

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

MARIA ERMINIA MARINA BORGHESANI

**Sulla convergenza di una successione di
operatori non lineari e sulla perturbazione
di disequazioni variazionali**

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 61 (1979), p. 155-175

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1979__61__155_0>

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1979, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Sulla convergenza di una successione di operatori non lineari e sulla perturbazione di disequazioni variazionali.

MARIA ERMINIA MARINA BORGHESANI (*)

SUMMARY - In this paper we discuss relations between some kinds of « convergence » of sequences $\{A_n\}$ of non linear operators from a reflexive Banach space V to its dual space V' . Next we investigate convergence properties of solutions u_n of variational inequalities

$$u_n \in K_n: \langle A_n u_n, u_n - v \rangle \leq \langle T_n, u_n - v \rangle \quad \forall v \in K_n$$

where $\{T_n\} \subset V'$ is such that $T_n \rightarrow T$ in V' and $\{K_n\}$ is a sequence of closed convex subsets of V , K_n contained in the domain of A_n , $K_n \xrightarrow{\mathcal{M}} K \subset V$ ([12]).

Introduzione.

Nel presente lavoro vogliamo confrontare taluni « tipi di convergenza » di operatori. Più precisamente sia V uno spazio di Banach riflessivo e V' il suo duale. Consideriamo una successione $\{A_n\}$ di operatori definiti in $D(A_n) \subset V$ e a valori in V' ; sia $A: D(A) \subset V \rightarrow V'$.

(*) Indirizzo dell'A.: Istituto Matematico dell'Università - Via L. B. Alberti 4 - 16132 Genova.

Lavoro eseguito nell'ambito del Laboratorio per la Matematica Applicata del C.N.R.

Diciamo che la successione $\{A_n\}$ P -converge ad A e poniamo $A = P\text{-}\lim A_n$ se:

$$(0.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} (a) \text{ la successione } A_n \text{ è uniformemente limitata, cioè per ogni } \\ \quad M \in \mathbf{R}_+, \exists N \in \mathbf{R}_+ \text{ tale che } \forall v \in D(A_n), \|v\|_V \leq M, \text{ si ha } \\ \quad \|A_n(v)\|_{V'} \leq N. \\ (b) \text{ Per ogni estratta } \{A_{n_k}\} \text{ della successione } \{A_n\}, \text{ se } \{x_k\} \\ \quad \text{è una successione tale che } x_k \in D(A_{n_k}), x_k \rightharpoonup x \text{ in } V \text{ e} \\ \quad \underline{\lim} \langle A_{n_k}(x_k), x_k - x \rangle \leq 0, \text{ allora } x \in D(A) \text{ e} \\ \quad \underline{\lim} \langle A_{n_k}(x_k), x_k - v \rangle \geq \langle A(x), x - v \rangle, \quad \forall v \in D(A). \end{array} \right.$$

Nel § 1 supponiamo $D(A_n) = D(A) = V$. Dapprima confrontiamo la P -convergenza definita in (0.1) sia con un tipo di convergenza definita in [7], pag. 259, sia con la M -convergenza (vedi la definizione (1.3)).

Supponiamo poi che gli operatori A e $\{A_n\}$ siano lineari e uniformemente coercivi (vedi (1.9)). In tali ipotesi deduciamo la relazione tra la P -convergenza e la $G(w, s)$ convergenza (vedi [1], pag. 356); inoltre dimostriamo che se gli operatori A e $\{A_n\}$ sono simmetrici, allora $A = M\text{-}\lim A_n$ (nel senso della definizione (1.3)) se e solo se $A_n v \rightarrow Av, \forall v \in V$ (convergenza forte della successione $\{A_n\}$).

Nel § 2 diamo un esempio significativo di una successione di operatori non lineari P -convergente ad un operatore A .

Nel § 3 utilizziamo la P -convergenza per esaminare la « convergenza » delle soluzioni di perturbazioni di disequazioni variazionali. Più precisamente consideriamo una successione $\{K_n\}$ di convessi contenuti in V tali che $K_n \xrightarrow{\mathcal{A}} K$ (vedi [12]); data una successione A_n di operatori tali che $A_n: K_n \rightarrow V'$, e dato un operatore $A: K \rightarrow V'$ tale che $A = P\text{-}\lim A_n$, studiamo la « convergenza » delle soluzioni $u_n \in K_n$ delle disequazioni:

$$\langle A_n(u_n), u_n - v \rangle \leq \langle T_n, u_n - v \rangle, \quad \forall v \in K_n,$$

essendo $\{T_n\} \subset V'$ tale che $T_n \rightarrow T$ in V' (vedi Teorema 3.1).

Applichiamo infine i risultati ottenuti per studiare l'esistenza e la regolarità delle soluzioni di talune disequazioni variazionali ellittiche non lineari.

Segnaliamo che la problematica della « convergenza » delle soluzioni di disequazioni variazionali è stata affrontata in [12] nel caso

in cui $\{A_n\}$ sia una successione di operatori monotoni, e in [2], [3] nel caso in cui $\{A_n\}$ sia una successione di operatori simmetrici lineari o quasi lineari (si veda anche la bibliografia ivi citata). Osserviamo anche che in [8] sono dati esempi di operatori P -convergenti ad un operatore A ed è affrontato il problema della « convergenza » delle soluzioni di talune disequazioni variazionali.

Segnaliamo infine che il problema della « convergenza » delle soluzioni di una successione di equazioni variazionali associate a operatori lineari e simmetrici è stato ampiamente affrontato da parecchi autori (vedi [1], [2], [3], [13] e la bibliografia ivi citata).

1. Sia dunque V uno spazio di Banach riflessivo e V' il suo duale. Siano $A_n, A: V \rightarrow V', \forall n \in \mathbb{N}$. Ci è utile il seguente lemma.

LEMMA 1.1. Se $A = P\text{-}\lim A_n$ nel senso della definizione (0.1) si ha:

$$(1.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{per ogni estratta } \{A_{n_k}\} \text{ della successione } \{A_n\}, \text{ se } \{x_k\} \text{ è una} \\ \text{successione tale che } x_k \rightharpoonup x \text{ in } V \text{ e } \overline{\lim} \langle A_{n_k}(x_k), x_k - x \rangle \leq 0, \\ \text{allora } A_{n_k}(x_k) \rightharpoonup A(x) \text{ in } V' \text{ e } \lim \langle A_{n_k}(x_k), x_k \rangle = \langle A(x), x \rangle. \end{array} \right.$$

In particolare $\forall x \in V, A_n(x) \rightharpoonup A(x)$ in V' .

