

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

CLAUDIO BARTOLONE

FEDERICO BARTOLOZZI

Sopra una classe di piani (R, r) -transitivi

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 61 (1979), p. 13-31

[<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1979__61__13_0>](http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1979__61__13_0)

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1979, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Sopra una classe di piani (R, r) -transitivi.

CLAUDIO BARTOLONE - FEDERICO BARTOLOZZI (*)

È noto che, a partire da un opportuno piano (affine) di M. Hall Π e da una sua omologia involutoria ω ⁽¹⁾, si può costruire un piano (affine) π appartenente, come proveremo, alla classe II di H. Lenz, i punti (propri) di π essendo quelli di Π e le sue rette ottenendosi dalle rette di Π usufruendo di ω (G. Panella [7]); dalla costruzione si deduce che se U è il centro (improprio) di ω ed l il suo asse, U ed l sono punto e retta anche di π ⁽²⁾.

Nel presente lavoro stabiliamo che ogni collineazione α di π agisce sui suoi punti (propri) come una collineazione α' di Π per la quale è $l^{\alpha'} = l$, $U^{\alpha'} = U$; in più, che ogni collineazione α' di Π per la quale sia $l^{\alpha'} = l$, $U^{\alpha'} = U$ è individuata, nel modo precisato da una collineazione α di π . In conseguenza, il gruppo delle collineazioni $\Omega(\pi)$ di π si può identificare con il centralizzante di ω nel gruppo delle collineazioni di Π , $\Omega(\Pi)$, esistendo un monomorfismo (di gruppi) $\Omega(\pi) \rightarrow \Omega(\Pi)$, $\alpha \rightarrow \alpha'$, che ha come immagine quel centralizzante.

Tale risultato individua il gruppo delle collineazioni di π , tenuto conto che il gruppo delle collineazioni di Π è ben noto (D. R. Hughes [2]; G. Panella [6]).

(*) Indirizzo degli AA.: Istituto Matematico dell'Università - Via Archirafi 34 - 90-123 Palermo.

Lavoro eseguito nell'ambito del Gruppo Nazionale per le strutture Algebriche e Geometriche e loro applicazioni del C.N.R.

⁽¹⁾ Più precisamente, Π è piano (affine) di traslazione che ammette tra i suoi sistemi di coordinate un (opportuno) quasicorpo di M. Hall.

⁽²⁾ U punto di π significa che ogni retta di direzione U del piano Π è anche retta di π .

Se il piano π è finito, π appartiene (F. Bartolozzi [1]) ad una classe di piani (R, r) -transitivi determinata e studiata da T. G. Ostrom [5] e L. A. Rosati [11]. Anzi, L. A. Rosati ha fornito, nel caso finito, alcune informazioni sulle collineazioni di π ; noi terremo presenti, nel seguito, i risultati di L. A. Rosati, dopo esserci preoccupati di stabilirli senza usufruire della ipotesi di finitezza.

Per concludere, è opportuno segnalare che i piani di Ostrom-Rosati sono stati studiati, senza ipotesi di finitezza, da G. Pickert [10] e da F. Bartolozzi [1].

1. Lemmi preliminari.

Siano F un campo di caratteristica diversa da due e di ordine superiore a tre, s un suo elemento che non sia quadrato di un elemento di F (diremo, in breve: s non quadrato) e si supponga:

- (1.1) se $F' = \{z \in F | z = x^2 - sy^2 \text{ con } x, y \in F\}$, il prodotto di due qualsiasi elementi di F' che siano non quadrati in F è un quadrato in F ; F' contiene un non quadrato (in F).

