

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

ENRICO CALCAGNO

Sulla coomologia intera delle varietà differenziabili

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 61 (1979), p. 259-270

[<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1979__61__259_0>](http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1979__61__259_0)

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1979, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

Sulla coomologia intera delle varietà differenziabili.

ENRICO CALCAGNO (*)

SUMMARY - In this note we define a sheaf of nuclear cochains with coefficients in $\mathbb{Z}$, furthermore we show that there is isomorphism between the cohomology of nuclear cochains and the cohomology of $\mathbb{Z}$ -pairs of differential forms as defined by Allendoerfer and Eells (cfr. [1]).

Introduzione.

Allendoerfer ed Eells associano (cfr. [1]) ad una varietà X di classe C^∞ il complesso delle $\mathbb{Z}$ -coppie di forme differenziali e provano che lo $\mathbb{Z}$ -modulo di coomologia derivato è isomorfo alla coomologia singolare a coefficienti interi di X ; ricorrendo inoltre ad una triangolazione di X danno una rappresentazione esplicita, mediante residuo (cfr. [1], paragrafo 5) di tale isomorfismo.

La tecnica utilizzata può risultare poco agevole volendo estendere tale risultato a spazi più generali delle varietà, di cui non è noto se siano triangolabili, oppure come nel caso delle prestratificazioni di Whitney (cfr. [7]) la cui triangolazione è costruita mediante procedimenti non semplici. In questa nota si introduce il concetto di cocatena con nucleo, intendendo una cocatena definita solo sulle catene in « posizione generale » rispetto a certi sottoinsiemi costituenti il nucleo (cfr. Definizione 2.4).

(*) Indirizzo dell'A.: Istituto di Matematica dell'Università - Via L. B. Alberti 4 - 16132 Genova.

Lavoro eseguito nell'ambito del programma di ricerca del gruppo G.N.S. A.G.A. del comitato per la Matematica del C.N.R.

Associando ad ogni aperto U di X lo $\mathbf{Z}$ -modulo delle cocatene con nucleo, si ottiene un prefascio canonico $\mathcal{C}^*$ che si dimostra essere una risoluzione aciclica del prefascio di fibra costante $\mathbf{Z}$.

Utilizzando la teoria dei fasci si prova che esiste isomorfismo tra la coomologia delle cocatene con nucleo e la coomologia singolare intera, d'altra parte tramite tecniche dimostrative classiche (cfr. [8]) si ottiene un isomorfismo tra la coomologia delle cocatene con nucleo e la coomologia delle $\mathbf{Z}$ -coppie di forme differenziali, esplicitabile tramite il residuo, senza ricorrere a triangolazioni della varietà X .

1. Preliminari.

Richiameremo alcune definizioni e risultati che ci saranno utili nel seguito.

a) Siano X, Y varietà differenziabili di classe C^∞ e per ogni intero $r \geq 0$ sia $C^r(X, Y)$ l'insieme delle applicazioni di classe C^r da X a Y .

La C^r -topologia debole su $C^r(X, Y)$ è la topologia generata nel modo seguente:

se $f \in C^r(X, Y)$ e $(\varphi, U), (\psi, V)$ sono due carte locali su X e Y rispettivamente, $K \subset U$ un sottoinsieme compatto di X tale che $f(K) \subset V$ e ε è un numero reale positivo, indicheremo con

$$\mathcal{N}^r(f, (\varphi, U), (\psi, V), K, \varepsilon)$$

l'insieme degli elementi $g \in C^r(X, Y)$ tali che $g(K) \subset V$ e

$$\|D^s(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(x) - D^s(\psi \circ g \circ \varphi^{-1})(x)\| < \varepsilon$$

per ogni $x \in \varphi(K)$ e ogni $s \leq r$ ($D^s(+)$ è la derivata s -esima di $+$ e $\|\circ\|$ è la norma dell'applicazione lineare $\circ$).

In altre parole g sta in $\mathcal{N}^r(f, (\varphi, U), (\psi, V), K, \varepsilon)$ se le rappresentazioni locali di f e g sono « ε -vicine» su K con tutte le derivate di ordine $\leq r$.

Gli insiemi del tipo $\mathcal{N}^r(f, (\varphi, U), (\psi, V), K, \varepsilon)$ al variare di $f, (\varphi, U), (\psi, V), K, \varepsilon$ danno luogo ad una sottobase per una topologia che sarà quella voluta.

L'insieme $C^r(X, Y)$ dotato della topologia sopra descritta, verrà denotato con $C_{\mathcal{W}}^r(X, Y)$.

La C^∞ -topologia debole su $C^\infty(X, Y)$ è l'unione delle topologie indotte dalle inclusioni naturali $i_r: C^\infty(X, Y) \rightarrow C_{\mathcal{W}}^r(X, Y)$.

Quanto sopra può anche esprimersi mediante il linguaggio dei getti (cfr. [6] per maggiori dettagli).