DIMOSTRAZIONE. Sia $A = P\text{-}\lim A_n$ e sia $x_k \rightharpoonup x$ tale che

$$\overline{\lim} \langle A_{n_k}(x_k), x_k - x \rangle \leq 0.$$

Poichè, per ipotesi, la successione $\{A_n\}$ è uniformemente limitata, esiste una estratta della sottosuccessione $\{A_{n_k}(x_k)\}$ (che per semplicità continuiamo ad indicare con $\{A_{n_k}(x_k)\}$) tale che $A_{n_k}(x_k) \rightharpoonup f$ in V' . Allora dalla (0.1) si ha $\forall v \in V$:

$$\begin{aligned} \langle A(x), x - v \rangle &\leq \underline{\lim} \langle A_{n_k}(x_k), x_k - v \rangle \leq \\ &\leq \overline{\lim} \langle A_{n_k}(x_k), x_k - x \rangle + \overline{\lim} \langle A_{n_k}(x_k), x - v \rangle \leq \langle f, x - v \rangle \end{aligned}$$

e quindi

$$A_{n_k}(x_k) \rightharpoonup A(x).$$

Ne segue che $\forall v \in V$:

$$\langle A(x), x - v \rangle \leq \underline{\lim} \langle A_{n_k}(x_k), x_k - v \rangle \leq \overline{\lim} \langle A_{n_k}(x_k), x_k - v \rangle \leq \langle A(x), x - v \rangle$$

e quindi:

$$\lim \langle A_{n_k}(x_k), x_k - v \rangle = \langle A(x), x - v \rangle, \quad \forall v \in V. \quad \blacksquare$$

Il Lemma 1.1 ci permette di confrontare la definizione (0.1) di P -convergenza con la seguente (vedi [7], pag. 259):

$$(1.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} (a) \text{ la successione } \{A_n\} \text{ è uniformemente limitata,} \\ (b) \text{ per ogni estratta } \{A_{n_k}\} \text{ della successione } \{A_n\} \text{ se } \{x_k\} \text{ è} \\ \text{una successione tale che } x_k \rightarrow x \text{ in } V, A_{n_k}(x_k) \rightarrow y \text{ in } V, \\ \text{e } \overline{\lim} \langle A_{n_k}(x_k), x_k \rangle \leq \langle y, x \rangle, \text{ allora } y = A(x) \text{ e } \lim \langle A_{n_k}(x_k), \\ x_k \rangle = \langle A(x), x \rangle. \end{array} \right.$$

Più precisamente si ha

TEOREMA 1.2. $A = P\text{-}\lim A_n$ se e soltanto se la successione $\{A_n\}$ verifica le ipotesi (1.2).

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo che $A = P\text{-}\lim A_n$ e sia $x_k \rightarrow x$ in V , $A_{n_k}(x_k) \rightarrow y$ in V' e $\overline{\lim} \langle A_{n_k}(x_k), x_k \rangle \leq \langle y, x \rangle$. Allora:

$$\overline{\lim} \langle A_{n_k}(x_k), x_k - x \rangle \leq \overline{\lim} \langle A_{n_k}(x_k), x_k \rangle + \overline{\lim} \langle A_{n_k}(x_k), -x \rangle \leq 0$$

e quindi le (1.2) seguono dal Lemma 1.1.

Viceversa supponiamo che siano verificate le (1.2) e sia $x_k \rightarrow x$ in V , tale che $\overline{\lim} \langle A_{n_k}(x_k), x_k - x \rangle \leq 0$. Poichè la successione $\{A_n\}$ è uniformemente limitata, esiste una estratta (che continuiamo ad indicare con $\{A_{n_k}(x_k)\}$) tale che $A_{n_k}(x_k) \rightarrow y$ in V' . Si ha inoltre

$$\overline{\lim} \langle A_{n_k}(x_k), x_k \rangle \leq \overline{\lim} \langle A_{n_k}(x_k), x_k - x \rangle + \overline{\lim} \langle A_{n_k}(x_k), x \rangle \leq \langle y, x \rangle$$

e quindi dalla (1.2) segue

$$\lim \langle A_{n_k}(x_k), x_k - v \rangle = \langle A(x), x - v \rangle, \quad \forall v \in V. \quad \blacksquare$$

È ovvia conseguenza del Teorema 1.2 il seguente

COROLLARIO 1.3. Sia $A = P\text{-}\lim A_n$. Allora $A = M\text{-}\lim A_n$ cioè:

$$(1.3) \quad \left\{ \begin{array}{l} (a) \text{ la successione } \{A_n\} \text{ è uniformemente limitata,} \\ (b) \text{ per ogni estratta } \{A_{n_k}\} \text{ della successione } \{A_n\}, \text{ se } \{x_k\} \text{ è} \\ \text{una successione tale che } x_k \rightharpoonup x \text{ in } V, A_{n_k}(x_k) \rightharpoonup y \text{ in } V' \\ \text{e } \overline{\lim} \langle A_{n_k}(x_k), x_k \rangle \leq \langle y, x \rangle, \text{ allora } y = A(x). \end{array} \right.$$

Osserviamo inoltre che dalla definizione (1.3) segue facilmente il seguente:

COROLLARIO 1.4. Sia $A = M\text{-}\lim A_n$. Allora $\forall v \in V$ si ha $A_n v \rightharpoonup Av$ in V' (convergenza debole della successione $\{A_n\}$). ■

Supponiamo ora che $\{A_n\}$ sia una successione di operatori monotoni cioè $\forall n \in \mathbb{N}$

$$(1.4) \quad \langle A_n(u) - A_n(v), u - v \rangle \geq 0, \quad \forall u, v \in V,$$

e supponiamo che $A: V \rightarrow V'$ sia emicontinuo, cioè

$$(1.5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall u, v, w \in V \text{ la funzione} \\ \lambda \rightarrow \langle A(u + \lambda v), w \rangle \\ \text{è continua da } \mathbb{R} \text{ in } \mathbb{R}. \end{array} \right.$$

Risulta allora:

TEOREMA 1.5. Supponiamo che $\{A_n\}$ e A verifichino le ipotesi (1.4) e (1.5) e supponiamo che la successione $\{A_n\}$ sia uniformemente limitata. Allora se $A_n v \rightarrow Av$, $\forall v \in V$ si ha $A = P\text{-}\lim A_n$ ⁽¹⁾.

DIMOSTRAZIONE. Osserviamo dapprima che se $\{x_k\}$ è una successione tale che $x_k \rightharpoonup x$ in V allora dalle ipotesi (1.4) risulta

$$(1.6) \quad \underline{\lim} \langle A_{n_k}(x_k), x_k - x \rangle \geq \underline{\lim} \langle A_{n_k}(x), x_k - x \rangle = 0.$$

Sia ora $x_k \rightharpoonup x$ in V e tale che $\overline{\lim} \langle A_{n_k}(x_k), x_k - x \rangle \leq 0$. Dalle (1.6) si ha allora:

$$(1.7) \quad \lim \langle A_{n_k}(x_k), x_k - x \rangle = 0.$$

⁽¹⁾ Il teorema (1.4) è una generalizzazione del seguente ben noto teorema: Sia $A: V \rightarrow V'$ un operatore monotono emicontinuo e limitato; allora A è pseudomonotono (vedi Proposizione 2.5 di [9]).

Per ogni $v \in V$, poniamo $w = (1 - \theta)x + \theta v$, $0 < \theta < 1$; risulta allora dalla (1.4)

$$\langle A_{n_k}(x_k), x_k - w \rangle \geq \langle A_{n_k}(w), x_k - w \rangle,$$

e quindi:

$$\begin{aligned} \theta \lim \langle A_{n_k}(x_k), x - v \rangle &\geq \lim \langle A_{n_k}(x_k), x - x_k \rangle + \theta \lim \langle A_{n_k}(w), x - v \rangle \\ &\quad + \lim \langle A_{n_k}(w), x_k - x \rangle. \end{aligned}$$

Tenuti presenti la (1.7) e le ipotesi del Teorema 1.5 risulta che:

$$\theta \lim \langle A_{n_k}(x_k), x - v \rangle \geq \theta \langle A(w), x - v \rangle;$$

e dunque facendo $\theta \rightarrow 0$ si perviene alla dimostrazione del teorema. ■

È noto (vedi [4], § 2, pag. 128) che un operatore $A: V \rightarrow V'$ di tipo M , in generale non è pseudomonotono. Segue allora facilmente che in generale è falso l'inverso del Corollario 1.3. Però osserviamo che risulta:

TEOREMA 1.6. Sia $\{A_n\}$ una successione di operatori monotoni e simmetrici cioè

$$(1.8) \quad \langle A_n(u), v \rangle = \langle A_n(v), u \rangle, \quad \forall u, v \in V (\Rightarrow \text{lineari}).$$

Allora se $A = M\text{-}\lim A_n$, si ha $A = P\text{-}\lim A_n$.

