

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

GUGLIELMO LUNARDON

Piani di traslazione derivabili

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 61 (1979), p. 271-284

[<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1979__61__271_0>](http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1979__61__271_0)

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1979, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

Piani di traslazione derivabili.

GUGLIELMO LUNARDON (*)

I piani derivabili introdotti da A. Albert e da T. Ostrom (cfr. [1] e [18]) permettono di costruire dei nuovi piani proiettivi; diverse classi di tali piani sono state analizzate dettagliatamente. D'altra parte è interessante studiare le proprietà comuni a tutti i piani derivabili; da questo punto di vista il risultato più importante è quello ottenuto da O. Prohaska e da J. Cofman (si veda [22] e [11]) che hanno dimostrato che i sottopiani di Baer appartenenti a un insieme di derivazione di un piano derivabile sono desarguesiani.

In questa nota si fissa l'attenzione sui piani di traslazione finiti derivabili e sfruttando la rappresentazione di André, mediante la quale ogni piano di traslazione si può rappresentare con una terna $(\Sigma', \Sigma, \mathcal{F})$ dove Σ' è uno spazio proiettivo desarguesiano, Σ un iperpiano di Σ' ed $\mathcal{F}$ una fibrazione di Σ , si dimostra che un piano di traslazione è derivabile se e solo se esiste un quasicorpo che coordinatizza il piano e che è uno spazio vettoriale destro di dimensione due su un suo sottocorpo. Inoltre si caratterizzano i sottopiani di Baer in termini di sottogeometrie di Σ' ; questo permette di dimostrare che, nell'ipotesi che risulti $\Sigma' = PG(4, q)$, il piano rappresentato dalla terna $(\Sigma', \Sigma, \mathcal{F})$ è derivabile se e solo se $\mathcal{F}$ contiene un regolo o uno pseudoregolo e che esiste al più un insieme di derivazione contenente tre fibre di $\mathcal{F}$ fissate. Mediante questi risultati si possono caratterizzare i semicorpi di dimensione due sul nocciolo che coordinatizzano un piano derivabile: per tali semicorpi il nocciolo è un nucleo debole.

In questo lavoro useremo la terminologia e le notazioni usate in [12].

(*) Indirizzo dell'A.: Istituto di Matematica «R. Caccioppoli» - Via Mezzocannone 8 - 80134 Napoli.

Lavoro svolto nell'ambito delle attività del G.N.S.A.G.A.

1. Introduzione.

Una *fibrazione parziale* dello spazio proiettivo Σ è una famiglia $\mathcal{F}$ di sottospazi di Σ che a due a due generano Σ e sono fra loro sghembi.

Se ogni punto di Σ appartiene a un elemento di $\mathcal{F}$ diremo che $\mathcal{F}$ è una *fibrazione* e i sottospazi di $\mathcal{F}$ si chiameranno *fibre* ⁽¹⁾.

Se Σ' è uno spazio proiettivo desarguesiano e $\mathcal{F}$ è una fibrazione di un iperpiano fissato Σ di Σ' è noto (cfr. [2], [6], [7] e [23]) che si può definire un piano proiettivo $P(\Sigma', \Sigma, \mathcal{F})$ nel seguente modo. I punti di $P(\Sigma', \Sigma, \mathcal{F})$ sono di due tipi: quelli di tipo (1) sono rappresentati dai punti di Σ' non incidenti con Σ mentre i punti di tipo (2) sono rappresentati dalle fibre di $\mathcal{F}$. Anche le rette sono di due tipi: quelle di tipo (1) sono rappresentate dai sottospazi di Σ' che non sono contenuti in Σ e che intersecano Σ in una fibra di $\mathcal{F}$; c'è un'unica retta di tipo (2) rappresentata da Σ . Il piano $P(\Sigma', \Sigma, \mathcal{F})$ è di traslazione rispetto alla retta rappresentata da Σ (cfr. [6] e [23]).

Si osservi che i punti di tipo (1) e le rette di tipo (1) di $P(\Sigma', \Sigma, \mathcal{F})$ formano un piano affine di traslazione $A(\Sigma', \Sigma, \mathcal{F})$.

Si dimostra che ogni piano di traslazione si può costruire in questo modo (cfr. [2], [6], [23]).

Se Σ è uno spazio proiettivo desarguesiano esistono un corpo K e uno spazio vettoriale V su K tali che Σ si può identificare con il reticolo $\Sigma(V/K)$ dei sottospazi vettoriali di V (si veda [12], pp. 26-28); lo spazio Σ viene detto spazio proiettivo sul corpo K .

Sia $\mathcal{F}$ una fibrazione dello spazio proiettivo Σ sul corpo K e siano A , B e C tre fibre a due a due distinte; esiste un'unica trasformazione lineare regolare da A a B (intesi come spazi vettoriali su K), che ad a ($\in A$) associa a' ($\in B$), tale che $C = \{a + a' : a \in A\}$ (cfr. [6] e [7]). Inoltre per ogni fibra $D \neq A$ esiste un'unica trasformazione lineare $J(D)$ di A in sè per cui $D = \{aJ(D) + a' : a \in A\}$; se $D \neq B$ allora $J(D)$ è regolare (cfr. [6]). Sia

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}(A, B, C) = \{J(D) : D \in \mathcal{F}; D \neq A\}$$

e sia e un vettore non nullo di A ; per ogni elemento b di A esiste un unico elemento $C(b)$ di $\mathcal{C}$ per cui $eC(b) = b$; inoltre se si pone $a \cdot b =$

⁽¹⁾ Cioè, per semplicità, noi chiamiamo « fibrazione » ciò che alcuni autori chiamano « fibrazione planare ».

