

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

GIUSEPPE ZAMPIERI

Un'estensione del teorema sulle suriezioni fra spazi di Fréchet. Qualche sua applicazione

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 61 (1979), p. 145-153

[<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1979__61__145_0>](http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1979__61__145_0)

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1979, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

Un'estensione del teorema sulle suriezioni fra spazi di Fréchet. Qualche sua applicazione.

GIUSEPPE ZAMPIERI (*)

0. Introduzione.

In questo articolo si stabilisce una condizione necessaria e sufficiente perchè, assegnata una applicazione lineare e continua fra spazi vettoriali topologici $f: E \rightarrow F$ e un sottospazio lineare G di F , si abbia, sotto certe ipotesi, $f(E) \supset G$. Da ciò si faranno derivare criteri per la risolubilità « in grande » di equazioni e di sistemi differenziali alle derivate parziali con coefficienti costanti.

1. TEOREMA 1.

Siano E, F spazi metrizzabili con E completo. Si indichino con E'_s e F'_s i loro duali muniti delle topologie deboli.

Data un'applicazione lineare f di E'_s in F'_s , f è continua se e solo se il suo grafico è un chiuso di $E'_s \times F'_s$.

DIMOSTRAZIONE. La necessità è ovvia.

Viceversa si osservi che $E'_s \times F'_s$ è canonicamente isomorfo a $(E \times F)'_s$. Perciò $\text{Gr } f$ (grafico di f) pensato come sottospazio di $(E \times F)'_s$ è isomorfo a $((E \times F)/\text{Gr } f^0)'_s$ ove $\text{Gr } f^0$ indica la polare di $\text{Gr } f$; ne segue che esso è il duale debole di uno spazio metrizzabile.

(*) Indirizzo dell'A.: Seminario Matematico dell'Università - Via Belzoni 7 - I-35100 Padova.

Siano p_1, p_2 le restrizioni a $\text{Gr } f$ rispettivamente della prima e seconda proiezione canonica di $E'_s \times F'_s$; è chiaro che p_1 è una bigezione continua di $\text{Gr } f$ su E'_s . Si osservi allora che dati X, Y metrizzabili con Y completo e f bigezione lineare continua di X'_s su Y'_s essa è un isomorfismo. Infatti poichè f è suriettiva, la sua trasposta

$${}^t f: Y_s \rightarrow X_s$$

è un omomorfismo (cfr. [3], Prop. 35.7). Poichè Y e X sono metrizzabili ${}^t f$ è omomorfismo anche per le topologie iniziali ([3], Prop. 37.5). Perciò dato che Y è completo ${}^t f(Y)$ è chiuso in X da cui

$$f: X'_s \rightarrow Y'_s$$

risulta isomorfismo.

In base a ciò p_1 è un isomorfismo onde f è continua dato che $f = p_2 \circ p_1^{-1}$. q.e.d.

TEOREMA 2. Si consideri il seguente diagramma

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{u} & F \\ \uparrow i_1 & & \uparrow i_2 \\ H & \xrightarrow{q} & G \end{array}$$

ove

a) i_1, i_2, u, q sono applicazioni lineari e continue ed inoltre $i_2 \circ q = u \circ i_1$ (cioè il diagramma è commutativo);

b) E, G sono spazi di Fréchet; H, F sono localmente convessi e di Hausdorff;

c) la trasposta di q è iniettiva.

Allora le seguenti proposizioni sono equivalenti

- i) $u(E) \supset i_2(G)$,
- ii) ${}^t i_1({}^t u F'^{-s}) \subset {}^t q(G')$ ove con ${}^t u F'^{-s}$ si è indicata la chiusura di ${}^t u(F')$ in E'_s .

DIMOSTRAZIONE. ii) implica i).

Si consideri la mappa $M: {}^t u F'^{-s} \rightarrow G'_s$ così definita: se $e' \in {}^t u F'^{-s}$ e ${}^t i_1(e') = {}^t q(g')$, $M(e') = g'$. M è ben definita perchè ${}^t q$ è iniettiva ed è lineare.