DIMOSTRAZIONE. Sia $\{A_{n_k}\}$ una estratta della successione $\{A_n\}$ e $x_k \rightarrow x$ in V tale che $A_{n_k}(x_k) \rightarrow y$ in V' e $\overline{\lim} \langle A_{n_k}(x_k), x_k \rangle \leq \langle y, x \rangle$.

Allora dal Corollario 1.4 si ha: $A_{n_k}(x) \rightarrow A(x)$ in V' . Tenuto conto anche di (1.8) segue:

$$\begin{aligned} \lim \langle A_{n_k}(x_k), x_k \rangle &\geq \lim \langle A_{n_k}(x_k), x_k - x \rangle + \lim \langle A_{n_k}(x_k), x \rangle \geq \\ &\geq \lim \langle A_{n_k}(x), x_k - x \rangle + \langle A(x), x \rangle \geq \lim \langle A_{n_k}(x_k), x \rangle + \\ &\quad + \lim \langle A_{n_k}(x), -x \rangle + \langle A(x), x \rangle = \langle A(x), x \rangle. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Indichiamo ora con $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}(\lambda_0, A_0, V)$ la classe degli operatori lineari A tali che:

$$(1.9) \quad \lambda_0 \|x\|_V^2 \leq \langle A(x), x \rangle \leq A_0 \|x\|_V^2, \quad \forall x \in V, \quad 0 < \lambda_0 \leq A_0$$

Si ha:

TEOREMA 1.7. Supponiamo che $A, A_n \in \mathcal{L}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ e $A = M\text{-}\lim A_n$. Allora $A = G(w, s) \lim A_n$, cioè (vedi [1], Proposizione 2.3)

$$(1.10) \quad \begin{cases} (a) \ \forall x \in V, \exists x_n \rightarrow x \text{ in } V \text{ tale che } A_n(x_n) \rightarrow A(x) \text{ in } V'; \\ (b) \ \forall \text{ estratta } \{A_{n_k}\} \text{ della successione } \{A_n\}, \text{ se } x_k \rightarrow x \text{ e } \\ A_{n_k}(x_k) \rightarrow y, \text{ allora } y = A(x). \end{cases}$$

DIMOSTRAZIONE. Sia $x \in V$ e poniamo $x_n = A_n^{-1}(A(x))$.

Dalla ipotesi (1.9) segue che la successione $\|x_n\|_V$ è limitata e quindi esiste un'estratta $\{x_{n_k}\}$ tale che $x_{n_k} \rightarrow z \in V$,

$$A_{n_k}(x_{n_k}) = A(x) \rightarrow A(x), \quad \text{e} \quad \lim \langle A_{n_k}(x_{n_k}), x_{n_k} \rangle = \langle A(x), z \rangle.$$

Dalla (1.3) segue allora che $A(z) = A(x)$ cioè $z = x$.

Per dimostrare la (b) di (1.10) basta osservare che se $x_k \rightarrow x$ e $A_{n_k}(x_k) \rightarrow y$, allora $\lim \langle A_{n_k}(x_k), x_k \rangle = \langle y, x \rangle$ e quindi dalla (1.3) segue che $y = A(x)$. ■

Indichiamo infine con $\varepsilon = \varepsilon(\lambda_0, A_0, V)$ la classe degli operatori lineari verificanti (1.9) e (1.8). Risulta:

LEMMA 1.8. Se $A_n \in \varepsilon$, $\forall n \in \mathbb{N}$ allora:

$$A = G(w, s) \lim A_n \text{ se e soltanto se } A_n^{-1}(y) \rightarrow A^{-1}(y), \quad \forall y \in V'$$

(G convergenza).

Inoltre:

$$A_n v \rightarrow A v, \quad \forall v \in V \text{ se e soltanto se } A_n v \rightarrow A v, \quad \forall v \in V$$

e

$$A_n^{-1}(y) \rightarrow A^{-1}(y), \quad \forall y \in V'.$$

DIMOSTRAZIONE. Vedi Proposizione 2.3 di [1] e l'Osservazione 6, pag. 472 di [13]. ■

È ora ovvia conseguenza dei Corollari 1.3 e 1.4, dei Teoremi 1.5 e 1.7 e del Lemma 1.8 il seguente

COROLLARIO 1.9. Se $A_n \in \varepsilon$, $\forall n$, allora $A = M\text{-}\lim A_n$ se e soltanto se

$$A_n v \rightarrow A v, \quad \forall v \in V.$$

2. In questo paragrafo vogliamo dare un esempio di una successione $\{A_n\}$ di operatori non lineari P -convergente ad un operatore A . Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^N$ a frontiera uniformemente lipschitziana che goda della proprietà di cono. Siano A_i^n, B^n, C_i^n, D^n ($i = 1, \dots, N$) successioni di funzioni definite in $\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ e supponiamo che per $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 0$ risulti:

$$(2.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} A_i^n, B^n, C_i^n, D^n \text{ verificano le condizioni di Caratheodory (cioè} \\ \text{sono misurabili in } x \text{ per ogni fissato } (t, \xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \text{ e continue} \\ \text{in } (t, \xi) \text{ per q.o. fissato } x \in \Omega); \end{array} \right.$$

$$(2.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} |A_i^n(x, t, \xi)| \leq a_i |\xi| + a_{N+1}(x) |t| + a_{N+2}(x), \\ |B^n(x, t, \xi)| \leq \sum_{j=1}^N b_j(x) |\xi_j| + b_{N+1}(x) |t| + b_{N+2}(x), \\ |C_i^n(x, t, \xi)| \leq c_i |\xi| + c_{N+1}(x) |t| + c_{N+2}(x), \\ |D^n(x, t, \xi)| \leq \sum_{j=1}^N d_j(x) |\xi_j| + d_{N+1}(x) |t| + d_{N+2}(x), \\ \text{essendo } a_i, c_i \in \mathbb{R}_+, d_j(x), b_j(x) \in \mathbb{R}_+, i, j = 1, \dots, N+2, \\ b_j, a_{N+1} \in L^N(\Omega) \ (j = 1, \dots, N), a_{N+2}, b_{N+2}, c_{N+2}, d_{N+2} \in L^2(\Omega), \\ b_{N+1} \in L^{N/2}(\Omega), c_{N+1} \in L^N(\Omega) + L^\infty(\Omega), d_j \in L^N(\Omega) + L^\infty(\Omega) \\ (j = 1, \dots, N), d_{N+1} \in L^{N/2}(\Omega) + L^\infty(\Omega); \end{array} \right.$$

$$(2.3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^N (A_i^n(x, t, \xi) - A_i^n(x, t, \xi'_i)) (\xi_i - \xi'_i) > 0 \text{ per q.o. } x \in \Omega, \\ \forall t \in \mathbb{R}, \forall \xi, \xi' \in \mathbb{R}^N, \xi \neq \xi'; \end{array} \right.$$

$$(2.4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^N A_i^n(x, t, \xi) \xi_i \geq \nu |\xi|^2, \nu \in \mathbb{R}_+, \text{ per q.o. } x \in \Omega, \\ \forall (t, \xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N. \end{array} \right.$$