$= aC(b)$ segue che $\mathcal{U}(A, B, C) = (A; +, \cdot)$ è un quasicorpo ⁽²⁾ di unità e che coordinatizza $A(\Sigma', \Sigma, \mathcal{F})$ (si veda [6]). Inoltre il nocciolo ⁽³⁾ di $\mathcal{U}(A, B, C; e)$ contiene un sottocorpo isomorfo a K . In seguito diremo che $\mathcal{U}(A, B, C; e)$ è il quasicorpo di unità e che (A, B, C) -coordinatizza $\mathcal{F}$.

Una congruenza del gruppo $W = W(+)$ è una famiglia $\mathcal{S}$ di sottogruppi non banali di W per cui valgono le seguenti proprietà:

(a) ogni elemento non nullo di W appartiene a un unico sottogruppo di $\mathcal{S}$;

(b) se A e B ($A \neq B$) appartengono a $\mathcal{S}$ si ha $A + B = W$.

Se $\mathcal{S}$ è una congruenza del gruppo W è noto (si veda [2]) che si può definire un piano affine $A(W; \mathcal{S})$ nel seguente modo: i punti sono gli elementi di W ; le rette sono i laterali degli elementi di $\mathcal{S}$; l'incidenza è l'usuale relazione d'appartenenza.

Un $\mathcal{S}$ -endomorfismo è un endomorfismo α di W tale che $A\alpha \subseteq A$ per ogni sottogruppo A appartenente a $\mathcal{S}$. L'insieme degli $\mathcal{S}$ -endomorfismi, munito delle usuali relazioni di somma e di prodotto di endomorfismi, si chiamerà *nucleo* di $\mathcal{S}$. Si dimostra (cfr. [2], pp. 167-168) che se $\mathcal{U}$ è un quasicorpo che coordinatizza $A(W; \mathcal{S})$ allora il nucleo di $\mathcal{S}$ è un corpo isomorfo al nocciolo di $\mathcal{U}$.

Si osservi che W si può pensare come uno spazio vettoriale sul nucleo di $\mathcal{S}$ e gli elementi di $\mathcal{S}$ sono sottospazi vettoriali di W . Pertanto per ogni sottocorpo K del nucleo di $\mathcal{S}$ si ha che $\mathcal{S}$ determina una fibrazione di $\Sigma(W/K) = \Sigma$ che indicheremo con $\mathcal{S}(K)$.

Si dimostra (cfr. [2]) che $A(W; \mathcal{S})$ e $A(\Sigma', \Sigma, \mathcal{S}(K))$ sono isomorfi.

2. Piani di traslazione derivabili.

Sia Σ' uno spazio proiettivo desarguesiano e sia $\mathcal{F}$ una fibrazione di un iperpiano Σ di Σ' . Si chiamerà *insieme di derivazione* per $A(\Sigma', \Sigma, \mathcal{F})$ una fibrazione parziale $\mathcal{I}$ di Σ contenuta in $\mathcal{F}$ per cui

⁽²⁾ Dicendo quasicorpo intenderemo più precisamente quasicorpo sinistro, cioè supporremo che valga la relazione $(a + b)c = ac + bc$.

⁽³⁾ Il nocciolo di un quasicorpo $\mathcal{U} = (Q; +, \cdot)$ è l'insieme

$$N = \{\xi \in Q: \forall a, b \in Q \ (\xi a)b = \xi(ab), \ \xi(a + b) = \xi a + \xi b\};$$

si dimostra che N è un corpo e che $\mathcal{U}$ è uno spazio vettoriale sinistro su N .

accade che comunque si prendano due punti X e Y di Σ' non incidenti con Σ tali che la retta di $P(\Sigma', \Sigma, \mathcal{F})$ incidente con X e con Y contenga una fibra di $\mathcal{F}$, esiste un sottopiano di Baer di $P(\Sigma', \Sigma, \mathcal{F})$ incidente con X , con Y e con tutti i punti rappresentati dalle fibre di $\mathcal{F}$.

Se $\mathcal{F}$ è un insieme di derivazione per $A(\Sigma', \Sigma, \mathcal{F})$ è noto (cfr. [1] e [18]) che si può definire un nuovo piano affine $A(\Sigma', \Sigma, \mathcal{F}, \mathcal{F})$ nel seguente modo. I punti sono quelli di $A(\Sigma', \Sigma, \mathcal{F})$. Le rette sono di due tipi: quelle di tipo (a) sono rette di $A(\Sigma', \Sigma, \mathcal{F})$ che contengono una fibra non appartenente a $\mathcal{F}$ mentre le rette di tipo (b) sono rappresentate dai sottopiani di Baer di $P(\Sigma', \Sigma, \mathcal{F})$ incidenti con ogni punto rappresentato dalle fibre di $\mathcal{F}$. Il piano $A(\Sigma', \Sigma, \mathcal{F}, \mathcal{F})$ si chiamerà il derivato di $A(\Sigma', \Sigma, \mathcal{F})$ rispetto a $\mathcal{F}$.

PROPOSIZIONE 1. *Se $\mathcal{F}$ è un insieme di derivazione per il piano $A(\Sigma', \Sigma, \mathcal{F})$ si ha:*

(1) *ogni traslazione di $A(\Sigma', \Sigma, \mathcal{F})$ è una traslazione del piano derivato e quindi il piano $A(\Sigma', \Sigma, \mathcal{F}, \mathcal{F})$ è di traslazione,*

(2) *un sottopiano di Baer di $A(\Sigma', \Sigma, \mathcal{F})$, che rappresenta una retta di $A(\Sigma', \Sigma, \mathcal{F}, \mathcal{F})$, è desarguesiano.*

DIMOSTRAZIONE. La dimostrazione dell'affermazione (1) è immediata poichè ogni traslazione di $A(\Sigma', \Sigma, \mathcal{F})$ muta una retta di tipo (b) di $A(\Sigma', \Sigma, \mathcal{F}, \mathcal{F})$ in una retta di tipo (b).