Sia $A \subset Y$ una sottovarietà e $x \in X$ un punto; diremo che un'applicazione $f \in C^r(X, Y)$ è trasversale ad A in x e scriveremo $f \mathcal{H}_x A$ se $f(x) \notin A$ oppure $f(x) \in A$ e tra gli spazi tangenti vale la relazione:

$$T_{f(x)}(Y) = T_{f(x)}(A) + (df)_x T_x(X).$$

Se $L \subset X$ diremo che f è trasversale ad A su L (in simboli $f \mathcal{H}_L A$) se per ogni $x \in L$ si ha $f \mathcal{H}_x A$ (se $L = X$ scriveremo semplicemente $f \mathcal{H} A$).

Posto

$$\mathcal{H}_L^r(X, Y; A) = \{f \in C^r(X, Y): f \mathcal{H}_L A\} \text{ e } \mathcal{H}^r(X, Y; A) = \mathcal{H}_X^r(X, Y; A)$$

sussiste il

TEOREMA 1.1 (di trasversalità di Thom) (cfr. [5] e [6]). Per ogni $1 \leq r \leq +\infty$ risulta:

i) $\mathcal{H}_L^r(X, Y; A)$ è residuale (e quindi denso) in $C_{\mathcal{W}}^r(X, Y)$ per ogni $L \subset X$.

ii) Se A è sottovarietà chiusa e L è compatto, allora $\mathcal{H}_L^r(X, Y; A)$ è anche aperto in $C_{\mathcal{W}}^r(X, Y)$.

b) Sia X una varietà differenziabile, $A \subset X$ un sottoinsieme localmente chiuso e $x \in A$ un punto, un vettore $v \in T_x(X)$ si dice tangente ad A in x se esiste una sezione ξ del fibrato tangente a X tale che $\xi(x) = v$ e per ogni $x' \in A$ l'orbita di ξ per x' è contenuta in A .

L'insieme dei vettori tangenti ad A in x è uno spazio vettoriale che chiameremo spazio tangente ad A in x e denoteremo $T_x(A)$. Si definisce inoltre dimensione di A il numero $\dim A = \sup_{x \in A} \dim T_x(A)$; se $\dim A = r$ ($0 \leq r \leq \dim X$) allora per ogni $0 \leq s \leq r$ gli insiemi $A^s = \{y \in A: \dim T_y(A) = s\}$ sono sottovarietà immerse di X , nel senso

che in generale la topologia di A^s non è la topologia indotta da X ; se in particolare si suppone che ogni A^s abbia la topologia indotta da X si dirà che A è regolare (cfr. [10]).

Nell'ipotesi di regolarità A può esprimersi nel modo seguente: $A = \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha^r$ con A_α^r sottovarietà connessa di X con la topologia indotta, inoltre per le $\{A_\alpha^r\}$ vale la condizione della frontiera e la condizione (a) di Whitney (cfr. [7] e [10]).

Se $f \in C^\infty(Z, X)$ diremo che f è trasversale ad A (in simboli ancora $f \perp A$) se per ogni $0 \leq s \leq r$ risulta $f \perp A^s$.

Sussistono i seguenti risultati:

LEMMA 1.2 (cfr. Lemma 3.3 di [10]). Sia A sottoinsieme chiuso e regolare di X , K un compatto di Z , $J^1(Z, X)$ lo spazio degli 1-getti delle applicazioni di Z in X e $\pi: J^1(Z, X) \rightarrow Z \times X$ la proiezione canonica.

Allora l'insieme $J_{A,K}^1 = \{a \in J^1(Z, X): \pi(a) = (z, x) \text{ per ogni } z \in K \text{ e } x \notin A \text{ oppure } x \in A \text{ e } (da)_z T_z(Z) + T_x(A) = T_x(X)\}$ è aperto in $J^1(Z, X)$.

DIMOSTRAZIONE. Se $J^1(Z, X) \setminus J_{A,K}^1$ non fosse chiuso, sia z un punto di K , $\{x_n\}$ una successione di punti di A convergenti ad un punto $x \in A$ e $a_n \in J^1(Z, X) \setminus J_{A,K}^1$ tale che $\pi(a_n) = (z, x_n)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, con $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \in J_{A,K}^1$.

Essendo $x \in A$ si ha

$$(da)_z T_z(Z) + T_x(A) = T_x(X),$$

mentre per ogni $n \in \mathbb{N}$:

$$(da)_z T_z(Z) + T_{x_n}(A) \subsetneq T_{x_n}(X).$$

Per l'ipotesi di regolarità di A , se A_α^r è la componente di A che contiene x e se $x_n \in A_{\alpha'}^{r'}$ ($r' \geq r$) per n sufficientemente grande, si avrà

$$\{T_{x_n}(A_{\alpha'}^{r'})\} \rightarrow \tau \subseteq T_x(X) \quad \text{e} \quad T_x(A) = T_x(A_\alpha^r) \subset \tau.$$

Pertanto:

$$(da)_z T_z(Z) + \tau \supset (da)_z T_z(Z) + T_x(A) = T_x(X),$$

contro le ipotesi.