Poniamo $\forall u, v, w \in H^1(\Omega)$:

$$(2.5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha_n(u, w, v) = \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} A_i^n(\cdot, u, \nabla w) v_{x_i} dx, \\ \beta_n(u, v) = \int_{\Omega} B^n(\cdot, u, \nabla u) v dx, \\ \gamma_n(u, v) = \int_{\Omega} \left(\sum_{i=1}^N C_i^n(\cdot, u, \nabla u) v_{x_i} + D^n(\cdot, u, \nabla u) v \right) dx \end{array} \right.$$

e supponiamo che $\forall u, v \in H^1(\Omega)$ si abbia:

$$(2.6) \quad \gamma_n(u, u-v) - \gamma_n(v, u-v) \geq 0.$$

Sia V un sottospazio chiuso di $H^1(\Omega)$ tale che $H_0^1(\Omega) \subset V \subset H^1(\Omega)$ e sia $L_n: V \rightarrow V'$ l'operatore così definito: se $u \in V$

$$(2.7) \quad \langle L_n u, v \rangle = \alpha_n(u, u, v) + \beta_n(u, v) + \gamma_n(u, v), \quad \forall v \in V.$$

Allora (vedi [11]) si ha che, $\forall n \geq 0$, l'operatore L_n è pseudomonotono. Supponiamo inoltre che per ogni $(t, \xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ si abbia:

$$(2.8) \quad \left\{ \begin{array}{l} A_i^n(x, t, \xi) \rightarrow A_i^0(x, t, \xi), \\ B^n(x, t, \xi) \rightarrow B^0(x, t, \xi), \\ C_i^n(x, t, \xi) \rightarrow C_i^0(x, t, \xi), \\ D^n(x, t, \xi) \rightarrow D^0(x, t, \xi), \\ \forall x \notin I, \text{ mis } I = 0, \end{array} \right.$$

e

$$(2.9) \quad \left\{ \begin{array}{l} A_i^n, B^n, C_i^n, D^n, \quad n \geq 1, \text{ siano equicontinue in } (t, \xi) \text{ per q.o.} \\ x \in \Omega. \end{array} \right.$$

TEOREMA 2.1. Nelle ipotesi fatte risulta $L_0 = P\text{-}\lim L_n$. Inoltre se risulta $\forall n \geq 1$

$$(2.10) \quad \gamma_n(u, u-v) - \gamma_n(v, u-v) \geq \alpha \|u-v\|_{L^2(\Omega)}^2, \quad \forall u, v \in V, \quad \alpha \in \mathbb{R}_+,$$

allora

$$(2.11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{per ogni estratta } \{n_k\} \text{ degli interi positivi, se } \{u_k\} \text{ è una} \\ \text{successione tale che } u_k \rightharpoonup u \text{ in } V \text{ e } \lim \langle L_{n_k}(u_k), u_k - u \rangle \leq 0, \\ \text{si ha } u_k \rightarrow u \text{ in } V. \end{array} \right.$$

La dimostrazione del Teorema 2.1 è conseguenza dei seguenti lemmi.

LEMMA 2.2. Sia $\{n_k\}$ una estratta degli interi positivi, e $\{u_k\}$ una successione tale che $u_k \rightharpoonup u$ in V . Allora:

$$(2.12) \quad \lim \beta_{n_k}(u_k, u_k - u) = 0,$$

$$(2.13) \quad \lim \alpha_{n_k}(u_k, u, u_k - u) = 0,$$

$$(2.14) \quad \lim \gamma_{n_k}(u, u_k - u) = 0.$$

DIMOSTRAZIONE. Possiamo utilizzare in parte un ragionamento svolto in [11]. Più precisamente la (2.12) si dimostra (salvo ovvie modifiche) come la (1.4) di [11]. Al fine di provare la (2.13) osserviamo dapprima che dalle (2.5) risulta:

$$(2.15) \quad |\alpha_{n_k}(u_k, u, u_k - u)| \leq \left| \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} (A_i^{n_k}(\cdot, u_k, \nabla u) - A_i^{n_k}(\cdot, u, \nabla u))(u_k - u)_{x_i} dx \right| + \\ + \left| \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} (A_i^{n_k}(\cdot, u, \nabla u) - A_i^0(\cdot, u, \nabla u))(u_k - u)_{x_i} dx \right| + \\ + \left| \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} A_i^0(\cdot, u, \nabla u)(u_k - u)_{x_i} dx \right|.$$

Poichè se $u_k \rightharpoonup u$ in $H^1(\Omega)$ allora esiste un'estratta ⁽²⁾: $u_k(x) \rightarrow u(x)$ q.o. in Ω , tenuta presente l'ipotesi (2.9) risulta:

$$(2.16) \quad \lim \{A_i^{n_k}(x, u_k(x), \nabla u(x)) - A_i^{n_k}(x, u(x), \nabla u(x))\} = 0 \text{ q.o. in } \Omega;$$

⁽²⁾ Che seguitiamo ad indicare con $\{u_k\}$.

dalla (2.16) segue allora facilmente (vedi Lemma (1.3) di [11]) che

$$(2.17) \quad \|A_i^{n_k}(\cdot, u_k, \nabla u) - A_i^{n_k}(\cdot, u, \nabla u)\|_{L^1(\Omega)} \rightarrow 0.$$

Osserviamo ora che dalle (2.8), dal teorema di convergenza dominata di Lebesgue e dal fatto che $u_k \rightharpoonup u$ segue:

$$(2.18) \quad \begin{cases} \|A_i^{n_k}(\cdot, u, \nabla u) - A_i^0(\cdot, u, \nabla u)\|_{L^1(\Omega)} \rightarrow 0, \\ \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} A_i^0(\cdot, u, \nabla u)(u_k - u) dx \rightarrow 0; \end{cases}$$

si perviene alla dimostrazione di (2.13) passando al limite in (2.15) e tenendo presente le (2.17) e (2.18).

Per dimostrare la (2.14) basta osservare che:

$$\begin{aligned} \gamma_{n_k}(u, u_k - u) &= \int_{\Omega} \left(\sum_{i=1}^N (C_i^{n_k}(\cdot, u, \nabla u) - C_i^0(\cdot, u, \nabla u))(u_k - u)_{x_i} \right) dx + \\ &+ \int_{\Omega} \left(\sum_{i=1}^N C_i^0(\cdot, u, \nabla u)(u_k - u)_{x_i} \right) dx + \\ &+ \int_{\Omega} (D^{n_k}(\cdot, u, \nabla u) - D^0(\cdot, u, \nabla u))(u_k - u) dx + \int_{\Omega} D^0(\cdot, u, \nabla u)(u_k - u) dx, \end{aligned}$$

e quindi, se $u_k \rightharpoonup u$, dalla (2.8) segue facilmente:

$$\lim \gamma_{n_k}(u, u_k - u) = 0. \quad \blacksquare$$

LEMMA 2.3. Sia $\{n_k\}$ una estratta degli interi positivi e sia $\{u_k\}$ una successione tale che $u_k \rightharpoonup u$ in $H^1(\Omega)$, e

$$(2.19) \quad \lim \{\alpha_{n_k}(u_k, u_k, u_k - u) - \alpha_{n_k}(u_k, u, u_k - u)\} = 0.$$

Allora

a) esiste una estratta $\{u_{k_n}\}$ tale che $u_{k_n}(x) \rightarrow u(x)$ q.o. in Ω e $\nabla u_{k_n}(x) \rightarrow \nabla u(x)$ q.o. in Ω ,

b) la successione $\left\{ \sum_{i=1}^N (u_k)_{x_i}^2 \right\}$ è equiassolutamente integrabile ⁽³⁾.