Per la dimostrazione dell'affermazione (2) si veda [11], Teor. 4. ■

TEOREMA 1. *Se $\mathcal{F}$ è un insieme di derivazione per il piano $A(\Sigma', \Sigma, \mathcal{F})$ esistono uno spazio proiettivo desarguesiano A' e due fibrazioni $\mathcal{F}_1$ ed $\mathcal{F}_2$ di un iperpiano Λ di A' tali che i piani $A(\Lambda', \Lambda, \mathcal{F}_1)$ e $A(\Lambda', \Lambda, \mathcal{F}_2)$ sono rispettivamente isomorfi ad $A(\Sigma', \Sigma, \mathcal{F})$ e ad $A(\Sigma', \Sigma, \mathcal{F}, \mathcal{F})$.*

DIMOSTRAZIONE. Se $\Sigma = \Sigma(V/K)$ la fibrazione $\mathcal{F}$ determina una congruenza del gruppo additivo di V che indicheremo con $\mathcal{F}^*$.

Se $\Sigma' = \Sigma(V'/K)$ e $V' = \langle t \rangle + V$ l'applicazione σ , che ad ogni vettore a di V associa il punto $\langle t + a \rangle$ di Σ' , è un isomorfismo di $A(V, \mathcal{F}^*)$ in $A(\Sigma', \Sigma, \mathcal{F})$.

Per ogni elemento b di V la traslazione di $A(V; \mathcal{F}^*)$, che muta 0 in b , è determinata dall'applicazione $\tau(b)$ di V in sè che ad a associa $a + b$ (cfr. [2]). Inoltre τ è un isomorfismo di V nel gruppo T delle traslazioni di $A(V; \mathcal{F}^*)$.

Se B è un sottopiano di Baer che rappresenta una retta di tipo (b) di $A(\Sigma', \Sigma, \mathcal{F}, \mathcal{F})$ contenente il punto $\langle t \rangle = 0\sigma$ sia $\mathcal{C}(B)$ il gruppo

delle traslazioni di $A(\Sigma', \Sigma, \mathcal{F}, \mathcal{I})$ che muta B in sè. Per la (1) della Proposizione 1 segue che $\sigma\mathcal{G}(B)\sigma^{-1}$ è un sottogruppo di T ; di conseguenza B determina un sottogruppo B^* di V tale che

$$B^* = (\sigma\mathcal{G}(B)\sigma^{-1})\tau^{-1}.$$

Se $\mathcal{D}$ è l'insieme di tutte le rette di tipo (b) di $A(\Sigma', \Sigma, \mathcal{F}, \mathcal{I})$ che sono incidenti con $\langle t \rangle$ sia

$$\mathcal{D}^* = \{(\sigma\mathcal{G}(B)\sigma^{-1})\tau^{-1} : B \in \mathcal{D}\},$$

$$\mathcal{I}^* = \{A \in \mathcal{F}^* : A\sigma \cap \Sigma \in \mathcal{I}\}.$$

Si osservi che se B appartiene a $\mathcal{D}$ per ogni elemento non nullo p di B^* esiste un sottogruppo A di V appartenente a $\mathcal{I}^*$ tale che $p \in A$; di conseguenza è immediato che $S = (\mathcal{F}^* - \mathcal{I}^*) \cup \mathcal{D}^*$ è una congruenza di V . Si verifica senza difficoltà che σ è un isomorfismo di $A(V; S)$ in $A(\Sigma', \Sigma, \mathcal{F}, \mathcal{I})$ poichè per ogni elemento B^* di $\mathcal{D}^*$ ed ogni a di V si ha che $B^* + a$ è un sottopiano di Baer di $A(V; \mathcal{F}^*)$ e quindi $(B^* + a)\sigma$ è una retta di tipo (b) di $A(\Sigma', \Sigma, \mathcal{F}, \mathcal{I})$.

Se F è il corpo intersezione del nucleo di $\mathcal{F}^*$ con quello di S sia $A = \Sigma(V/F)$ ed $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}^*(F)$, $\mathcal{F}_2 = S(F)$. Se A' è uno spazio proiettivo che contiene A come iperpiano si ha che $A(A', A, \mathcal{F}_1)$ è isomorfo ad $A(\Sigma', \Sigma, \mathcal{F})$ e che $A(A', A, \mathcal{F}_2)$ è isomorfo ad $A(\Sigma', \Sigma, \mathcal{F}, \mathcal{I})$. ■

COROLLARIO 1. *Nelle ipotesi del Teorema 1 se $\mathcal{U}$ è il quasicorpo di unità e che (A, B, C) -coordinatizza $\mathcal{F}$ allora $\mathcal{U}$ (A, B, C) -coordinatizza anche $\mathcal{F}_1$.*

DIMOSTRAZIONE. Se $\Sigma = \Sigma(V/K)$ il nucleo di $\mathcal{F}$ contiene un sottocorpo isomorfo a K .

Poichè un $\mathcal{F}^*$ -endomorfismo α è tale che $D\alpha \subseteq D$ per ogni elemento D di $\mathcal{F}^*$ si ha

$$(a + a')\alpha = a\alpha + (a')\alpha = a\alpha + (a\alpha)'$$

per ogni a appartenente ad A . Inoltre se D è un elemento di $\mathcal{F}$ diverso da A si ha

$$(aJ(D) + a')\alpha = aJ(D)\alpha + (a')\alpha = aJ(D)\alpha + (a\alpha)' = (a\alpha)J(D) + (a\alpha)'$$

poichè $D\alpha \subseteq D$. Questo significa che le applicazioni di $C(A, B, C)$ sono trasformazioni lineari di V inteso come spazio vettoriale sul nucleo di $\mathcal{F}^*$. Da qui segue l'affermazione. ■