Con tali dati si può definire un piano (affine) di traslazione Π (cfr. [7]; pp. 348-349), coordinatizzabile con un quasicorpo di M. Hall, i cui punti sono i punti dello spazio lineare (affine) $S_4(F)$ di dimensione quattro sopra il campo F e le cui rette sono tutti e soli i piani di quello spazio definiti da equazioni di uno dei seguenti tipi (se $P = (x_1, x_2, y_1, y_2)$ è punto di $S_4(F)$):

$$(1.2) \quad \begin{cases} y_1 = a_1 x_1 + s a_2 x_2 + b_1 \\ y_2 = a_2 x_1 + a_1 x_2 + b_2 \end{cases} \quad a_1, a_2, b_1, b_2 \in F \text{ e } a_2 \neq 0,$$

$$(1.3) \quad \begin{cases} x_2 = a x_1 + b_1 \\ y_2 = a y_1 + b_2 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} x_1 = b_1 \\ y_1 = b_2 \end{cases} \quad a, b_1, b_2 \in F \text{ } ^{(3)}.$$

Inoltre, con i medesimi dati, si individua un piano π , assumendo come suoi punti i punti di Π e definendo rette di π le rette di tipo

⁽³⁾ Per i riferimenti e la terminologia relativi ai piani proiettivi ed agli spazi lineari rimandiamo a G. Pickert [9] e B. Segre [12].

(1.3), che scriveremo, rispettivamente, $\{a; b_1, b_2\}$ e $\{\infty; b_1, b_2\}$, e le parti di $S_4(F)$ così ottenibili:

(1.4) $[a_1, a_2; b_1, b_2]$, $a_1, a_2, b_1, b_2 \in F$ e $a_2 \neq 0$, è retta di π costituita da tutti e soli i punti $P = (x_1, x_2, y_1, y_2)$ che appartengono al piano (1.2) di $S_4(F)$ se $(a_2x_1 + b_2)^2 - s(a_2x_2)^2$ è (zero o) quadrato oppure, se ciò non accade, al piano di $S_4(F)$ di tipo (1.2) individuato dagli elementi $a_1, -a_2, b_1, -b_2$ di F .

Posto $l = \{0; 0, 0\}$, sia V la sua direzione, mentre U indichi la direzione della retta $x_1 = y_1 = 0: \pi$ è piano (affine) (V, UV) -transitivo.

Conveniamo di indicare con (a) il punto improprio della retta $\{a; b_1, b_2\}$ (quindi, $V = (0)$) e chiameremo (a) punto improprio di tipo I se $a \neq 0$. Ovviamente, U, V e i punti impropri di tipo I si possono ritenere comuni ai piani (affini) π e II . Inoltre, (a_1, a_2) indicherà il punto improprio della retta (1.4) di π : (a_1, a_2) sarà detto punto improprio di tipo II ($a_1, a_2 \in F, a_2 \neq 0$).

Per comodità espositiva, ammettiamo subito l'appartenenza di π alla classe II di H. Lenz [4] ⁽⁴⁾; ci riserviamo di dimostrare tale appartenenza all'inizio del n. 2, senza usufruire dei risultati già conseguiti.

LEMMA 1. *Le omografie di $S_4(F)$ definite da equazioni del seguente tipo:*

$$(1.5) \quad \begin{cases} x'_1 = a_{11}x_1 + a_{12}y_1 + c_1 \\ x'_2 = a_{11}x_2 + a_{12}y_2 \\ y'_1 = a_{21}x_1 + a_{22}y_1 + c_2 \\ y'_2 = a_{21}x_2 + a_{22}y_2 \end{cases} \quad a_{ij}, c_1, c_2 \in F, |a_{ij}| \neq 0,$$

individuano collineazioni del piano π .

DIMOSTRAZIONE. È sufficiente, per noti risultati, stabilire il lemma nei seguenti casi:

- 1) $a_{11} = a_{22} = 1, a_{12} = a_{21} = 0$; oppure $c_1 = c_2 = 0$ e
- 2) $a_{11} = 1, a_{22} = a$ ($a \in F, a \neq 0$), $a_{12} = a_{21} = 0$,
- 3) $a_{11} = a_{22} = 1, a_{12} = 0, a_{21} = a$ ($a \in F$),
- 4) $a_{11} = a_{22} = 1, a_{21} = 0, a_{12} = a$ ($a \in F$).