TEOREMA 1.3 (variante del Teorema 1.1). Siano Z, X varietà differenziabili di classe C^∞ , A sottoinsieme localmente chiuso di X e L sottoinsieme di A , allora:

i) $\mathcal{H}_L^\infty(Z, X; A)$ è residuale (e quindi denso) in $C_W^\infty(Z, X)$;

ii) se A è chiuso e regolare ed L è compatto, $\mathcal{H}_L^\infty(Z, X; A)$ è anche aperto in $C_W^\infty(Z, X)$.

DIMOSTRAZIONE. $\mathcal{H}_L^\infty(Z, X; A)$ è residuale (e quindi denso) per il Teorema 1.1 e perchè $C_W^\infty(Z, X)$ è uno spazio di Baire. Se A è chiuso e regolare ed L è compatto $\mathcal{H}_L^\infty(Z, X; A)$ è aperto in virtù del Lemma 1.2.

2. Cocatene con singolarità.

Sia X una varietà differenziabile di classe C^∞ di dimensione n , Δ_r il simplelso euclideo standard in $\mathbb{R}^r$; un simplelso singolare differenziabile $\sigma_r: \Delta_r \rightarrow X$ sarà la restrizione di una applicazione di classe C^∞ $\sigma_r: \mathbb{R}^r \rightarrow X$.

Gli r -simplelssi singolari differenziabili saranno pertanto interpretati nel seguito come elementi dello spazio $C_W^\infty(\mathbb{R}^r, X)$.

Sia $S_r(X, \mathbb{Z})$ lo $\mathbb{Z}$ -modulo delle catene differenziabili su X , consideriamo il sistema diretto $\{A_m, \varrho_m^n\}_{n \geq m \geq 1}$ dove:

$$A_m = S_r(X, \mathbb{Z}) \text{ per } m \geq 1 \text{ e}$$

$$\varrho_m^n: A_m \rightarrow A_n \text{ è l'omomorfismo } sd^{(n-m)} \text{ di suddivisione baricentrica.}$$

Se poniamo $C_r(X, \mathbb{Z}) = \varinjlim_{n \in \mathbb{N}} A_n$, l'applicazione naturale

$$\pi: S_r(X, \mathbb{Z}) \rightarrow C_r(X, \mathbb{Z})$$

induce un isomorfismo tra i rispettivi moduli d'omologia (cfr. [2]).

Introduciamo ora su $C_r(X, \mathbb{Z})$ una topologia legata in modo naturale alla topologia debole su $C^\infty(\mathbb{R}^r, X)$; si consideri allora a tale scopo per ogni elemento c di $C_r(X, \mathbb{Z})$, ogni numero reale positivo ε e ogni famiglia $\psi = \{(\psi_\alpha, V_\alpha)\}_{\alpha \in \mathfrak{A}}$ di carte locali su X tali che $|c| \subset \bigcup_{\alpha \in \mathfrak{A}} V_\alpha$

(indicando con $|\circ|$ il supporto della catena $\circ$), il sottoinsieme

$$U(c, \psi, \varepsilon) = \{c' \in C_r(X, \mathbb{Z}) : \text{esiste una coppia di rappresentanti } s = \sum_{i=1}^p a_i \sigma_i \text{ e } s' = \sum_{i=1}^p a_i \delta_i \text{ di } c \text{ e } c' \text{ rispettivamente, per cui sono verificate per } i = 1, \dots, p \text{ le seguenti condizioni: i) } \sigma_i(\Delta_r) \subset V_{\alpha(i)} \text{ e ii) } \delta_i \in \mathcal{N}^\infty(\sigma_i, (\mathbb{R}^r, id), (\psi_{\alpha(i)}, V_{\alpha(i)}), \Delta_r, \varepsilon)\}.$$

Si verifica che al variare di c, ψ, ε la famiglia $\{U(c, \psi, \varepsilon)\}$ è sotto-base di intorni di una topologia che sarà quella voluta su $C_r(X, \mathbb{Z})$. Allo scopo di definire il concetto di cocatena con singolarità premettiamo le seguenti:

DEFINIZIONE 2.1. Un r -sistema nucleare N è costituito da una coppia di insiemi (e_1, e_2) tali che:

i) e_1 è un sottoinsieme chiuso e ovunque non denso di X contenuto in $\bigcup_{\alpha \in \mathfrak{A}} A_\alpha$, essendo $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \mathfrak{A}}$ una famiglia localmente finita di sottoinsiemi chiusi di dimensione non superiore a $(n - r)$.

ii) e_2 è un sottoinsieme chiuso di e_1 contenuto in $\bigcup_{\beta \in \mathfrak{B}} B_\beta$, essendo $\{B_\beta\}_{\beta \in \mathfrak{B}}$ una famiglia localmente finita di sottoinsiemi chiusi di dimensione non superiore a $(n - r - 1)$.