DIMOSTRAZIONE. Il Lemma 2.2 (a) si dimostra (salvo ovvie modifiche) come il Lemma 1.4 di [11].

Al fine di dimostrare la (b), osserviamo che dalle (2.3), (2.4) si ha per ogni sottoinsieme misurabile E di Ω :

$$\begin{aligned}
 (2.20) \quad & \nu \int_E \sum_{i=1}^N (u_k)_{x_i}^2 dx \leq \int_E \sum_{i=1}^N A_i^{n_k}(\cdot, u_k, \nabla u_k)(u_k)_{x_i} dx = \\
 & = \int_E \sum_{i=1}^N (A_i^{n_k}(\cdot, u_k, \nabla u_k) - A_i^{n_k}(\cdot, u_k, \nabla u)(u_k - u)_{x_i}) dx + \\
 & + \int_E \sum_{i=1}^N A_i^{n_k}(\cdot, u_k, \nabla u)(u_k - u)_{x_i} dx + \\
 & + \int_E \sum_{i=1}^N A_i^{n_k}(\cdot, u_k, \nabla u_k) u_{x_i} dx \leq \alpha_{n_k}(u_k, u_k, u_k - u) - \alpha_{n_k}(u_k, u, u_k - u) + \\
 & + \int_\Omega \sum_{i=1}^N |A_i^{n_k}(\cdot, u_k, \nabla u) - A_i^0(\cdot, u, \nabla u)| |(u_k - u)_{x_i}| dx + \\
 & + \int_E \sum_{i=1}^N (A_i^0(\cdot, u, \nabla u)(u_k - u)_{x_i} + A_i^{n_k}(\cdot, u_k, \nabla u_k) u_{x_i}) dx.
 \end{aligned}$$

Tenuto conto delle ipotesi (2.2) e (2.19), delle (2.17) e (2.18), dalla (2.20) si perviene alla dimostrazione del Lemma. ■

Siamo ora in grado di dimostrare il Teorema 2.1.

⁽³⁾ Una successione $\{f_n\}$, $f_n \in L^1(\Omega)$ si dice equiassolutamente integrabile se $\forall \varepsilon > 0$ esistono δ_ε e $A_\varepsilon \subset \Omega$ con $\text{mis } A_\varepsilon < \infty$ tale che per ogni $E \subset \Omega$, $\text{mis } E < \delta_\varepsilon$ si abbia $\int_E |f_n| dx < \varepsilon$, $\int_{\Omega \setminus A_\varepsilon} |f_n| dx < \varepsilon$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA 2.1. Osserviamo innanzitutto che la (0.1) (a) segue immediatamente dalle ipotesi (2.2). Al fine di dimostrare la (0.1) (b) osserviamo dapprima che se $\{n_k\}$ è una estratta degli interi positivi, se $u_k \rightharpoonup u$ e $\overline{\lim} \langle L_{n_k}(u_k), u_k - u \rangle \leq 0$ risulta (tenuto conto di (2.3), (2.6) e del Lemma 2.2) che:

$$\begin{aligned} 0 &\geq \overline{\lim} \langle L_{n_k}(u_k), u_k - u \rangle - \lim \beta_{n_k}(u_k, u_k - u) \geq \\ &\geq \overline{\lim} (\alpha_{n_k}(u_k, u_k, u_k - u) + \gamma_{n_k}(u_k, u_k - u)) \geq \\ &\geq \underline{\lim} (\alpha_{n_k}(u_k, u, u_k - u) + \gamma_{n_k}(u, u_k - u)) = 0; \end{aligned}$$

e quindi:

$$(2.21) \quad \lim [\alpha_{n_k}(u_k, u_k, u_k - u) + \gamma_{n_k}(u_k, u_k - u)] = 0$$

e quindi $\lim \langle L_{n_k}(u_k), u_k - u \rangle = 0$.

Inoltre, si ha dalle (2.3) e (2.6), (2.13), (2.14), (2.19):

$$\begin{aligned} 0 &= \lim \alpha_{n_k}(u_k, u, u_k - u) \leq \underline{\lim} \alpha_{n_k}(u_k, u_k, u_k - u) \leq \\ &\leq \overline{\lim} (\alpha_{n_k}(u_k, u_k, u_k - u) + \gamma_{n_k}(u_k, u_k - u) - \gamma_{n_k}(u, u_k - u)) = 0 : \end{aligned}$$

otteniamo quindi che

$$(2.22) \quad \lim \alpha_{n_k}(u_k, u_k, u_k - u) = 0.$$

Tenuto presente le ipotesi (2.2) e (2.9) e il Lemma 2.3, si deduce facilmente (vedi [11], Teorema 1.5) che $\langle L_{n_k}(u_k), \varphi \rangle \rightarrow \langle L_0(u), \varphi \rangle$, $\forall \varphi \in V$, e quindi $L_0 = P\text{-}\lim L_n$.

Supponiamo infine che sussista la (2.10); si ha dalle (2.14), (2.21) e (2.22)

$$\underline{\lim} \alpha \|u_k - u\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \underline{\lim} (\gamma_{n_k}(u_k, u_k - u) - \gamma_{n_k}(u, u_k - u)) = 0$$

e quindi $u_k \rightarrow u$ in $L^2(\Omega)$. Inoltre, poichè dal Lemma 2.3 segue che $\nabla u_k \rightarrow \nabla u$ in $L^2(\Omega)$, si ha $u_k \rightarrow u$ in $H^1(\Omega)$.

3. Disequazioni variazionali.

Sia data una successione $\{K_n\}$ di convessi chiusi contenuti in V ; sia $\{A_n\}$ una successione di operatori, $A_n: K_n \rightarrow V'$. Vogliamo stu-

diare la « convergenza » delle soluzioni $u_n \in K_n$ delle disequazioni:

$$(3.1) \quad \langle A_n(u_n), u_n - v \rangle \leq \langle T_n, u_n - v \rangle, \quad \forall v \in K_n,$$

essendo $\{T_n\}$ una successione tale che $\{T_n\} \subset V'$.