⁽⁴⁾ Nel caso finito, ciò è stato provato da L. A. Rosati in [11].

La discussione dei casi 1), 2) e 3) è ovvia. Supponiamo, quindi, che in (1.5) si abbia $c_1 = c_2 = a_{21} = 0$, $a_{11} = a_{22} = 1$, $a_{12} = a$ ($a \in F$) e sia $\sigma: S_4(F) \rightarrow S_4(F)$ l'applicazione così definita. Basterà mostrare che se $r = [a_1, a_2; b_1, b_2]$ è retta di π di tipo (1.4) fissata (comunque), P^σ descrive una retta di π quando il punto P descrive r , poichè se r fosse di tipo (1.3) l'analoga verifica è immediata.

Con r fissata, esiste una collineazione τ di π di tipo 1) tale che $(0, 0, 0, 0) \in r^\tau$ e si può determinare una collineazione di π , τ' , sempre di tipo 1), tale che $\tau\sigma\tau' = \sigma$. Ciò significa che non è restrittivo supporre $r = [a_1, a_2; 0, 0]$ ($a_1, a_2 \in F$, $a_2 \neq 0$).

Con $x_1, x_2 \in F$, i punti di r sono

$$P = (x_1, x_2, a_1x_1 + \varepsilon sa_2x_2, \varepsilon a_2x_1 + a_1x_2)$$

con $\varepsilon = 1$ se $x_1^2 - sx_2^2$ è (zero o) quadrato, $\varepsilon = -1$ altrimenti.

Ne deriva

$$P^\sigma = ((1 + aa_1)x_1 + \varepsilon asa_2x_2, \varepsilon aa_2x_1 + (1 + aa_1)x_2,$$

$$a_1x_1 + \varepsilon sa_2x_2, \varepsilon a_2x_1 + a_1x_2)$$

e risulta

$$\begin{aligned} [(1 + aa_1)x_1 + \varepsilon asa_2x_2]^2 - s[\varepsilon aa_2x_1 + (1 + aa_1)x_2]^2 = \\ = [(1 + aa_1)^2 - sa^2a_2^2](x_1^2 - sx_2^2). \end{aligned}$$

Ciò significa $P^\sigma \in [a'_1, a'_2; 0, 0]$ ove, se $c^{-1} = [(1 + aa_1)^2 - sa^2a_2^2]$, è $a'_1 = c[(1 + a_1a)a_1 - sa_2^2]$, $a'_2 = ca_2$ se c è quadrato oppure $a'_2 = -ca_2$ se c è non quadrato. Il lemma è così provato.

OSSERVAZIONE I. Se F è un campo finito, π è piano di Ostrom-Rosati ([1]) e il suo gruppo di collineazioni (1.5) è stato determinato, in tal caso, da L. A. Rosati [11].

Si noti che ogni collineazione (1.5) fissa la retta l , il punto improprio U e ciascun punto improprio di tipo I e opera transitivamente sulle rette di direzione U e su quelle di direzione V distinte da l .

Ponendo, inoltre, in (1.5) $c_1 = c_2 = a_{12} = 0$, $a_{11} = 1$ (quindi $a_{22} \neq 0$) si ha una collineazione di π che trasforma la retta $[a_1, a_2; 0, 0]$ nella retta $[a_{21} + a_{22}a_1, a_{22}a_2; 0, 0]$: ossia il gruppo (1.5) agisce transitiva-

mente sui (fasci di rette, le direzioni delle quali siano) punti impropri di tipo II.

Si verifica a vista che l'applicazione:

$$\omega: S_4(F) \rightarrow S_4(F)$$

definita ponendo $(x_1, x_2, y_1, y_2)^\omega = (x_1, -x_2, y_1, -y_2)$ se $(x_1, x_2, y_1, y_2) \in S_4(F)$ individua una collineazione ω del piano π ; anzi, ω è collineazione involutoria non identica di π che ha come asse la retta l e che muta in sè l'insieme delle rette (1.3) (delle rette (1.4)).