DEFINIZIONE 2.2. Un r -simplesso singolare σ si dirà in posizione generale rispetto ad un r -sistema nucleare N se:

- i) $\sigma(\Delta_r) \cap e_2 = \emptyset$ e
- ii) $\sigma(\partial\Delta_r) \cap e_1 = \emptyset$.

Si dirà inoltre che una catena $c \in C_r(X, \mathbb{Z})$ è in posizione generale rispetto a N se esiste un rappresentante $s = \sum_{i=1}^p a_i \sigma_i$ con σ_i in posizione generale rispetto a N per ogni i .

PROPOSIZIONE 2.3. Dato un r -sistema nucleare N , l'insieme delle catene di $C_r(X, \mathbb{Z})$ in posizione generale rispetto a N è aperto e denso in $C_r(X, \mathbb{Z})$.

DIMOSTRAZIONE. Nel seguito indicheremo con $\mathcal{A}_N$ tale insieme. $\mathcal{A}_N$ è aperto, infatti: sia $c \in \mathcal{A}_N$ e $s = \sum_{i=1}^p a_i \sigma_i$ un suo rappresentante, allora per ogni i $\sigma_i(\Delta_r) \cap \{B_\beta\}_{\beta \in \mathfrak{B}} = \emptyset$ e $\sigma_i(\partial\Delta_r) \cap \{A_\alpha\}_{\alpha \in \mathfrak{A}} = \emptyset$.

Poichè $\sigma_i(\Delta_r)$ è compatto e $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \mathfrak{A}}$ e $\{B_\beta\}_{\beta \in \mathfrak{B}}$ sono localmente finite esisterà un intorno di $\sigma_i(\Delta_r)$ in X intersecante un numero finito di A_α e di B_β . Se d è una metrica su X esisteranno pertanto un numero reale positivo ε^i e una carta locale $(\psi, V)_i$ su X , tali che per ogni elemento $\tau \in \mathcal{N}^\infty(\sigma_i, (\mathbb{R}^r, id), (\psi, V)_i, \Delta_r, \varepsilon^i)$ risulta:

$$\tau(\Delta_r) \cap \{B_\beta\}_{\beta \in \mathfrak{B}} = \emptyset \quad \text{e} \quad \tau(\partial\Delta_r) \cap \{A_\alpha\}_{\alpha \in \mathfrak{A}} = \emptyset.$$

L'asserto segue immediatamente.

$\mathcal{A}_N$ è denso, infatti: sia $c \notin \mathcal{A}_N$, $s = \sum_{i=1}^p a_i \sigma_i$ un suo rappresentante e $\{(\psi_\gamma, V_\gamma)\}_{\gamma \in \mathcal{A}}$ una famiglia di carte locali tali che: $|s| \subset \bigcup_{\gamma \in \mathcal{A}} V_\gamma$ e $\sigma_i(\Delta_r) \subset V_{\gamma(i)}$ per ogni i . Non è restrittivo supporre che per un indice i_0 esistono un indice α_u e un indice β_v tali che:

$$\sigma_{i_0}(\Delta_r) \cap B_{\beta_v} \neq \emptyset \quad \text{e} \quad \sigma_{i_0}(\partial\Delta_r) \cap A_{\alpha_u} \neq \emptyset;$$

l'intorno $V_{\gamma(i_0)}$ interseca i sottoinsiemi chiusi $A_{\alpha_1}, \dots, A_{\alpha_n}, A_{\alpha_u}$ e $B_{\beta_1}, \dots, B_{\beta_m}, B_{\beta_v}$.

Come conseguenza di una estensione della Proposizione II.4.2 di [5] ai sottoinsiemi localmente chiusi e per il Teorema 1.3 l'insieme

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^{i_0} = & \left(\bigcap_{s=1, \dots, m, v} \{ \tau \in C^\infty(\mathbb{R}^r, X) : \tau(\Delta_r) \cap B_{\beta_s} = \emptyset \} \right) \cap \\ & \cap \left(\bigcap_{l=1, \dots, n, u} \{ \delta \in C^\infty(\mathbb{R}^r, X) : \delta(\partial\Delta_r) \cap A_{\alpha_l} = \emptyset \} \right) \end{aligned}$$

è residuale e quindi denso in $C^\infty_{\mathcal{W}}(\mathbb{R}^r, X)$.

Se d è una metrica su X poniamo:

$$\varepsilon^{i_0} = \min \left\{ \{d(\sigma_{i_0}(\partial\Delta_r), A_{\alpha_j})\}_{j=1, \dots, n}, \{d(\sigma_{i_0}(\Delta_r), B_{\beta_h})\}_{h=1, \dots, m} \right\}$$

e consideriamo l'intorno $U^{i_0} = \mathcal{N}^\infty(\sigma_{i_0}, (\mathbb{R}^r, id), (\psi_{\gamma(i_0)}, V_{\gamma(i_0)}), \Delta_r, \varepsilon^{i_0})$.