A tale scopo richiamiamo la seguente definizione (vedi [12]). $K_n \xrightarrow{\mathcal{M}} K$ se e solo se $K \subset s\text{-}\liminf K_n$, $w\text{-}\limsup K_n \subset K$, essendo

$$(3.2) \quad \begin{cases} s\text{-}\liminf K_n = \{v \in V: \exists v_n \in K_n, v_n \rightarrow v \text{ in } V\}, \\ w\text{-}\limsup K_n = \{v \in V: \exists v_k \in K_{n_k}, v_k \rightarrow v \text{ in } V, \\ \text{ove } \{K_{n_k}\} \text{ è una estratta di } \{K_n\}\}. \end{cases}$$

Sia $A: K \rightarrow V'$. Risulta

TEOREMA 3.1. Supponiamo che $A = P\text{-}\lim A_n$ nel senso della definizione (0.1); sia $\{T_n\} \subset V'$ tale che $T_n \rightarrow T \in V'$, $K_n \xrightarrow{\mathcal{M}} K$. Se $\forall n \in \mathbb{N}$ la disequazione (3.1) ha una soluzione $u_n \in K_n$ e se esiste $M \in \mathbb{R}_+$ tale che

$$(3.3) \quad \|u_n\|_V \leq M$$

allora da ogni successione $\{u_n\}$ è possibile estrarre una sottosuccessione $\{u_{n_k}\}$ tale che $u_{n_k} \rightarrow u \in K$, $\lim \langle A_{n_k}(u_{n_k}), u_{n_k} - u \rangle \leq 0$; inoltre si ha:

$$(3.4) \quad \langle A(u), u - v \rangle \leq \langle T, u - v \rangle, \quad \forall v \in K.$$

DIMOSTRAZIONE (vedi anche [7], Teorema 4.2). Osserviamo che dalla (3.3) segue che esiste una estratta $\{u_{n_k}\}$ della successione $\{u_n\}$ tale che $u_{n_k} \rightarrow u \in K$. Inoltre poichè $K_n \xrightarrow{\mathcal{M}} K$, esiste $\{v_n\} \subset V$, $v_n \in K_n$, $v_n \rightarrow u$ in V . Ne segue:

$$(3.5) \quad \begin{aligned} \overline{\lim} \langle A_{n_k}(u_{n_k}), u_{n_k} - u \rangle &\leq \overline{\lim} \langle A_{n_k}(u_{n_k}), u_{n_k} - v_{n_k} \rangle + \\ &+ \overline{\lim} \langle A_{n_k}(u_{n_k}), v_{n_k} - u \rangle \leq \overline{\lim} \langle T_{n_k}, u_{n_k} - v_{n_k} \rangle + \\ &+ \overline{\lim} \langle A_{n_k}(u_{n_k}), v_{n_k} - u \rangle = 0. \end{aligned}$$

Sia $v \in K$ e $K_n \ni v_n \rightarrow v$. Poichè $A = P\text{-}\lim A_n$, dalla (3.1) e (3.5) si ha:

$$\begin{aligned} \langle T, u - v \rangle &= \lim \langle T_{n_k}, u_{n_k} - v_{n_k} \rangle \geq \underline{\lim} \langle A_{n_k}(u_{n_k}), u_{n_k} - v_{n_k} \rangle \geq \\ &\geq \underline{\lim} \langle A_{n_k}(u_{n_k}), u_{n_k} - v \rangle + \underline{\lim} \langle A_{n_k}(u_{n_k}), v - v_{n_k} \rangle \geq \langle A(u), u - v \rangle. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

OSSERVAZIONE 3.2. Sia $\{T_n\} \subset V'$ una successione tale che $T_n \rightarrow T \in V'$; sia $\{K_n\}$ una successione di convessi chiusi contenuti in V tali che $K_n \xrightarrow{\mathcal{M}} V$. Se $\{A_n\}$ è una successione di operatori definiti in V tali che $A = M\text{-}\lim A_n$, essendo $A: V \rightarrow V'$, e se $\forall n \in \mathbb{N}$ esiste $u_n \in K_n$ tale che

$$\langle A_n(u_n), v \rangle = \langle T_n, v \rangle, \quad \forall v \in V,$$

allora, ragionando come nel Teorema 3.1, si dimostra che, se è verificata l'ipotesi (3.3), esiste $u \in V$ tale che:

$$\langle A(u), v \rangle = \langle T, v \rangle, \quad \forall v \in V.$$

OSSERVAZIONE 3.3. Siano $A, A_n: V \rightarrow V'$ tali che

$$A, A_n \in \mathcal{L}(\lambda_0, A_0, V), \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

(vedi (1.9)). Allora è noto (vedi [14]) che $\forall n \in \mathbb{N}$ esiste una funzione $u_n \in K_n$ verificante la (3.1); inoltre sussiste la (3.3). Se supponiamo che $A_n v \rightarrow A v$, $\forall v \in V$, allora dai Teoremi 1.5 e 3.1 segue che esiste una funzione $u \in K$ soluzione di (3.4). Inoltre dalla (3.5) e dalla (1.9) segue facilmente che $u_n \rightarrow u$ in V . (Segnaliamo che nel caso in cui $A, A_n \in \varepsilon(\lambda_0, A_0, V)$ — vedi (1.8), (1.9) — ritroviamo i risultati di [2]).

OSSERVAZIONE 3.4. Siano $L_0, \{L_n\}: V \rightarrow V'$ definiti come in (2.7) e consideriamo una successione K_n di convessi chiusi tali che $K_n \xrightarrow{\mathcal{M}} K$. Il ragionamento fatto in [11], Teorema 2.3, permette di dimostrare che sotto opportune ipotesi sulle successioni $\{K_n\}$, $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$, $\{\gamma_n\}$ (vedi le definizioni (2.5)), $\forall n \in \mathbb{N}$ esiste una funzione $u_n \in K_n$ soluzione della seguente disequazione (non coerciva):

$$\langle L_n(u_n), u_n - v \rangle \leq \langle T_n, u_n - v \rangle, \quad \forall v \in K_n$$

essendo $\{T_n\} \subset V'$. Inoltre se $T_n \rightarrow T_0$ in V' , sempre nelle ipotesi del Teorema 2.3 di [11], esiste $C \in \mathbb{R}_+$ tale che $\|u_n\|_V \leq C$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Allora dai Teoremi 2.1 e 3.1 possiamo dedurre che esiste $u \in K$ soluzione della seguente disequazione (non coerciva)

$$\langle L_0(u), u - v \rangle \leq \langle T_0, u - v \rangle, \quad \forall v \in K.$$

Inoltre segue facilmente (vedi la dimostrazione del Teorema 2.1) che se vale l'ipotesi (2.10), esiste una estratta $\{u_{n_k}\}$ della successione $\{u_n\}$ tale che $u_{n_k} \rightarrow u$ in V . ■

Vogliamo ora applicare il Teorema 3.1 per studiare la « regolarità » delle soluzioni di talune disequazioni variazionali. In quanto segue useremo dei procedimenti in parte simili a quelli già usati in [6], [10] e [14].

Sia ora Ω un sottoinsieme aperto limitato di $\mathbb{R}^N$ con frontiera $\partial\Omega$ regolare e siano $A_i: \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ ($i = 1, \dots, N$) funzioni soddisfacenti alle condizioni di Caratheodory (vedi (2.1)) e tali che:

$$(3.6) \quad \left\{ \begin{array}{l} a) \text{ esiste } q: 1 < q < \infty, \ c_0 \in \mathbb{R}_+ \text{ e una funzione } R_0 \in L^q(\Omega) \\ \quad (q' = q(q-1)) \text{ tale che} \\ \quad |A_i(x, t, \xi)| \leq R_0(x) + c_0(|t|^{q-1} + |\xi|^{q-1}), \quad i = 1, \dots, N \\ \quad \text{per q.o. } x \in \Omega, \ \forall (t, \xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N, \\ b) \sum_{i=1}^N (A_i(x, t, \xi) - A_i(x, t, \xi'))(\xi_i - \xi'_i) > 0, \text{ per q.o. } x \in \Omega, \\ \quad \forall t \in \mathbb{R}, \ \forall \xi, \xi' \in \mathbb{R}^N, \ \xi \neq \xi', \\ c) \sum_{i=1}^N A_i(x, t, \xi) \xi_i \geq \nu |\xi|^q, \\ \quad \nu \in \mathbb{R}_+, \text{ per q.o. } x \in \Omega, \ \forall (t, \xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N. \end{array} \right.$$

Siano $\phi, \psi \in H^{1,q}(\Omega)$, t.c. $\phi \leq \psi$ in Ω , $\phi \leq 0 \leq \psi$ su $\partial\Omega$ nel senso di $H^{1,q}(\Omega)$ (vedi [14]).