Sia $\mathcal{F}$ una fibrazione dello spazio proiettivo desarguesiano Σ e sia $\mathcal{F}$ una fibrazione parziale di Σ contenuta in $\mathcal{F}$. Se A, B, C sono tre fibre di $\mathcal{F}$ a due a due distinte e se $\mathcal{U}$ è il quasicorpo di unità e che (A, B, C) -coordinatizza $\mathcal{F}$ si ponga

$$K(A, B, C, \mathcal{F}) = \{a \in \mathcal{U}: a = eJ(D); D \in \mathcal{F}\}.$$

TEOREMA 2. *Sia $\mathcal{F}$ una fibrazione dell'iperpiano Σ dello spazio proiettivo finito Σ' e sia $\mathcal{U}$ il quasicorpo di unità e che (A, B, C) -coordinatizza $\mathcal{F}$. Una fibrazione parziale $\mathcal{F}$, che contiene A, B, C ed è contenuta in $\mathcal{F}$, è un insieme di derivazione per $A(\Sigma', \Sigma, \mathcal{F})$ se e solo se $K = K(A, B, C, \mathcal{F})$ è un corpo ed $\mathcal{U}$ è uno spazio vettoriale destro di dimensione due su K .*

DIMOSTRAZIONE. Sia $\mathcal{F}$ un insieme di derivazione per $A(\Sigma', \Sigma, \mathcal{F})$. Per il Teorema 1 esistono uno spazio proiettivo Λ e due fibrazioni $\mathcal{F}_1$ ed $\mathcal{F}_2$ di Λ tali che $A(\Lambda', \Lambda, \mathcal{F}_1)$ e $A(\Lambda', \Lambda, \mathcal{F}_2)$ sono rispettivamente isomorfi ad $A(\Sigma', \Sigma, \mathcal{F})$ e ad $A(\Sigma', \Sigma, \mathcal{F}, \mathcal{F})$. Per il Corollario 1 si ha che $\mathcal{U}$ è il quasicorpo di unità e che (A, B, C) -coordinatizza $\mathcal{F}_1$. Sia

$$\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}' \cup \mathcal{S}_1 \quad \mathcal{F}_2 = \mathcal{F}' \cup \mathcal{S}_2.$$

Si osservi che $K = K(A, B, C, \mathcal{S}_1)$; inoltre se D appartiene a $\mathcal{S}_2$ l'insieme $\mathcal{F}(D) = \{D \cap T: T \in \mathcal{S}_1\}$ è una fibrazione di D poichè ogni retta di $A(\Lambda', \Lambda, \mathcal{F}_2)$, che contiene D , è un sottopiano di Baer di $A(\Lambda', \Lambda, \mathcal{F}_1)$. È ovvio che A, B, C appartengono a $\mathcal{S}_1$.

Sia g la trasformazione lineare regolare di A in B , che ad a associa a' , tale che $C = \{a + a': a \in A\}$.

Siano T_1 e T_2 due fibre distinte di $\mathcal{S}_2$ e per $i = 1, 2$ siano

$$A_i = T_i \cap A \quad B_i = T_i \cap B \quad C_i = T_i \cap C.$$

Poichè $\mathcal{F}(T_i)$ è una fibrazione di T_i a cui appartengono le fibre A_i, B_i e C_i esiste un'unica trasformazione lineare regolare g_i da A_i a B_i tale che $C_i = \{a + ag_i: a \in A_i\}$. Essendo

$$A = A_1 \oplus A_2 \quad B = B_1 \oplus B_2 \quad C = C_1 \oplus C_2$$

la trasformazione lineare regolare f da A a B , che al punto $a = a_1 + a_2$ ($a_i \in A_i$) associa $af = a_1g_1 + a_2g_2$, gode della proprietà che $C = \{a + af: a \in A\}$. Per l'unicità di g segue che $f = g$; pertanto $A_i g = B_i$ e quindi l'insieme $\mathcal{C}(A_i, B_i, C_i)$ delle trasformazioni lineari associate a $\mathcal{F}(T_i)$ è tale che

$$\mathcal{C}(A_i, B_i, C_i) = \{X/A_i: X = J(D); D \in \mathcal{S}_1; D \neq A\}$$

dove X/A_i è la restrizione della trasformazione lineare X ad A_i . Poichè T_i determina un sottopiano di Baer desarguesiano di $A(A', A, \mathcal{F}_1)$ segue che $\mathcal{C}(A_i, B_i, C_i)$ è chiuso rispetto alla somma e al prodotto tra trasformazioni lineari (cfr. [6]); di conseguenza lo è anche $\mathcal{C}(\mathcal{S}_1) = \{J(D): D \in \mathcal{S}_1, A \neq D\}$. Pertanto K è un corpo perchè se a e b appartengono a K allora $C(a)C(b)$ e $C(a) + C(b)$ ⁽⁴⁾ appartengono a $\mathcal{C}(\mathcal{S}_1)$ e quindi $C(ab) = C(a)C(b)$ e $C(a + b) = C(a) + C(b)$. Si osservi che se A è uno spazio proiettivo sul corpo F allora A_1, B_1 e K (come spazi vettoriali su F) sono a due a due isomorfi. Pertanto $T_1 = A_1 \oplus B_1$ e quindi $\mathcal{U}$ è isomorfo a K^2 . Da qui segue che $\mathcal{U}$ ha dimensione due su K .

Viceversa supponiamo che K sia un corpo e che $\mathcal{U}$ abbia dimensione due su K .

Sia $\Sigma' = \Sigma(V'/F_1)$ e $\Sigma = \Sigma(V/F_1)$ con $V' = \langle t \rangle + V$. Sia $\mathcal{F}^*$ la congruenza del gruppo additivo di V e τ l'isomorfismo di $A(V; \mathcal{F}^*)$ in $A(\Sigma', \Sigma, \mathcal{F})$ di cui al Teorema 1.