Allora per ogni numero reale positivo $\varepsilon < \varepsilon^{i_0}$, essendo $U^{i_0} \cap \mathcal{A}^{i_0}$ denso in U^{i_0} , esiste $\sigma'_{i_0} \in \mathcal{N}^\infty(\sigma_{i_0}, (\mathbb{R}^r, id), (\psi_{\gamma(i_0)}, V_{\gamma(i_0)}), \Delta_r, \varepsilon) \cap \mathcal{A}^{i_0}$ tale che $s' = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}}^p a_i \sigma_i + a_{i_0} \sigma'_{i_0}$ rappresenta un elemento di $\mathcal{A}_N$, provando la tesi.

DEFINIZIONE 2.4. Una r -cocatena nucleare è una coppia $(q, \mathcal{A})$, dove:

i) $\mathcal{A}_N$ è l'insieme delle r -catene in posizione generale rispetto all' r -sistema nucleare N ;

ii) $q: \mathcal{A}_N \rightarrow \mathbb{Z}$ è un'applicazione continua ($\mathbb{Z}$ discreto) che rispetta le strutture additive.

ESEMPIO 2.5. Sia (θ, ω) una $(\mathbb{Z}, r)$ -coppia di forme differenziali sulla varietà X con singolarità $e(\theta)$ e $e(\omega)$ contenute in famiglie localmente finite di sottovarietà chiuse (cfr. [1] e [3]).

Il residuo $\text{Res}[(\theta, \omega); s] = \int_s \theta - \int_{\partial s} \omega$ definito per ogni $s \in \mathcal{S}_r(X, \mathbb{Z})$ ammissibile per (θ, ω) , dà luogo ad una r -cocatena nucleare $q(c) = \text{Res}[(\theta, \omega); s]$ con $N = (e_1, e_2) = (e(\omega), e(\theta))$ e s rappresentante di $c \in \mathcal{A}_N$; la definizione è ben posta e inoltre $q(c)$ è continua, infatti: sia $c \in \mathcal{A}_N$ e $U(c, \psi, \varepsilon)$ un suo intorno con ε opportunamente piccolo, proviamo che $\text{Res}[(\theta, \omega); s] = \text{Res}[(\theta, \omega); s']$ per ogni $c' \in U(c, \psi, \varepsilon) \cap \mathcal{A}_N$, con $s = \sum_{i=1}^p a_i \sigma_i$ e $s' = \sum_{i=1}^p a_i \delta_i$ rappresentanti di c e c' rispettivamente.

Essendo σ_i e δ_i applicazioni di classe C^∞ aventi immagini « vicine » su Δ_r , si può costruire una C^∞ -omotopia tra σ_i e δ_i : immergendo, per il teorema di Whitney (cfr. [6]), X in $\mathbb{R}^{N_0}$, se T è un intorno tubolare di X e λ è la retrazione di T su X , allora $\mu'_t(x) = \lambda[(1-t)\sigma_i(x) + t\delta_i(x)]$ per $t \in [0, 1]$ e $x \in \Delta_r$ è l'omotopia richiesta ammissibile per (θ, ω) (cfr. [3]).

Dalla Proposizione 2D di [1] segue $\text{Res}[(\theta, \omega); \sigma_i] = \text{Res}[(\theta, \omega); \delta_i]$, pertanto $\text{Res}[(\theta, \omega); s] = \text{Res}[(\theta, \omega); s']$ per ogni $c' \in \mathcal{A}_N \cap U(c, \psi, \varepsilon)$.

DEFINIZIONE 2.6. Siano $(q_1, \mathcal{A}_{N_1})$ e $(q_2, \mathcal{A}_{N_2})$ due cocatene di sistema nucleare $N_1 = (e_1, e_2)$ e $N_2 = (e'_1, e'_2)$, definiamo somma $(q_1, \mathcal{A}_{N_1}) + (q_2, \mathcal{A}_{N_2})$ la cocatena $(q, \mathcal{A}_N)$ definita da:

i) $N = (e_1 \cup e'_1, e_2 \cup e'_2)$ e

ii) per ogni $c \in \mathcal{A}_N$ $q(c) = q_1(c) + q_2(c)$.

Si definisce prodotto di un intero n per una r -cocatena nucleare $(q, \mathcal{A}_N)$ la r -cocatena $(nq, \mathcal{A}_N)$.