L. A. Rosati [11] ha provato che se π è finito, ω è l'unica collineazione di π che verifica le condizioni precisate ⁽⁵⁾.

La medesima affermazione sussiste anche se π non è finito; noi ci limiteremo, nell'ambito di questi risultati preliminari, a stabilire il

LEMMA 2. *Sia σ una collineazione involutoria di π che fissi ogni punto della retta l e un punto C (proprio o improprio) di π distinto da U e da V . Se σ muta in sè l'insieme delle rette (1.3), σ agisce come la trasformazione identica sui punti di π .*

DIMOSTRAZIONE. σ non sia l'identità. Poichè π appartiene alla classe II di H. Lenz, C è punto improprio e $U \neq C \neq V$.

Se C è punto improprio di tipo I, sia $C = (\gamma)$, $\gamma \in F$ e $\gamma \neq 0$, mentre se C è punto improprio di tipo II non è restrittivo supporre $C = (0, 1)$, tenendo presente l'Osservazione I e riferendosi alla collineazione $\varrho\sigma\varrho^{-1}$ di π , con ϱ collineazione di tipo (1.5) (che, quindi, fissa U, V e ogni punto improprio di tipo I) per la quale risulti $(1, 0)^\varrho = C$. Avendo negato la tesi, esiste (α) , punto improprio di tipo I, tale che $(\alpha)^\sigma = U$ ($\alpha \in F$, $\alpha \neq 0, \gamma$).

Se $P = (x_1, x_2, y_1, y_2) \in S_4(F)$ si ha

$$P^\sigma \in [(\alpha)P \cap l]U = \{\infty; x_1 - \alpha^{-1}x_2, y_1 - \alpha^{-1}y_2\}.$$

⁽⁵⁾ Se si desume il piano π secondo la costruzione di Ostrom-Rosati occorre considerare un quasicorpo associativo sinistro (non eccezionale) R che abbia ordine q^2 e il cui nucleo sia un campo di Galois F di ordine q , risultando, inoltre, R centrale su F (cfr. [13]). In [11] (cfr. teor. 4) viene provato che il gruppo delle omologie di π di asse l che trasforma in sè ciascuno dei due sistemi di rette (1.3) e (1.4) è isomorfo al gruppo degli automorfismi di R che fissano ciascun elemento di F ; è noto che tale gruppo ha ordine due.

PRIMO CASO. $C = (\gamma)$, $\gamma \neq 0$, α . È

$$P^\sigma \in \{\gamma; x_2 - \gamma x_1, y_2 - \gamma y_1\},$$

quindi:

$$\begin{aligned} P^\sigma &= (x_1 - \alpha^{-1}x_2, (1 - \gamma\alpha^{-1})x_2, y_1 - \alpha^{-1}y_2, (1 - \gamma\alpha^{-1})y_2) = \\ &= (x_1 - \alpha^{-1}x_2, -x_2, y_1 - \alpha^{-1}y_2, -y_2) \end{aligned}$$

poichè, essendo σ involutoria, è $2\alpha = \gamma$. Poichè la collineazione σ di π agisce sui punti di $S_4(F)$ come una omografia (affine), σ deve mutare ciascun piano di $S_4(F)$ di tipo (1.2) in un piano dello stesso tipo.

Ne deriva che esistono $l, m \in F$, $m \neq 0$, tali che, con $x_1, x_2 \in F$, tenuto conto che

$$(x_1, x_2, sx_2, x_1)^\sigma = (x_1 - \alpha^{-1}x_2, -x_2, sx_2 - \alpha^{-1}x_1, -x_1),$$

si abbia

$$sx_2 - \alpha^{-1}x_1 = l(x_1 - \alpha^{-1}x_2) - smx_2 \quad \text{e} \quad -x_1 = m(x_1 - \alpha^{-1}x_2) - lx_2 :$$

la seconda di tali relazioni, con $x_2 = 0$, dà $m = -1$, quindi $l = \alpha^{-1}$ e, in conseguenza, dalla prima uguaglianza si trae $2x_1 = \alpha^{-1}x_2$ che contraddice la possibilità di scegliere comunque $x_1, x_2 \in F$.