Osservato che ${}^t u F'^{-s} = \text{Ker } u^0$ e che $\text{Ker } u^0$, munito della topologia indotta da E'_s , è isomorfo algebricamente e topologicamente a $(E/\text{Ker } u)_s'$, l'isomorfismo essendo la trasposta della proiezione canonica da E su $E/\text{Ker } u$, si conclude che ${}^t u F'^{-s}$, con la topologia indotta da E'_s , è il duale debole di uno spazio di Fréchet. Pertanto se si prova che $\text{Gr } M$ è un chiuso di ${}^t u F'^{-s} \times G'_s$, M risulta continua per il Teorema 1.

Infatti: $(e'_j, M(e'_j))$ converga verso (e'_0, g'_0) ove $M(e'_j) = g'_j$ se ${}^t q(g'_j) = {}^t i_1(e'_j)$. Allora, per la continuità di ${}^t q$ da G'_s in H'_s , ${}^t q(g'_j)$ converge in H'_s verso ${}^t q(g'_0)$ e, per quella di ${}^t i_1$, verso ${}^t i_1(e'_0)$.

Allora ${}^t i_1(e'_0) = {}^t q(g'_0)$ cioè $g'_0 = M(e'_0)$.

Sia

$${}^t M: G \rightarrow ({}^t u F'^{-s})' = \frac{E}{\text{Ker } u}$$

la trasposta di M .

È immediato dimostrare che per ogni $g \in G$ $i_2(g) = u({}^t M(g))$. Infatti per ogni $f' \in F'$ si ha

$$\begin{aligned} \langle f', u({}^t M(g)) \rangle &= \langle {}^t u(f'), {}^t M(g) \rangle = \\ &= \langle M({}^t u(f')), g \rangle = \langle i_2(f'), g \rangle = \langle f', i_2(g) \rangle \end{aligned}$$

ove con lo stesso crochet si sono indicate le varie dualità in questione.

i) implica ii).

Su ${}^t u(F')$ vi sia la topologia indotta da E'_s . Si consideri la mappa $L: G \rightarrow ({}^t u(F'))'_s$ così definita:

$$\text{se } g \in G \quad L(g): {}^t u(F') \rightarrow C, \quad L(g)[{}^t u(f')] = \langle f', i_2(g) \rangle.$$

$L(g)$ è ben definita perchè se ${}^t u(f'_1) = {}^t u(f'_2)$ allora $f'_2 - f'_1$ è nulla su $u(E) \cap i_2(G)$. $L(g)$ è lineare (ovvio) e $L(g) \in ({}^t u(F'))'_s$. Infatti sia ${}^t u(f'_j)$ una rete convergente a zero. Preso $e \in E$ tale che $u(e) = i_2(g)$ si ha

$$\lim_j L(g)[{}^t u(f'_j)] = \lim_j \langle f'_j, i_2(g) \rangle = \lim_j \langle f'_j, u(e) \rangle = \lim_j \langle {}^t u(f'_j), e \rangle = 0.$$

Ovvio che L è lineare e continua. Sia

$$M: G \rightarrow ({}^t u F'^{-s})'$$

così definita: $M(g)$ è l'estensione per continuità di $L(g)$ a ${}^t u F'^{-s}$.

Si indichi ora con $(E'_s)'_b$ il duale forte del duale debole di E . $(E'_s)'_b$ è E con la topologia dell'uniforme convergenza sui limitati di E'_s o equivalentemente sugli equicontinui di E' (E è F -spazio e quindi barrellato) che è la topologia iniziale di ogni spazio localmente convesso e di Hausdorff.

Da ciò segue che E'_s è semiriflessivo e tenuto conto che ${}^t u F'^{-s}$ è un suo sottospazio chiuso e quindi semiriflessivo, si ha:

$$({}^t u F'^{-s})'_b = \frac{E}{\text{Ker } u}.$$

Infatti

$$(({}^t u F'^{-s})'_b)' = {}^t u F'^{-s} = \left(\frac{E}{\text{Ker } u} \right)'.$$

Per cui $E/\text{Ker } u$ ha la topologia della convergenza uniforme sugli elementi di un ricoprimento di ${}^t u F'^{-s}$ costituito di convessi bilanciati e debolmente compatti⁽¹⁾ che risultano anche limitati per la topologia indotta da E'_s .