Si constata immediatamente che l'insieme $C^r(X, \mathbb{Z})$ delle r -cocatene nucleari non ha struttura naturale di $\mathbb{Z}$ -modulo, non essendo definito l'elemento neutro; per dotarlo di tale struttura si introduce la

relazione di equivalenza:

$$(q_1, \mathcal{A}_{N_1}) \sim (q_2, \mathcal{A}_{N_2}) \Leftrightarrow q_1(c) = q_2(c) \quad \text{per ogni } c \in \mathcal{A}_{N_1} \cap \mathcal{A}_{N_2};$$

la proprietà transitiva è conseguenza della continuità di q e del fatto che gli insiemi $\mathcal{A}_N$ sono aperti e densi.

L'insieme $C^r(X, \mathbf{Z})/\sim$ ora dotato di struttura naturale di $\mathbf{Z}$ -modulo lo denoteremo con $\tilde{C}^r(X, \mathbf{Z})$; con $[q]_N$ denoteremo la classe della cocatena nucleare $(q, \mathcal{A}_N)$. Se $(q, \mathcal{A}_N) \in C^r(X, \mathbf{Z})$ ponendo $\delta(q, \mathcal{A}_N) = (\delta q, \mathcal{A}_{N'})$ con $N' = (e_2, \phi)$ e $\delta q(c) = q(\partial c)$ per $c \in \mathcal{A}_{N'}$, otteniamo un elemento di $C^{r+1}(X, \mathbf{Z})$ e quindi per passaggio al quoziente si definisce un operatore che chiameremo cobordo $\delta: \tilde{C}^r(X, \mathbf{Z}) \rightarrow \tilde{C}^{r+1}(X, \mathbf{Z})$ definito da $\delta[q]_N = [\delta q]_{N'}$. Dalla definizione risulta $\delta \circ \delta = 0$. Posto $\tilde{Z}^r(X, \mathbf{Z}) = \ker \langle \delta: \tilde{C}^r(X, \mathbf{Z}) \rightarrow \tilde{C}^{r+1}(X, \mathbf{Z}) \rangle$ e $\tilde{B}^r(X, \mathbf{Z}) = \delta(\tilde{C}^{r-1}(X, \mathbf{Z}))$ denoteremo con $\tilde{H}^r(X, \mathbf{Z})$ il modulo di coomologia derivato

$$\tilde{Z}^r(X, \mathbf{Z})/\tilde{B}^r(X, \mathbf{Z}).$$

3. Il teorema di isomorfismo.

Per ogni coppia di aperti U e V con $V \subset U$ è definita un'applicazione $\varrho_V^U: \tilde{C}^r(U, \mathbf{Z}) \rightarrow \tilde{C}^r(V, \mathbf{Z})$ nel modo seguente: sia $[q]_N \in \tilde{C}^r(U, \mathbf{Z})$ e $(q, \mathcal{A}_N)$ un suo rappresentante, se $N = (e_1, e_2)$ consideriamo la classe $[q']_{N'}$ individuata dall'elemento $(q', \mathcal{A}_{N'})$ dove $N' = (e_1 \cap V, e_2 \cap V)$ e $q'(c) = q(c)$ per ogni $c \in \mathcal{A}_{N'}$, è immediato verificare che la definizione è ben posta e che il sistema $\{\tilde{C}^r(U, \mathbf{Z}), \varrho_V^U\}$ al variare di U e V nella famiglia degli aperti di X definisce un prefascio su X che chiameremo prefascio delle cocatene nucleari e denoteremo con $\tilde{\mathcal{C}}^r$. Tenendo conto della proprietà additiva delle cocatene nucleari, della definizione di $C_r(X, \mathbf{Z})$ come limite diretto mediante «suddivisioni baricentriche», nonché sfruttando la paracompattezza di X e tecniche dimostrative del tutto analoghe a quelle di [4] si perviene direttamente alla seguente:

PROPOSIZIONE 3.1. $\tilde{\mathcal{C}}^r$ è un prefascio canonico per ogni $r \geq 0$.

Il morfismo cobordo $\delta: \tilde{C}^r(\cdot, \mathbf{Z}) \rightarrow \tilde{C}^{r+1}(\cdot, \mathbf{Z})$ induce un morfismo di prefasci canonici $\delta: \tilde{\mathcal{C}}^r \rightarrow \tilde{\mathcal{C}}^{r+1}$, d'altra parte è definito un morfismo $i: \mathbf{Z} \rightarrow \tilde{\mathcal{C}}^0$ indotto dall'applicazione $i: \mathbf{Z} \rightarrow \tilde{C}^0(\cdot, \mathbf{Z})$ definita associando ad ogni interno n la classe di equivalenza di $(q_n, \mathcal{A}_N)$ dove $N = (\phi, \phi)$ e $q_n(\sigma) = n$ per ogni 0-simplesso σ .

Si ha il seguente: *

TEOREMA 3.2. Il complesso di prefasci canonici

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\hat{i}} \tilde{\mathcal{C}}^0 \xrightarrow{\hat{\delta}} \tilde{\mathcal{C}}^1 \xrightarrow{\hat{\delta}} \tilde{\mathcal{C}}^2 \xrightarrow{\hat{\delta}} \dots$$

è una risoluzione aciclica del prefascio di fibra costante $\mathbb{Z}$.