SECONDO CASO. $C = (0, 1)$. Se $b, d \in F$, con

$$P = (0, b, 0, d) \in \{\infty; 0, 0\} = OU,$$

si ha, come prima, $P^\sigma \in \{\infty; -\alpha^{-1}b, -\alpha^{-1}d\}$ e, pretendendo $P^\sigma \in CP$, si trova

$$P^\sigma = (-\alpha^{-1}b, \varepsilon(b + \varepsilon' s^{-1} \alpha^{-1}d), -\alpha^{-1}d, \varepsilon(d + \varepsilon' \alpha^{-1}b)),$$

ove $\varepsilon, \varepsilon' = \pm 1$ in dipendenza della scelta degli elementi b, d in F . Poichè σ è involutoria e $(\alpha)^\sigma = U$, deve essere $P^\sigma \in O^\sigma U^\sigma = O(\alpha)$, quindi $\varepsilon(d + \varepsilon' \alpha^{-1}b) = -d$ che contraddice l'arbitraria scelta degli elementi b, d in F . Il lemma è così provato.

LEMMA 3. Se σ è collineazione di π che fissa ogni punto improprio e se risulta $C^\sigma = C$ con $C = (0, 0, 0, 1)$, allora σ è l'identità.

DIMOSTRAZIONE. Sia σ non identica. Se $O = (0, 0, 0, 0)$ è $O^\sigma = (0, \alpha, 0, \beta)$, $\alpha, \beta \in F$ e $0 \neq \beta \neq 1$ se $\alpha = 0$. Supposto dapprima $-s$ quadrato in F , si considerino i punti $P = (0, 0, a, 1)$ e $Q = (0, as^{-1},$

$a, 0$), ove a è un elemento non nullo di F tale che $1 - a^2 s^{-1}$ è un non quadrato in F ⁽⁶⁾. Premesso ciò, mostriamo che dall'allineamento dei punti P, Q, U non deriva quello dei punti P^σ, Q^σ, U .

Risulta, infatti,

$$CP = \{0; 0, 1\}, \quad CQ = [a^{-1}s, -1; 0, 1], \quad OP = \{a^{-1}; 0, 0\},$$

$$(OP)^\sigma = \{a^{-1}; \alpha, \beta\}, \quad P^\sigma = (OP)^\sigma \cap CP = (-\alpha\alpha, 0, -a(\beta - 1), 1)$$

e

$$OQ = [0, 1; 0, 0].$$

Se $\beta^2 - \alpha^2 s$ è un quadrato, si ha $(OQ)^\sigma = [0, 1; -\alpha s, \beta]$, mentre, nell'ipotesi esclusa, si ottiene $(OQ)^\sigma = [0, 1; \alpha s, -\beta]$.

L'allineamento dei punti P^σ, Q^σ, U comporta $P^\sigma U \cap CQ = P^\sigma U \cap (OQ)^\sigma$ con $P^\sigma U = \{\infty; -\alpha\alpha, a(1 - \beta)\}$ e, tale uguaglianza, fornisce le condizioni:

$$(1.6) \quad -a(1 - \beta) = \alpha s \text{ oppure } 2\beta = a^{-1}\alpha s, \text{ se } \beta^2 - \alpha^2 s \text{ è quadrato,}$$

$$(1.7) \quad \beta = 1, 2\beta = (a^{-1}s - 2a)\alpha \text{ oppure } \alpha = 0, \text{ se } \beta^2 - \alpha^2 s \text{ è non quadrato.}$$

Poichè in (1.6) si può sostituire a con un qualsiasi elemento non nullo di F che verifichi la condizione $1 - a^2 s^{-1}$ non quadrato (ad esempio $-a$), se si pretende che i valori di α e di β non dipendano dalla scelta dell'elemento a è necessario che sia $\alpha = 0$ e $\beta = 1$ oppure $\alpha = \beta = 0$ e ciò contrasta con un'ipotesi.