Per ogni elemento non nullo a di A si consideri il sottopiano

$$B(a) = \{a\eta + (a\xi)': \eta, \xi \in K\}.$$

Se $D + b$ è una retta di $A(V; \mathcal{F}^*)$ tale che $D\tau$ non è una fibra di $\mathcal{F}$ allora $D \oplus B(a) = V$ ⁽⁵⁾ e quindi se $b = b_1 + b_2$ dove b_1 appartiene ad D e $b_2 \in B(a)$ allora $b_2 = -b_1 + b$ è incidente con $D + b$ e con $B(a)$. Questo prova che ogni retta di $A(V; \mathcal{F}^*)$ contiene almeno un punto di $B(a)$. Se b è un punto di $A(V; \mathcal{F}^*)$ si ha $b = b_1 + b'_2$ con b_1 e b_2 appartenenti ad A . Poichè A è uno spazio vettoriale destro di dimensione 2 su K se $a \notin K$ si ha:

$$b_1 = \xi_1 + a\eta_1 \quad b_2 = \xi_2 + a\eta_2 \quad (\xi_i, \eta_i \in K)$$

e quindi

$$b = (a\eta_1 + (a\eta_2)') + (\xi_1 + \xi_2').$$

⁽⁴⁾ $C(a)$ è la trasformazione di $\mathcal{C}(A, B, C)$ tale che $a = eC(a)$.

⁽⁵⁾ Con $D \oplus B(a)$ s'intende la somma diretta tra sottogruppi.

Pertanto se $\xi_1 = \xi_2 v$ e $v = eJ(D)$ allora la retta $D + (a\eta_1 + (a\eta_2)')$ di $A(V; \mathcal{F}^*)$ è anche una retta di $B(a)$ incidente con b . Se $a \in K$ si può ripetere il ragionamento con qualche lieve modifica considerando un elemento t di A non appartenente a K . Pertanto $B(a)$ è un sottopiano di Baer di $A(V; \mathcal{F}^*)$ incidente con 0 e con a che interseca solo gli elementi D di $\mathcal{F}^*$ tali che $D\tau$ è una fibra di $\mathcal{F}$. Quindi $B_a = B(a)\tau$ è un sottopiano di Baer di $P(\Sigma', \Sigma, \mathcal{F})$ incidente con $\langle t \rangle$, $\langle a + t \rangle$ e con tutti i punti rappresentati dalle fibre di $\mathcal{F}$. Essendo $A(\Sigma', \Sigma, \mathcal{F})$ un piano di traslazione questo è sufficiente a dimostrare che $\mathcal{F}$ è un insieme di derivazione. ■

In [18] Ostrom ha dimostrato che la condizione del Teorema 2 è sufficiente.

3. Regoli e pseudoregoli di $PG(3, q)$.

In questo paragrafo studieremo i piani di traslazione derivabili che si possono rappresentare mediante una fibrazione di rette di $PG(3, q)$.

TEOREMA 3. *Sia Σ' uno spazio proiettivo desarguesiano e sia $\mathcal{F}$ una fibrazione di un iperpiano Σ di Σ' . Se il piano $P(\Sigma', \Sigma, \mathcal{F})$ ha ordine finito n^2 un sottoinsieme di punti di Σ' , che chiameremo Ω' , rappresenta un sottopiano di Baer di $A(\Sigma', \Sigma, \mathcal{F})$ se e solo se valgono le seguenti proprietà:*

- (1) Ω' è una sottogeometria;
- (2) se $\Omega = \Omega' \cap \Sigma$ allora $\mathcal{F}(\Omega) = \{A \cap \Omega : A \in \mathcal{F}\}$ è una fibrazione di Ω ;
- (3) i punti di Ω' non incidenti con Ω sono n^2 .

DIMOSTRAZIONE. È ovvio che se valgono le condizioni (1), (2) e (3) Ω' determina un sottopiano di Baer di $A(\Sigma', \Sigma, \mathcal{F})$. Dimostriamo l'implicazione inversa.

Sia $\Sigma' = \Sigma(V'/K)$ e $\Sigma = \Sigma(V/K)$. Si dimostra senza difficoltà che il sottopiano rappresentato da Ω' è di traslazione; di conseguenza Ω' determina un sottogruppo B di ordine n^2 di V che rappresenta un sottopiano di Baer di $A(V; \mathcal{F}^*)$ dove $\mathcal{F}^*$ è la congruenza del gruppo additivo di V determinata da $\mathcal{F}$: pertanto si ha che $\mathcal{F}^*(B) = \{B \cap A : A \in \mathcal{F}^*\}$ è una congruenza di B . Se F è il corpo intersezione tra il

nucleo di $\mathcal{F}^*(B)$ e il sottocorpo del nucleo di $\mathcal{F}^*, \tilde{K}$, isomorfo a K , è ovvio che B e V sono spazi vettoriali su F ; poichè Σ è isomorfo a $\Sigma(V/\tilde{K})$ segue che $\Omega = \{ \langle a \rangle : a \in B \}$ è una sottogeometria di Σ . ■

COROLLARIO 2. *Sia $\Sigma' = PG(4, q)$ e $\mathcal{F}$ una fibrazione dell'iperpiano Σ di Σ' ; se Ω' rappresenta un sottopiano di Baer di $A(\Sigma', \Sigma, \mathcal{F})$ si ha che o $\Omega' = PG(2, q)$ oppure esiste un numero naturale s per cui $s^2 = q$ e $\Omega' = PG(4, s)$.*

DIMOSTRAZIONE. Poichè una sottogeometria di Σ' non può avere dimensione maggiore di Σ' , l'affermazione è ovvia. ■

Chiameremo *regolo* di $\Sigma = PG(3, q)$ una fibrazione parziale $\mathcal{R}$ di Σ che gode delle seguenti proprietà:

- i) se una retta interseca tre elementi di $\mathcal{R}$ interseca tutti gli elementi di $\mathcal{R}$ (una tale retta si dirà che è una *trasversale* di $\mathcal{R}$);
- ii) se r è una trasversale di $\mathcal{R}$ ogni punto è incidente con un elemento di $\mathcal{R}$;
- iii) $\mathcal{R}$ contiene almeno tre rette.