La dimostrazione è conseguenza delle due seguenti proposizioni:

PROPOSIZIONE 3.3. La successione di fasci e omomorfismi

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\hat{i}} \tilde{\mathcal{C}}^0 \xrightarrow{\hat{\delta}} \tilde{\mathcal{C}}^1 \xrightarrow{\hat{\delta}} \tilde{\mathcal{C}}^2 \xrightarrow{\hat{\delta}} \dots$$

è esatta.

DIMOSTRAZIONE. Essendo l'asserto di natura locale sarà sufficiente provare che se U è una palla aperta di $\mathbb{R}^n$ e $[q]_N \in \tilde{Z}^r(U, \mathbb{Z})$ allora esiste $[q_1]_{N_1} \in \tilde{C}^{r-1}(U, \mathbb{Z})$ tale che $\delta[q_1]_{N_1} = [q]_N$.

Siano $[q]_N \in \tilde{C}^r(U, \mathbb{Z})$ ($r > 0$) con rappresentante $(q, \mathcal{A}_N)$ avente sistema nucleare $N = (e_1, e_2)$, x_0 un punto di $U \setminus e_1$ e U_i il più grande aperto di $U \setminus e_i$ soddisfacente la proprietà: « se $x \in U_i$ allora il segmento di vertici x_0 e x è contenuto in U_i » ($i = 1, 2$).

Se $g: U \times [0, 1] \rightarrow U$ è definita da $g(x, t) = (1-t)x_0 + tx$ e $p: U \times [0, 1] \rightarrow U$ è la proiezione canonica si ha $e'_i = U \setminus U_i = p^0 g^{-1}(e_i)$ ($i = 1, 2$); si verifica che $N_1 = (e'_1, e'_2) = (e'_1, e'_2 \cup e_1)$ è un $(r-1)$ -sistema nucleare.

Se σ è un $(r-1)$ -simplexso singolare l' -catena $B^{x_0}\sigma: \Delta_{r-1} \times [0, 1] \rightarrow U$ definita da $B^{x_0}\sigma(x, t) = g(\sigma(x), t)$ è il cono di σ avente vertice x_0 ; si verifica che se σ è in posizione generale rispetto a N_1 allora $B\sigma$ è in posizione generale rispetto a N .

Se c è in posizione generale rispetto a N e $N'_1 = (e'_2, \phi)$, definiamo la $(r-1)$ -cocatena nucleare $(q_1, \mathcal{A}_{N'_1})$ ponendo $q_1(c) = q(B^{x_0}c)$; essendo $c = B^{x_0}\partial c + \partial B^{x_0}c$ (cfr. [9]) si ha: $q(c) = \delta q(B^{x_0}c) + \delta q_1(c)$.

Se $[q]_N \in \tilde{Z}^r(X, \mathbb{Z})$ allora $q(c) = \delta q_1(c)$, provando così l'asserto.

PROPOSIZIONE 3.4. I moduli di coomologia di Čech $\check{H}^p(X, \tilde{\mathcal{C}}^r)$ sono nulli per $p > 0$ e $r \geq 0$.

DIMOSTRAZIONE. Sia $\tilde{f} \in \check{H}^p(X, \tilde{\mathcal{C}}^r)$ e $f \in \check{Z}^p(\mathfrak{U}, \tilde{\mathcal{C}}^r)$ un suo rappresentante relativo ad $\mathfrak{U} = \{U_\gamma\}_{\gamma \in A}$ ricoprimento aperto di X numerabile e localmente finito, per provare il teorema sarà sufficiente provare che per un restringimento $\mathfrak{B}$ di $\mathfrak{U}$ risulta $f|_{\mathfrak{B}} \in \check{B}^p(\mathfrak{B}, \tilde{\mathcal{C}}^r)$.

Si procederà in modo analogo a quello di [4] (cfr. Proposizione 4.3).

Per ogni $(p+1)$ -upla $(i) = (i_0, \dots, i_p)$ si consideri un rappresentante $(q(i), \mathcal{A}_{N(i)})$ di $f(i)|_{\mathfrak{g}}$ con $N(i) = (e_1(i), e_2(i))$.