Sia $p: \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione soddisfacente alle condizioni di Caratheodory, tale che

$$(3.7) \quad \left\{ \begin{array}{l} |p(x, t, \xi)| \leq R_1(x) + c_1 |\xi|^{q-1} \quad \text{per q.o. } x \in \Omega, \\ \forall t: \phi(x) \leq t \leq \psi(x), \text{ essendo } R_1 \in L^q(\Omega) \text{ e } c_1 \in \mathbb{R}_+. \end{array} \right.$$

Per ogni $u, v \in H^{1,q}(\Omega)$ indichiamo con

$$(3.8) \quad a(u, v) = \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} A_i(\cdot, u, \nabla u) v_{x_i} dx$$

e indichiamo con

$$(3.9) \quad (Pv)(x) = p(x, v(x), \nabla v(x)), \quad x \in \Omega.$$

Supponiamo che esistano $f, g \in L^q(\Omega)$ tali che

$$(3.10) \quad \begin{cases} a(\phi, v) + \int_{\Omega} (P\phi) v \, dx \leq \int_{\Omega} f v \, dx, & \forall v \in H_0^{1,q}(\Omega), \, v \geq 0, \\ a(\psi, v) + \int_{\Omega} (P\psi) v \, dx \geq \int_{\Omega} g v \, dx, & \forall v \in H_0^{1,q}(\Omega), \, v \geq 0. \end{cases}$$

Nelle ipotesi sopradette vogliamo dimostrare che esiste una soluzione $u \in K$ « regolare » della seguente disequazione

$$\begin{cases} a(u, u - v) + \int_{\Omega} (Pu)(u - v) \, dx \leq \langle T, u - v \rangle, & \forall v \in K \\ \text{essendo} \\ K = \{v \in H_0^{1,q}(\Omega) : \phi \leq v \leq \psi\}, & T \in L^q(\Omega). \end{cases}$$

A tale scopo poniamo $\forall i = 1, \dots, N$

$$\tilde{A}_i(x, t, \xi) = \begin{cases} A_i(x, \phi(x), \xi) & t < \phi(x), \\ A_i(x, t, \xi) & \phi(x) \leq t \leq \psi(x), \\ A_i(x, \psi(x), \xi) & \psi(x) < t. \end{cases}$$

Allora è noto che le funzioni $\tilde{A}_i$ soddisfano le ipotesi (3.6). Indichiamo $\forall u, v \in H^{1,q}(\Omega)$

$$\tilde{a}(u, v) = \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \tilde{A}_i(\cdot, u, \nabla u) v_{x_i} \, dx.$$

Sia $\mathcal{G}: H^{1,q}(\Omega) \rightarrow H^{1,q}(\Omega)$ così definito:

$$\forall u \in H^{1,q}(\Omega): (\mathcal{G}u)(x) = \begin{cases} \phi(x) & u(x) < \phi(x), \\ u(x) & \phi(x) \leq u(x) \leq \psi(x), \\ \psi(x) & \psi(x) < u(x), \end{cases}$$

per q.o. $x \in \Omega$.

È noto che $\mathcal{G}: H^{1,q}(\Omega) \rightarrow H^{1,q}(\Omega)$ risulta limitata e continua

(vedi [6]). Indichiamo poi con $\gamma: \Omega \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ la funzione così definita:

$$\gamma(x, t) = \begin{cases} -(-t + \phi(x))^{q-1} & t < \phi(x), \\ 0 & \phi(x) \leq t \leq \psi(x), \\ (t - \psi(x))^{q-1} & \psi(x) < t. \end{cases}$$

Dalle posizioni precedenti segue (vedi [6]) che esiste $\beta > 0$ tale che la seguente forma

$$b(u, v) = \tilde{a}(u, v) + \int_{\Omega} (P(\mathcal{C}u))v \, dx + \beta \int_{\Omega} \gamma(\cdot, u)v \, dx$$

è definita su $H^{1,q}(\Omega) \times H^{1,q}(\Omega)$ ed è coerciva cioè

$$(3.11) \quad \frac{b(v, v)}{\|v\|_{H^{1,q}(\Omega)}} \xrightarrow{\|v\|_{H^{1,q}(\Omega)} \rightarrow +\infty} +\infty.$$

Per $\forall n \in \mathbf{N}$ siano $\theta_{1,n}, \theta_{2,n}: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ le funzioni così definite

$$\theta_{1,n}(t) = \begin{cases} 1 & t \leq -1/n, \\ -nt & -1/n < t \leq 0, \\ 0 & t > 0, \end{cases}$$

e

$$\theta_{2,n}(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0, \\ nt & 0 < t \leq 1/n, \\ 1 & t > 1/n. \end{cases}$$

Per $\forall n$, poniamo $\forall u, v \in H^{1,q}(\Omega)$

$$c_n(u, v) = - \int_{\Omega} (\text{Max}(f - T, 0) \theta_{1,n}(u - \phi) + \min(g - T, 0) \theta_{2,n}(u - \psi)) v \, dx$$

e siano $C_n, A_n: H_0^{1,q}(\Omega) \rightarrow H^{-1,q}(\Omega)$ gli operatori così definiti: se $u \in H_0^{1,q}(\Omega)$

$$\langle C_n(u), v \rangle = c_n(u, v), \quad \forall v \in H_0^{1,q}(\Omega),$$

$$\langle A_n(u), v \rangle = b(u, v) + c_n(u, v), \quad \forall v \in H_0^{1,q}(\Omega).$$

Sia $A: K \rightarrow H^{-1,q}(\Omega)$ l'operatore così definito: $\forall u \in K$

$$\langle A(u), v \rangle = a(u, v) + \int_{\Omega} (Pu)v \, dx, \quad \forall v \in H_0^{1,q}(\Omega).$$

Posto $K_n = \{u \in H_0^{1,q}(\Omega): \phi - 1/n \leq u \leq \psi + 1/n\}$ è chiaro che $K_n \xrightarrow{\mathcal{M}} K$. Inoltre considerati $A_n: K_n \rightarrow H^{-1,q}(\Omega)$, si ha:

TEOREMA 3.5. Nelle ipotesi fatte risulta $A = P\text{-}\lim A_n$ nel senso della definizione (0.1). Inoltre, per ogni estratta $\{n_k\}$ degli interi positivi, se $\{u_k \in K_{n_k}\}$ è una successione tale che $u_k \rightarrow u \in K$ e $\overline{\lim} \langle A_{n_k}(u_k), u_k - u \rangle \leq 0$, allora $u_k \rightarrow u$.