L'insieme delle trasversali di $\mathcal{R}$ forma un regolo $\mathcal{R}'$ che chiameremo *regolo opposto* ad $\mathcal{R}$.

Uno *pseudoregolo* di $\Sigma = PG(3, s^2)$ è una fibrazione parziale $\mathcal{F}$ di Σ contenente $s^2 + 1$ rette che gode delle seguenti proprietà:

a) esistono due rette A, B di Σ fra loro sghembe che intersecano ogni retta di $\mathcal{F}$; in seguito diremo che A e B sono le *rette trasversali* di $\mathcal{F}$;

b) esistono $s - 1$ sottogeometrie $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_{s-1}$ di Σ isomorfe a $PG(3, s)$ tali che se p è un punto appartenente ad una retta di $\mathcal{F}$ che non appartiene nè ad A nè a B esiste un'unica sottogeometria Ω_i incidente con p ; le sottogeometrie Ω_i si chiameranno *sottogeometrie trasversali* di $\mathcal{F}$ ⁽⁶⁾.

TEOREMA 4. *Sia $\mathcal{F}$ una fibrazione di $\Sigma = PG(3, q)$; se $\mathcal{F}$ è un insieme di derivazione per $A(\Sigma', \Sigma, \mathcal{F})$ segue che $\mathcal{F}$ è o un regolo o uno pseudoregolo.*

⁽⁶⁾ La nozione di pseudoregolo è stata introdotta in [13] dove però è definita in modo diverso. Si potrebbe dimostrare che le due definizioni sono equivalenti.

DIMOSTRAZIONE. Se tre rette di tipo (b) di $A(\Sigma', \Sigma, \mathcal{F}, \mathcal{I})$ sono rappresentate da piani di Σ' allora $\mathcal{I}$ ha tre rette trasversali. Poichè un regolo è un sistema di generatrici di una quadrica iperbolica di Σ esso è univocamente determinato da tre rette trasversali; quindi $\mathcal{I}$ è un regolo.

Se $\mathcal{I}$ non è un regolo per il Corollario 2 esiste almeno una retta di tipo (b) di $A(\Sigma', \Sigma, \mathcal{F}, \mathcal{I})$ rappresentata da una sottogeometria $\Omega' = PG(4, s)$ ($q = s^2$) di Σ' ; inoltre il numero delle rette trasversali di $\mathcal{I}$ è minore di tre. Se n è il numero delle rette trasversali di $\mathcal{I}$ ed m è il numero di sottogeometrie di Σ' isomorfe a $PG(3, s)$ che determinano una retta di tipo (b) di $A(\Sigma', \Sigma, \mathcal{F}, \mathcal{I})$ vale l'uguaglianza

$$n(s^2 + 1) + m(s^3 + s^2 + s + 1) = (s^2 + 1)^2$$

poichè gli $(s^2 + 1)^2$ punti appartenenti alle rette di $\mathcal{I}$ appartengono ad una delle sottogeometrie di Σ' che rappresentano sottopiani di Baer di $A(\Sigma', \Sigma, \mathcal{F})$. Da qui segue che $n = 2$ ed $m = s - 1$; pertanto $\mathcal{I}$ è uno pseudoregolo. ■

OSSERVAZIONE 1. Se $\mathcal{R}$ è un regolo le cui rette sono fibre della fibrazione $\mathcal{F}$ dell'iperpiano Σ dello spazio proiettivo $\Sigma' = PG(4, q)$ sia $\mathcal{R}'$ il regolo opposto ad $\mathcal{R}$; la fibrazione $\mathcal{F}' = (\mathcal{F} - \mathcal{R}) \cup \mathcal{R}'$ di Σ è tale che $A(\Sigma', \Sigma, \mathcal{F}') = A(\Sigma', \Sigma, \mathcal{F}, \mathcal{I})$ (si veda [6]). ■

OSSERVAZIONE 2. Se $\mathcal{I}$ è uno pseudoregolo contenuto nella fibrazione $\mathcal{F}$ di $\Sigma = PG(3, q)$ sia $\mathcal{F}_1$ la partizione di Σ definita ponendo

$$\mathcal{F}_1 = (\mathcal{F} - \mathcal{I}) \cup \{A, B\} \cup \{\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_{s-1}\}$$

dove A e B sono le rette trasversali di $\mathcal{I}$ e $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_{s-1}$ le sottogeometrie trasversali di $\mathcal{I}$.

Se Σ' è uno spazio proiettivo che contiene Σ come iperpiano si può definire un piano affine di traslazione $A(\mathcal{F}_1)$ nel seguente modo (si veda [9]): i punti sono quelli di Σ' non incidenti con Σ ; le rette sono o i sottospazi S di Σ' non contenuti in Σ tali che $S \cap \Sigma$ è una retta di $(\mathcal{F} - \mathcal{I}) \cup \{A, B\}$ oppure le sottogeometrie di Σ' isomorfe a $PG(4, s)$ che intersecano Σ in una delle sottogeometrie trasversali di $\mathcal{I}$; l'incidenza è l'usuale relazione d'appartenenza.

