poligono tangenziale per $n \geq 1$, considerando come lati curve C_n anzichè rette. I vertici di siffatti poligoni tangenziali generalizzati sono ancora tutti punti dello stesso tipo 3s.

3) Quanto fatto per la cubica ellittica piana E si può ripetere per la quartica ellittica sghebbata $C_4 \subset \mathbb{P}_k^3$; basta fissare un punto $\bar{P} \in C_4$ e per ogni punto $P \in C_4$ chiamare tangenziale di P il punto $Q \in C_4$ ulteriore intersezione di C_4 col piano tangente a C_4 in P e passante per $\bar{P}$. Di fatto ciò non dice nulla di nuovo perchè C_4 è isomorfa alla cubica ellittica piana proiezione di C_4 da $\bar{P}$, e tale proiezione mantiene i tangenziali.

BIBLIOGRAFIA

- [1] S. ABHYANKAR, *Remark on Hessians and flexes*, Nieuw Archief v. Wisk., (3) **11** (1963), pp. 110-117.
- [2] P. APPEL - E. GOURSAT, *Théorie des fonctions algébriques*, Gauthier-Villars, Paris (1895).
- [3] F. ENRIQUES - O. CHISINI, *Teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche*, vol. I, II, III, Zanichelli, Bologna (1918).
- [4] D. GALLARATI, *Ricerche sul contatto di superficie algebriche lungo curve*, Mémoires de l'Ac. Roy. Belgique, **32** (1960).
- [5] R. HARTSHORNE, *Algebraic Geometry*, Springer, New York (1977).
- [6] D. MUMFORD, *Lectures on curves on an Algebraic Surface*, Annals of Math. Studies 59, Princeton U.P. (1966).
- [7] J. G. SEMPLE - G. T. KNEBONE, *Algebraic Curves*, Oxford (1959).
- [8] E. STAGNARO, *Su alcune generalizzazioni della nozione di dominio fattoriale*, Ann. Univ. Ferrara, **19** (1974), pp. 157-179.

Manoscritto pervenuto in redazione il 20 dicembre 1978.