DIMOSTRAZIONE. La (a) di (0.1) è di ovvia verifica. Sia $\{A_{n_k}\}$ una estratta della successione $\{A_n\}$ e sia $\{u_k \in K_{n_k}\}$, $u_k \rightarrow u$; dalla definizione di $\{K_n\}$ si ha $u \in K$. Sia inoltre $\overline{\lim} \langle A_{n_k}(u_k), u_k - u \rangle \leq 0$; poichè $u_k \rightarrow u$ in $L^q(\Omega)$, si ha

$$\begin{aligned} \lim \langle C_{n_k}(u_k), u_k - u \rangle &= 0, \\ \lim \left(\int_{\Omega} (P(\nabla u_k))(u_k - u) \, dx + \beta \int_{\Omega} \gamma(\cdot, u_k)(u_k - u) \, dx \right) &= 0, \end{aligned}$$

e quindi $\overline{\lim} \tilde{a}(u_k, u_k - u) \leq 0$. Ne segue (vedi [5], pag. 28) che $u_k \rightarrow u$ in $H^{1,q}(\Omega)$ e (vedi [6]) $\lim b(u_k, u_k - v) = b(u, u - v)$, $\forall v \in H_0^{1,q}(\Omega)$.

Se si osserva inoltre che $\{C^n\}$ è una successione di operatori monotoni, si deduce che $\forall v \in K$:

$$\begin{aligned} \underline{\lim} \langle A_{n_k}(u_k), u_k - v \rangle &\geq \underline{\lim} b(u_k, u_k - v) + \underline{\lim} \langle C_{n_k}(u_k), u_k - v \rangle \geq \\ &\geq \langle A(u), u - v \rangle + \underline{\lim} \langle C_{n_k}(v), u_k - v \rangle = \langle A(u), u - v \rangle. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Osserviamo ora che dalle ipotesi fatte si ha (vedi [6], e [9], Teorema 2.8) che $\forall n \in \mathbb{N}$ esiste $u_n \in H_0^{1,q}(\Omega)$ tale che

$$(3.12) \quad \begin{cases} \langle A_n(u_n), v \rangle = \langle T, v \rangle, & \forall v \in H_0^{1,q}(\Omega); \\ \|u_n\|_{H_0^{1,q}(\Omega)} \leq M, & M \in \mathbb{R}_+. \end{cases}$$

Si ha inoltre:

LEMMA 3.6. Sia u_n , $n \in \mathbb{N}$, definita come in (3.12). Allora $u_n \in K_n$.

DIMOSTRAZIONE. Proviamo che $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_n \leq \psi + 1/n$; sia

$$v = \left(u_n - \psi - \frac{1}{n}\right)^+ = \max\left(u_n - \psi - \frac{1}{n}, 0\right) \in H_0^{1,q}(\Omega).$$

Dalle ipotesi fatte e da (3.12) si ha:

$$\begin{aligned} \langle T, v \rangle + \int_{\Omega} \min(g - T, 0) v \, dx &= \langle T, v \rangle - \langle C_n(u_n), v \rangle = \\ &= \tilde{a}(u_n, v) + \int_{\Omega} [(P(\mathcal{C}u_n))v + \beta(u_n - \psi)^{q-1}v] \, dx \geq a(\psi, v) + \\ &\quad + \int_{\Omega} (P\psi)v \, dx + \beta\|v\|_{L^q(\Omega)}^q \geq \int_{\Omega} gv \, dx + \beta\|v\|_{L^q(\Omega)}^q. \end{aligned}$$

Dalle disuguaglianze soprascritte segue allora che $v = 0$. In modo del tutto analogo si prova che $\forall n \in \mathbf{N}$ $u_n \geq \phi - 1/n$. ■

Dai Teoremi 3.1 e 3.5 e dal Lemma 3.6 si ha:

TEOREMA 3.7. Supponiamo che valgano le ipotesi sopradette. Allora da ogni successione $\{u_n\}$, con u_n definita come in (3.12), è possibile estrarre una sottosuccessione $\{u_{n_k}\}$ tale che $u_{n_k} \rightarrow u$; si ha $u \in K$,

$$(3.13) \quad \langle A(u), u - v \rangle \leq \langle T, u - v \rangle, \quad \forall v \in K.$$

Risulta inoltre:

$$(3.14) \quad \langle A(u), v \rangle = \langle N, v \rangle + \langle T, v \rangle, \quad \forall v \in H_0^{1,q}(\Omega)$$

essendo $N \in L^{q'}(\Omega)$:

$$\begin{aligned} \langle N, v \rangle &= \lim \int_{\Omega} (\text{Max}(f - T, 0)\theta_{1,n_k}(u_{n_k} - \phi)v + \\ &\quad + \min(g - T, 0)\theta_{2,n_k}(u_{n_k} - \psi)v) \, dx, \quad \forall v \in H_0^{1,q}(\Omega). \end{aligned}$$

DIMOSTRAZIONE. Basta osservare che dalle (3.12), dai Teoremi 3.1 e 3.5, e dal Lemma 3.6 esiste una estratta $\{u_{n_k}\}$ della successione $\{u_n\}$ (definita dalle (3.12)) tale che $u_{n_k} \rightarrow u$, u soluzione di (3.13). Passando al limite nella (3.12) si perviene alla (3.14).

BIBLIOGRAFIA

- [1] A. AMBROSETTI - C. SBORDONE, Γ^- convergenza e G convergenza per problemi non lineari di tipo ellittico, Bollettino U.M.I., **13** (1976), pp. 352-362.
- [2] L. BOCCARDO - I. CAPUZZO DOLCETTA, Stabilità delle soluzioni di disequazioni variazionali ellittiche e paraboliche quasi lineari, Pubbl. Ist. Mat. Università dell'Aquila, no. 10 (1977).
- [3] L. BOCCARDO - P. MARCELLINI, Sulla convergenza delle soluzioni di disequazioni variazionali, Ann. Mat. Pura Appl., (IV), **110** (1976), pp. 137-159.
- [4] H. BREZIS, Equations et inéquations non linéaires dans les espaces vectoriels en dualité, Ann. Inst. Fourier Grenoble, **18**, 1 (1968), pp. 115-175.
- [5] F. E. BROWDER, Existence theorems for non linear partial differential equations, Proc. Sympos. Pure Math., **16**, American Math. Soc. (1970), pp. 1-60.
- [6] P. HESS, A criterion for the existence of solutions of non linear elliptic boundary value problems, Proc. R.S.E. (A), **74** (1974-75), pp. 49-54.
- [7] N. KENMUCHI, Non linear operators of monotone type in reflexive Banach spaces and non linear perturbations, Hiroshima Math. J., **4** (1974), pp. 229, 263.
- [8] N. KENMUCHI, Pseudomonotone operators and non linear elliptic boundary value problems, J. Math. Soc. Japan, **27** (1975), pp. 121-149.
- [9] J. L. LIONS, Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires, Dunod, Gauthier-Villars, Paris (1969).
- [10] M. E. MARINA BORGHESE, Esistenza e unicità della soluzione di una disuguaglianza variazionale associata a un operatore non coercivo, Boll. U.M.I., (4), **10** (1974), pp. 500-511.
- [11] M. E. MARINA BORGHESE, Su una estensione di un teorema di Leray-Lions agli insiemi non limitati, in corso di stampa su Ann. Mat. Pura Appl.
- [12] U. MOSCO, Convergence of convex sets and of solutions of variational inequalities, Adv. in Math., **3** (1969), pp. 510-585.
- [13] S. SPAGNOLO, Convergence in energy for elliptic operators, in Numerical Solutions of Partial Differential Equations III, Synspade 1975, Academic Press (1976).
- [14] G. STAMPACCHIA, Variational inequalities, Proc. Nato Advanced Study, Inst. Theory and Applications of monotone operators, Venice (1968), pp. 101-192.

Manoscritto pervenuto in redazione il 28 agosto 1978.