Pertanto $\mathcal{I}$ è un insieme di derivazione per $A(\Sigma', \Sigma, \mathcal{F})$ (cfr. [19]) e $A(\mathcal{F}_1) = A(\Sigma', \Sigma, \mathcal{F}, \mathcal{I})$. ■

OSSERVAZIONE 3. Nell'ipotesi dell'Osservazione 2 se Ω è una sottogeometria trasversale di $\mathcal{F}$, si ha che $\mathcal{F}(\Omega) = \{\Omega \cap A: A \in \mathcal{F}\}$ è una fibrazione di Ω . Per la (1) della Proposizione 1 il sottopiano di Baer rappresentato da Ω è desarguesiano; di conseguenza $\mathcal{F}(\Omega)$ è regolare ⁽⁷⁾ (cfr. [6] e [7]). ■

OSSERVAZIONE 4. Sia $\mathcal{F}$ un insieme di derivazione per il piano $A(\Sigma', \Sigma, \mathcal{F})$ con $\Sigma' = PG(4, q)$ e siano A, B, C tre fibre di $\mathcal{F}$ a due a due distinte. Se $\mathcal{U}$ è il quasicorpo di unità e che (A, B, C) -coordinatizza $\mathcal{F}$, per il Teorema 1 di [16] $\mathcal{F}$ è un regolo se e solo se $K(A, B, C, \mathcal{F}) = K$ è un sottocorpo del nocciolo di $\mathcal{U}$ tale che $ab = ba$ per ogni a appartenente a K ed ogni b in $\mathcal{U}$. ■

TEOREMA 5. Sia $\mathcal{F}$ una fibrazione di $\Sigma = PG(3, q)$ e siano A, B, C tre fibre di $\mathcal{F}$ a due a due distinte. Sia $\mathcal{U}$ il quasicorpo di unità e che (A, B, C) -coordinatizza $\mathcal{F}$ e sia N il sottocorpo del nocciolo di $\mathcal{U}$ isomorfo a $GF(q)$. Il piano $A(\Sigma', \Sigma, \mathcal{F})$ ammette un insieme di derivazione $\mathcal{F}$ che contiene A, B e C se e solo se $\mathcal{U}$ è uno spazio vettoriale destro su N .

DIMOSTRAZIONE. Per il Teorema 2 se $\mathcal{U}$ è uno spazio vettoriale destro su N esiste un insieme di derivazione per $A(\Sigma', \Sigma, \mathcal{F})$.

Sempre per il Teorema 2 se $\mathcal{F}$ è un insieme di derivazione per $A(\Sigma', \Sigma, \mathcal{F})$ si ha che $K(A, B, C, \mathcal{F}) = K = GF(q)$ e $\mathcal{U}$ è uno spazio vettoriale destro su K di dimensione 2. Per il Teorema 4 $\mathcal{F}$ è un regolo o uno pseudoregolo; quindi esistono almeno due rette trasversali.

Se $\Sigma = \Sigma(V/GF(q))$ sia r una retta che interseca A, B, C . Se $\langle a \rangle$ è il punto intersezione con A segue che

$$r = \{\langle \lambda a + a' \rangle: \lambda \in GF(q)\} \cup \{\langle a \rangle\}.$$

Quindi poichè $N = \{\lambda e: \lambda \in GF(q)\}$ esiste almeno un elemento a di $\mathcal{U}$ tale che per ogni d appartenente a K esiste un elemento ξ di N tale che $\xi a = a \cdot d$.

Se a appartiene a N si ha $a\xi = \xi a = ad$ e quindi $K = N$; analogamente se a appartiene a K segue $K = N$ poichè $\xi a = ad = da$. Sup-

(7) Una fibrazione $\mathcal{F}$ di $PG(3, q)$ è regolare se comunque si scelgano le rette A, B, C di $\mathcal{F}$ a due a due distinte esiste un regolo $\mathcal{R}$ contenuto in $\mathcal{F}$ che contiene A, B, C .

poniamo che a non appartenga nè a K nè a N ; è ovvio che $\{e, a\}$ è una base di $\mathcal{U}$ sia come spazio vettoriale su N sia su K .

Se b è un elemento di $\mathcal{U}$ si ha

$$\xi_1 + \xi_2 a = b = d_1 + ad_2$$

dove ξ_1 e ξ_2 sono elementi di N e d_1 e d_2 elementi di K . Poichè esiste un elemento v di N tale che $ad_2 = va$ segue che

$$\xi_1 - d_1 = (v - \xi_2)a.$$

Da cui $d_1 = \xi_1 + (\xi_2 - v)a$; se $(\xi_2 - v)a = ad_3$ con $d_3 \in K$ segue che $b = \xi_1 + a(d_3 + d_2)$; poichè $\{e, a\}$ è una base di $\mathcal{U}$ su K segue $\xi_1 = d_1$; cioè $K = N$. ■

OSSERVAZIONE 5. Per il Teorema 5 una fibrazione di $PG(3, q)$ contiene al più un insieme di derivazione contenente tre rette fissate della fibrazione data. ■

Se $\mathcal{U}$ è un semicorpo ed F è un campo contenuto in $\mathcal{U}$ diremo che F è un *nucleo debole* per $\mathcal{U}$ se vale la relazione $(ab)c = a(bc)$ quando almeno due degli elementi a, b e c appartengono a F .

COROLLARIO 3. Sia $\mathcal{U}$ il quasicorpo di unità e che (A, B, C) -coordinatizza la fibrazione $\mathcal{F}$ di $PG(3, q)$ e sia N il sottocorpo del nocciolo di $\mathcal{U}$ isomorfo a $GF(q)$. Se $\mathcal{U}$ è un semicorpo la fibrazione $\mathcal{F}$ contiene un insieme di derivazione per $A(\Sigma', \Sigma, \mathcal{F})$ che contiene le fibre A, B e C se e solo se N è un nucleo debole per $\mathcal{U}$.

DIMOSTRAZIONE. Se N è un nucleo debole per $\mathcal{U}$ per il Teorema 2 segue che $\mathcal{F}$ contiene un insieme di derivazione che contiene le fibre A, B e C poichè $\mathcal{U}$ è uno spazio vettoriale destro di dimensione 2 su N .