Utilizziamo ora il noto teorema del grafico chiuso per applicazioni lineari fra F -spazi per dimostrare che

$$M: G \rightarrow ({}^t u F'^{-s})'_b = \frac{E}{\text{Ker } u}$$

è continua.

Sia $(g_n, M(g_n))$ una successione convergente a (g_0, m_0) in $G \times ({}^t u F'^{-s})'_b$; $L(g_n)$ che è restrizione di $M(g_n)$ a ${}^t u(F')$ converge su ogni punto di ${}^t u(F')$ a $L(g_0)$ che è pertanto la restrizione di m_0 a ${}^t u(F')$; in definitiva $m_0 = M(g_0)$ dal che M è continua.

Sia ${}^t M$ la trasposta di M , continua da $(({}^t u F'^{-s})'_b)'_s = {}^t u F'^{-s}$ in G'_s . Sia $e' \in {}^t u F'^{-s}$ e sia ${}^t u(f'_j)$ una rete convergente debolmente verso e' . Allora $\lim_j {}^t M({}^t u(f'_j)) = \lim_j {}^t i_2(f'_j) = {}^t M(e')$. Allora ${}^t q({}^t i_2(f'_j))$ converge

⁽¹⁾ In base al noto teorema di Mackey (cfr. [3]).

sui punti di H verso ${}^tq({}^tM(e'))$ e verso ${}^ti_1(e')$. Da cui:

$${}^ti_1(e') = {}^tq({}^tM(e')) . \quad \text{q.e.d.}$$

Per ogni p , seminorma continua su E , si indichi con E'_p lo spazio dei funzionali lineari su E che sono continui per la topologia individuata dalla seminorma p .

COROLLARIO. Se $u(E) \supset i_2(G)$, per ogni p , seminorma continua su E , esiste h , seminorma continua su G tale che:

$$\text{se } g' \in G' \text{ e } {}^tq(g') \in {}^ti_1(\text{Ker } u^0 \cap E'_p) \text{ allora } g' \in G'_h .$$

DIMOSTRAZIONE. Sia $M: {}^tuF'^{-s} \rightarrow G'_s$, $M(e') = g'$ se ${}^ti_1(e') = {}^tq(g')$. Si è dimostrato nel Teorema 2 che M è continua. Ricordato che $(G'_s)'_b = G$ e che $({}^tuF'^{-s})'_b = E/\text{Ker } u$, allora la trasposta di M risulta continua da G in $E/\text{Ker } u$. Pertanto per ogni p su E esiste h su G tale che:

$${}^tM: G_h \rightarrow \frac{E_p}{\text{Ker } u}$$

è continua e la sua trasposta

$${}^{tt}M: \left(\frac{E_p}{\text{Ker } u} \right)' = \text{Ker } u^0 \cap E'_p \rightarrow G'_h$$

è chiaramente la restrizione di M a $\text{Ker } u^0 \cap E'_p$. q.e.d.

2. Applicazioni.

Si considerino due aperti di R^n A e B con $A \supset B$.

I) Sia P un polinomio differenziale a coefficienti costanti. Per ogni $f \in C^\infty(A)$ l'equazione $Pu = f$ è $C^\infty(B)$ -risolvibile (cioè esiste una soluzione u in $C^\infty(B)$) se e solo se $({}^tPE'(B))^{-s} \subset {}^tPE'(A)$ ove $E'(A)$ è lo spazio delle distribuzioni a supporto compatto in A . Si noti che per ogni aperto B relativamente compatto in A si ha $({}^tPE'(B))^{-s} \subset {}^tPE'(A)$ dato che ogni polinomio differenziale a coefficienti costanti è semiglobalmente risolubile in A (cioè l'equazione $Pu = f$ con f in $C^\infty(A)$ è risolubile sugli aperti relativamente compatti di A).

II) Sia Z_A la riunione delle componenti connesse e compatte del complementare di A . Si supponga $Z_A = \emptyset$ ⁽²⁾ e siano P, Q polinomi differenziali a coefficienti costanti primi tra di loro con Q ellittico. Allora per ogni (f, g) in $C^\infty(A) \times C^\infty(A)$ per cui il sistema: $Pu = f$, $Qu = g$ è $C^\infty(A)$ -localmente risolubile (cioè per ogni punto p di A esiste un intorno V_p e una soluzione $u_p \in C^\infty(V_p)$), per ogni tale (f, g) il sistema è $C^\infty(A)$ -risolubile se e solo se:

$${}^tPE'(A) + {}^tQE'(A) \quad \text{è chiuso in } E'(A).$$

È indifferente specificare se è chiuso per la topologia debole o forte di $E'(A)$ dato che $C^\infty(A)$ è riflessivo.