Nelle (1.7), $\alpha = 0$ è ovviamente da escludere, mentre la rimanente possibilità evidenzia ancora una dipendenza di α e di β da a che può essere evitata solo ponendo $\beta = 0$ e ciò è assurdo.

Nel caso in cui $-s$ è non quadrato, sostituendo i punti P e Q con i punti $R = (0, 0, b, 1)$ e $S = (0, bs^{-1}, b, 0)$ ove b è elemento non nullo di F tale che $1 - s^{-1}b^2$ è quadrato (si veda la nota ⁽⁶⁾), e procedendo in modo analogo al caso precedente ⁽⁷⁾, si perviene ancora ad un assurdo, ossia σ è collineazione identica. Ciò prova il lemma.

⁽⁶⁾ Le ipotesi fatte, all'inizio, sul campo F permettono di individuare $x, y \in F$, $x, y \neq 0$, tali che $z = x^2 - sy^2$ è non quadrato in F ; da ciò segue subito l'esistenza di a in F , $a \neq 0$, che verifica la condizione richiesta.

⁽⁷⁾ Più precisamente, risulta: $CR = \{0; 0, 1\}$, $CS = [-b^{-1}s, 1; 0, 1]$, $OR = \{b^{-1}; 0, 0\}$, $(OR)^\sigma = \{b^{-1}; \alpha, \beta\}$, $R^\sigma = (-b\alpha, 0, b(1 - \beta), 1)$, $OS = [0, -1; 0, 0]$ e $(OS)^\sigma = [0, -1; \alpha s, \beta]$ se $\beta^2 - \alpha^2 s$ è quadrato, $(OS)^\sigma = [0, -1; -\alpha s, -\beta]$ altrimenti.

LEMMA 4. *Non esiste una collineazione σ di π che fissa ogni punto della retta l , ogni retta per un punto improprio di tipo I, (α) , e per la quale risulti $(0, 1)^\sigma = U$.*

DIMOSTRAZIONE. Esista σ . Si consideri il punto $P = (1, -as^{-1}, a, -1)$ ove a è un elemento non nullo di F tale che $1 - a^2s^{-1}$ è un non quadrato in F . Poichè $P \in r = [0, 1; 0, 0]$, P^σ è il punto comune alla retta per P di direzione (α) ed alla retta $r^\sigma = \{\infty; 0, 0\}$, ossia $P^\sigma = (0, -as^{-1} - \alpha, 0, -1 - a\alpha)$.

Se (γ) è un altro punto improprio di tipo I distinto da (α) , detta t la retta di direzione (γ) per P , risulta $t = \{\gamma; -as^{-1} - \gamma, -1 - \gamma a\}$ e, per determinare t^σ , basta considerare la retta di π che congiunge $t \cap l = (a\gamma^{-1}s^{-1} + 1, 0, \gamma^{-1} + a, 0)$ con P^σ . Pertanto si ha $t^\sigma = [\lambda, \mu; \nu, \theta]$ se

$$(1 + a\gamma^{-1}s^{-1})^2 - s(\alpha + as^{-1})^2$$

è quadrato in F , $t^\sigma = [\lambda, -\mu; \nu, -\theta]$ altrimenti, ove

$$\lambda = [(\gamma^{-1} + a)(a\gamma^{-1}s^{-1} + 1) - (1 + a\alpha)(a + s\alpha)] \cdot [(a\gamma^{-1}s^{-1} + 1)^2 - s(as^{-1} + \alpha)^2]^{-1},$$

$$\mu = (\alpha\gamma^{-1} - 1)(a^2s^{-1} - 1)[(a\gamma^{-1}s^{-1} + 1)^2 - s(as^{-1} + \alpha)^2]^{-1},$$