Viceversa se $\mathcal{T}$ è un insieme di derivazione per il piano $A(\Sigma', \Sigma, \mathcal{F})$ che contiene A, B e C allora $N = K(A, B, C, \mathcal{T})$ per il Teorema 5; quindi N è un nucleo debole di $\mathcal{U}$. ■

I semicorpi di dimensione 2 su un nucleo debole sono stati studiati dettagliatamente da Knuth in [15].

OSSERVAZIONE 6. Nell'esempio dato da A. Bruen in [8] di una fibrazione $\mathcal{F}$, che contiene uno pseudoregolo che non è un regolo, il quasicorpo $\mathcal{U}$ di unità e , che (A, B, C) -coordinatizza $\mathcal{F}$ è un se-

micorpo di Knuth di tipo II (cfr. [15] e [12], pag. 241). Poichè il nocciolo N di $\mathcal{U}$ non gode della proprietà $\xi a = a\xi$, per ogni a appartenente a $\mathcal{U}$ ed ogni $\xi \in N$ e poichè N è un nucleo debole, per l'Osservazione 4 ed il Corollario 3 esiste un insieme di derivazione $\mathcal{T}$ che contiene A, B, C e che non è un regolo. ■

BIBLIOGRAFIA

- [1] A. A. ALBERT, *The finite planes of Ostrom*, Bol. Soc. Mat. Mexicana, **11** (1966), pp. 1-13.
- [2] J. ANDRÉ, *Über nicht-Desarguessche Ebenen mit transitiver Translationsgruppe*, Math. Z., **60** (1954), pp. 156-186.
- [3] A. BARLOTTI, *On the definition of Baer subplanes of infinite planes*, J. Geometry, **3** (1973), pp. 87-92.
- [4] A. BARLOTTI, *Representation and construction of projective planes and other geometric structures from projective spaces*, Jber. Deutsch. Math.-Verein, **77** (1975), pp. 28-38.
- [5] R. H. BRUCK, *Construction problems in finite projective spaces*, in *Combinatorial Mathematics and its Applications* (Proc. Conf. Univ. North Carolina, Chapel Hill, N.C., 1967), Chapel Hill (1969), pp. 426-514.
- [6] R. H. BRUCK - R. C. BOSE, *The construction of translation planes from projective spaces*, J. Algebra, **1** (1964), pp. 85-102.
- [7] R. H. BRUCK - R. C. BOSE, *Linear representations of projective planes in projective spaces*, J. Algebra **4** (1966), pp. 117-172.
- [8] A. BRUEN, *Spreads and a conjecture of Bruck and Bose*, J. Algebra, **23** (1972), pp. 519-537.
- [9] A. BRUEN - J. A. THAS, *Partial spreads, packing and hermitian manifolds in $PG(3, q)$* , Math. Z., **151** (1976), pp. 207-214.
- [10] J. COFMAN, *Baer subplanes of affine and projective planes*, Math. Z., **126** (1972), pp. 339-344.
- [11] J. COFMAN, *Baer subplanes and Baer collineations of derivable projective planes*, Abh. Math. Sem. Hamburg, **44** (1975), pp. 187-192.
- [12] P. DEMBOWSKI, *Finite geometries*, Springer-Verlag (1968).
- [13] J. W. FREEMAN, *Reguli and pseudo-reguli in $PG(3, q^2)$* , in corso di stampa su Geometriae Dedicata.
- [14] D. R. HUGHES - F. C. PIPER, *Projective planes*, Springer-Verlag (1972).
- [15] D. E. KNUTH, *Finite semifields and projective planes*, J. Algebra, **2** (1965), pp. 182-217.
- [16] G. LUNARDON, *Proposizioni configurazionali in una classe di fibrazioni*, Boll. U.M.I., **13-A** (1976), pp. 404-413.

- [17] H. LÜNEBURG, *Die Suzukigruppen und ihre Geometrien*, Lectures Notes in Mathematics 10, Springer (1965).
- [18] T. G. OSTROM, *Semitranslation planes*, Trans. Amer. Math. Soc., **111** (1964), pp. 1-18.
- [19] T. G. OSTROM, *Nets with critical deficiency*, Pacif. J. Math., **14** (1964), pp. 1381-1387.
- [20] T. G. OSTROM, *Derivable nets*, Canad. Math. Bull., **8** (1965), pp. 601-613.
- [21] T. G. OSTROM, *Finite translation planes*, Lectures Notes in Mathematics, Springer (1970).
- [22] O. PROHASKA, *Endliche ableitbare affinen Ebenen*, Geometriae Dedicata, **1** (1972), pp. 6-17.
- [23] B. SEGRE, *Teoria di Galois, fibrazioni proiettive e geometrie non desarguesiane*, Ann. Mat. Pura Appl., **64** (1964); pp. 1-76.
- [24] R. VINCENTI, *Fibrazioni di un $S_{3,q}$ indotte da fibrazioni di un S_{3,q^2} e rappresentazione spaziale dei sottopiani di Baer di un piano proiettivo*, in corso di stampa sugli Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena.
- [25] M. WALKER, *The collineation groups of derived translation planes*, Geometriae Dedicata, **5** (1976), pp. 87-95.
- [26] M. WALKER, *A class of translations planes*, Geometriae Dedicata, **5** (1976), pp. 135-146.

Aggiunto in bozze. Nel suo Diplomarbeit dal titolo « Reguli, Normale Teilquasikörper und Ableitbare Translationsebenen » (Universität Kaiserslautern, 1978) Theo Grundhöfer ha esteso il teorema 2 al caso di un piano di traslazione qualunque.

Manoscritto pervenuto in redazione il 1° dicembre 1978.