III) Nelle stesse ipotesi di II) i sistemi $C^\infty(A)$ -localmente risolubili sono $C^\infty(B)$ -risolubili se e solo se:

$$({}^tPE'(B) + {}^tQE'(B))^{-s} \subset {}^tPE'(A) + {}^tQE'(A).$$

IV) Condizione necessaria per la $C^\infty(B)$ -risolubilità dell'equazione $Pu = f$ quale che sia f in $C^\infty(A)$ è che per ogni K compatto di B esista K_1 compatto di A tale che, se $u \in C_c^\infty(A)$ e ${}^tPu \in ({}^tPE'(B))^{-s}$ con $\text{supp } {}^tPu \subset K$, allora $\text{supp } u \subset K_1$: Nel caso dei sistemi di cui ai punti II) e III) la condizione necessaria è la seguente: se $u, v \in C_c^\infty(A)$ e ${}^tPu + {}^tQv \in ({}^tPE'(B) + {}^tQE'(B))^{-s}$ con $\text{supp } ({}^tPu + {}^tQv) \subset K$, allora $\text{supp } u \cap \text{supp } v \subset K_1$.

DIMOSTRAZIONE. Per l'enunciato I) si osservi il diagramma:

$$\begin{array}{ccc} C^\infty(B) & \xrightarrow{P} & C^\infty(B) \\ \uparrow i & & \uparrow i \\ C^\infty(A) & \xrightarrow{P} & C^\infty(A) \end{array}$$

ove per ogni f in $C^\infty(A)$ $i(f)$ è la restrizione di f a B .

Gli spazi in questione soddisfano tutte le ipotesi del Teorema 2. Inoltre tP è iniettiva perchè se ${}^tPu = 0$ allora (applicando la trasfor-

⁽²⁾ Si vedrà che questa condizione assicura che $\{(Pf, Qf): f \in C^\infty(A)\}$ è $C^\infty(A) \times C^\infty(A)$ -denso nello spazio dei dati per cui il sistema è localmente risolubile.

mata di Fourier) $P(-\xi)\hat{u}(\xi) = 0$ e perciò $\hat{u}(\xi) = 0$ per ogni $\xi \in R^n$ perchè $\hat{u}(\xi)$ è una funzione analitica nulla sul complementare in R^n della varietà algebrica $P(-\xi) = 0$.

Per gli enunciati II) e III) si osservi innanzitutto che il sistema $Pu = f$, $Qu = g$ è $C^\infty(A)$ -localmente risolubile se e solo se $Qf = Pg$. (Cfr. teorema di Lojasiewicz-Malgrange [1].) Si osservi poi che:

$$\begin{aligned} \{(f, g) \in C^\infty(A) \times C^\infty(A): Qf = Pg\}^0 = \\ = \{(u, v) \in E'(A) \times E'(A): {}^tPu + {}^tQv = 0\} = \\ = \{({}^tQu, -{}^tPu) \text{ con } u \in E'(A)\}. \end{aligned}$$

Sia infatti (u, v) nel primo insieme e sia f in $C^\infty(A)$;

$$\langle {}^tPu + {}^tQv, f \rangle = \langle u, Pf \rangle + \langle v, Qf \rangle = 0$$

perchè $QPf = PQf$.

Sia $(u, v): {}^tPu + {}^tQv = 0$; allora in C^n si ha

$$P(-z)\hat{u}(z) + Q(-z)\hat{v}(z) = 0$$

e poichè $(P, Q) = 1$ deve essere $u = {}^tQn_1$ con $n_1 \in E'(R^n)$ ⁽³⁾. Poichè $Z_A = \emptyset$ e Q è ellittico deve essere $n_1 \in E'(A)$ (Prop. 4, Cap. III di [2]); perciò $(u, v) = ({}^tQn_1, -{}^tPn_1)$.