Per ogni $k \in \mathbb{N}$ sia e_k l'unione dei punti contenuti in V_k di tutti gli $e_1(i)$, poniamo:

$$e = e'_1, e'_2 = e_2 \cap (V_2 \setminus \bar{V}_1), \dots, e'_r = e_r \cap \left(V_r \setminus \bigcup_{j=1}^{r-1} \bar{V}_j \right)$$

e

$$B_1 = \bar{e}_1 \cap (\bar{V}_1 \setminus V_1), B_2 = \bar{e}'_2 \cap Fr(V_2 \setminus \bar{V}_1), \dots, B_r = \bar{e}'_r \cap Fr\left(V_r \setminus \bigcup_{j=1}^{r-1} \bar{V}_j\right).$$

Poniamo inoltre:

$$N_k(i) = (e_1(i) \cup B_k, e_2(i) \cup B_k)$$

e

$$N = (e_1(i) \cup \bigcup_{k \in \mathbb{N}} B_k, e_2(i) \cup \bigcup_{k \in \mathbb{N}} B_k);$$

si verifica che $N_k(i)$ e N sono r -sistemi nucleari. Sia $c \in \mathcal{A}_N$ e $s = \sum_{k \in \mathbb{N}} s_k$ un suo rappresentante con $\emptyset \neq |s_k| \subset V_k$ se $|s_k| \cap V_k \neq \emptyset$ e s_k in posizione generale rispetto a $N_k(i)$. Se per ogni $k \in \mathbb{N}$ è $q_k(i)(c) = q(i)(s_k)$ con sistema nucleare $N_k(i)$, si ottiene $q(i)(c) = \left(\sum_{k \in \mathbb{N}} q_k(i) \right)(c)$.

Costruiamo un omomorfismo $A: C^p(\mathfrak{B}, \tilde{\mathcal{C}}^r) \rightarrow C^{p-1}(\mathfrak{B}, \tilde{\mathcal{C}}^r)$: se $f \in C^p \cdot (\mathfrak{B}, \tilde{\mathcal{C}}^r)$ Af associa ad ogni p -upla $(i_0, \dots, i_{p-1})$ $Af(i_0, \dots, i_{p-1})$, con rappresentante $Aq(i_0, \dots, i_{p-1})(c) = \left(\sum_{k \in \mathbb{N}} q_k(k, i_0, \dots, i_{p-1}) \right)(c)$. Si verifica che $(A\delta q(i) + \delta Aq(i))(c) = q(i)(c)$; se f è un cociclo allora $q(i)(c) = \delta Aq(i)(c)$, provando l'asserto.

Dal Teorema 3.2 segue il seguente:

COROLLARIO 3.5. Se X è una varietà differenziabile, allora si ha un isomorfismo tra la coomologia singolare $H^r(X, \mathbb{Z})$ e $\tilde{H}^r(X, \mathbb{Z})$.

Inoltre dall'Esempio 2.5 se $\tilde{\mathcal{C}}^*$ è la risoluzione di $\mathbb{Z}$ mediante le cocatene nucleari e $\mathfrak{C}^*$ è la risoluzione di $\mathbb{Z}$ mediante le coppie di forme differenziali (cfr. [1]), il residuo dà luogo ad un morfismo tra risoluzioni, precisamente è commutativo il seguente diagramma:

$$\begin{array}{ccc} 0 \rightarrow \mathbb{Z} & \begin{array}{c} \nearrow \varepsilon \\ \searrow ? \end{array} & \begin{array}{c} \mathfrak{C}^* \\ \downarrow \text{Res} \\ \tilde{\mathcal{C}}^* \end{array} \end{array}$$

Pertanto si deduce il seguente:

COROLLARIO 3.6. Se $\mathfrak{S}^r(X, \mathbb{Z})$ è il modulo di coomologia delle $(\mathbb{Z}, r)$ -coppie di forme differenziali su una varietà X , esiste un isomorfismo tra $\mathfrak{S}^r(X, \mathbb{Z})$, e $\tilde{H}^r(X, \mathbb{Z})$ indotto dal residuo.

BIBLIOGRAFIA

- [1] ALLENDOERFER - EELLS Jr., *On the cohomology of smooth manifolds*, Comment. Math. Helv., **32** (1958), pp. 165-179.
- [2] BREDON, *Shaef theory*, Mc Graw-Hill, New York (1967).
- [3] CARRELL, *The cohomology ring of a smooth manifold*, Trans. of the Amer. Math. Soc., **136** (1969), pp. 489-498.
- [4] FERRARI - MONTI BRAGADIN, *Sulla coomologia intera delle prestratificazioni astratte*, Ann. Univ. Ferrara, **21** (1975), pp. 57-68.
- [5] GOLUBITSKY - GUILLEMIN, *Stable mappings and their singularities*, Springer-Verlag, Berlin (1973).
- [6] HIRSCH, *Differential topology*, Springer-Verlag, New York (1976).
- [7] MATHER, *Notes on topological stability*, Harvard (1970).
- [8] SEMINARIO E. E. LEVI, *Coomologia a coefficienti reali di una varietà differenziabile*, (Febbraio 1962).
- [9] SPANIER, *Algebraic topology*, Mc Graw-Hill, New York (1966).
- [10] VERONA, *Propriétés différentielles des ensembles localement fermés*, Rev. Roum. Math. pures et appl., **8** (1970), pp. 1269-1279.

Manoscritto pervenuto in redazione il 1° dicembre 1978.