Si consideri ora il diagramma

$$\begin{array}{ccc} C^\infty(B) & \xrightarrow{P \times Q} & C^\infty(B) \times C^\infty(B) \\ \uparrow i & & \uparrow i \\ C^\infty(A) & \xrightarrow{P \times Q} & \{(f, g) \in C^\infty(A) \times C^\infty(A): Qf = Pg\} \end{array}$$

${}^tP \times Q$ è iniettiva. Infatti

$$\{(f, g) \in C^\infty(A) \times C^\infty(A): Qf = Pg\}' = \frac{E'(A) \times E'(A)}{\text{Ker } {}^tP \times Q}.$$

⁽³⁾ $(\hat{u}, \hat{v})$ è una relazione fra tP e tQ e poichè le funzioni olomorfe sono un modulo piatto sui polinomi tale relazione è generata dalle relazioni polinomiali (tutte proporzionali a $({}^tQ, -{}^tP)$ dato che $(P, Q) = 1$). Perciò $\hat{u}/{}^tQ$ e $\hat{v}/{}^tP$ sono intere e si conclude col teorema 3.4.2 di [4].

Il punto IV) è immediata conseguenza del corollario.

OSSERVAZIONE. Ricordo la seguente

DEFINIZIONE. La quaterna (A, B, P, Q) è C^∞ -compatibile se e solo se per ogni $f \in C^\infty(A)$ per cui il sistema $Pu = f$, $Qu = 0$ è $C^\infty(A)$ -localmente risolubile per ogni tale f il sistema è $C^\infty(B)$ -risolubile. Sia $(P, Q) = 1$, Q ellittico e $Z_A = \emptyset$. Ovvio che il sistema è C^∞ -localmente risolubile se e solo se $Qf = 0$ (ancora teorema di Lojasiewicz-Malgrange). Si consideri allora:

$$\begin{array}{ccc} C^\infty(B) & \xrightarrow{P \times Q} & C^\infty(B) \times C^\infty(B) \\ \uparrow j & & \uparrow i \\ \text{Ker } Q/A & \xrightarrow{P \times Q} & \text{Ker } Q/A \times \{0\} \end{array}$$

ove $\text{Ker } Q/A = \{f \in C^\infty(A) : Qf = 0\}$. Ovvio che

$$(\text{Ker } Q/A \times \{0\})' = \frac{E'(A) \times E'(A)}{\{(Qu, v); u, v \in E'(A)\}}$$

e che

$$(\text{Ker } Q/A)' = \frac{E'(A)}{{}^tQE'(A)}.$$

Se allora ${}^tPu + {}^tQv \in {}^tQE'(A)$ ne segue che $u = {}^tQn_1$ con $n_1 \in E'(A)$ ^(*). Pertanto ${}^tP \times Q$ è iniettiva (cioè $P(\text{Ker } Q/A)$ è denso in $\text{Ker } Q/A$). Quindi per il Teorema 2 (A, B, P, Q) è C^∞ -compatibile se e solo se

$$({}^tPE'(B) + {}^tQE'(B))^{-s} \subset {}^tPE'(A) + {}^tQE'(A)$$

cioè se e solo se il sistema $Pu = f$, $Qu = g$ è risolubile in $C^\infty(B)$ per ogni (f, g) in $C^\infty(A) \times C^\infty(A)$ con $Qf = Pg$.

(*) Si ragioni analogamente alla nota a piè della pagina precedente e si applichino ancora il teorema 3.4.2 di [4] e la prop. 4, cap. 3 di [2].

BIBLIOGRAFIA

- [1] A. ANDREOTTI - M. NACINOVICH, *Complexes of partial differential operators*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, serie IV, **3** (1976).
- [2] B. MALGRANGE, *Existence et approximation des solutions des équations aux dérivées partielles et des équations de convolution*, Annales de l'Institut Fourier, t. 6 (1955-56).
- [3] F. TREVES, *Topological vector spaces distributions and kernels*, Academic Press, New York (1967).
- [4] L. HÖRMANDER, *Linear partial differential operators*, Springer-Verlag, Berlino (1963).

Manoscritto pervenuto in redazione il 21 luglio 1978.