$$\nu = \mu(a + s\alpha),$$

$$\theta = -\mu(a\gamma^{-1}s^{-1} + 1).$$

Al punto (γ) corrisponde, quindi, in σ , il punto improprio di tipo II (λ, μ) oppure il punto $(\lambda, -\mu)$. Poichè σ è completamente individuata dall'azione su un punto non fisso $((0, 1)$ nel nostro caso), se si desume l'immagine di (γ) a partire da $P' = (1, as^{-1}, -a, -1)$, ossia se si effettua uno scambio tra a e $-a$ (la condizione $1 - a^2s^{-1}$ non quadrato in F , non si altera), si deve riottenere lo stesso punto $(\gamma)^\sigma$ e, in particolare, deve sussistere una delle due eguaglianze (ottenute identificando μ' , ricavato da μ scambiando a con $-a$, con μ e con $-\mu$):

$$(-a\gamma^{-1}s^{-1} + 1)^2 - s(-as^{-1} + \alpha)^2 = (a\gamma^{-1}s^{-1} + 1)^2 - s(as^{-1} + \alpha)^2,$$

$$(-a\gamma^{-1}s^{-1} + 1)^2 - s(-as^{-1} + \alpha)^2 = -(a\gamma^{-1}s^{-1} + 1)^2 + s(as^{-1} + \alpha)^2.$$

Le precedenti identità forniscono, rispettivamente, $\alpha = \gamma^{-1}s^{-1}$ e $\alpha^2 = s^{-1}(a^2\gamma^{-2}s^{-2} + 1 - a^2s^{-1})$ che esprimono la dipendenza di α e di α^2 dalla scelta di γ in F (il campo F possiede almeno cinque elementi) e ciò è assurdo.

LEMMA 5. *Con (α) punto improprio di tipo I, sia σ una collineazione di π che fissa ogni punto della retta l , ogni retta per il punto (α) , e per la quale $(0, 1)^\sigma$ risulti punto improprio di tipo I. Sotto tali ipotesi, U^σ è punto improprio di tipo II.*

DIMOSTRAZIONE. Con $P = (1, 0, 0, 1)$, punto di π appartenente alla retta $[0, 1; 0, 0]$, si determini $P^\sigma = P(\alpha) \cap [0, 1; 0, 0]^\sigma$; perciò, tenuto conto che $P(\alpha) = \{\alpha; -\alpha, 1\}$ e $[0, 1; 0, 0]^\sigma = \{\gamma; 0, 0\}$ ove si è posto $(0, 1)^\sigma = (\gamma)$, $\gamma \in F$, $\gamma \neq 0$, $\gamma \neq \alpha$, è

$$P^\sigma = (-\alpha(\gamma - \alpha)^{-1}, -\alpha\gamma(\gamma - \alpha)^{-1}, (\gamma - \alpha)^{-1}, \gamma(\gamma - \alpha)^{-1}).$$

Se t è la retta per P di direzione U , poichè $t^\sigma = (t \cap l)P^\sigma$, con $t \cap l = (1, 0, 0, 0)$, si ha

$$t^\sigma = [\lambda, \mu; -\lambda, -\mu] \quad \text{oppure} \quad t^\sigma = [\lambda, -\mu; -\lambda, \mu]$$

ove $\lambda = \gamma^{-1}(1 - s\alpha\gamma)(s\alpha^2 - 1)^{-1}$, $\mu = \gamma^{-1}(\gamma - \alpha)(s\alpha^2 - 1)^{-1} \neq 0$. Pertanto $U^\sigma = (\lambda, \mu)$ oppure $U^\sigma = (\lambda, -\mu)$ e il lemma è provato.

LEMMA 6. *Sia σ una collineazione di π che fissa ogni punto della retta l , ogni retta per il punto improprio di tipo II, $(0, 1)$, e che trasforma U in un punto improprio di tipo II.*

Sotto tali condizioni esiste, al più, un solo punto improprio di tipo I che ha come immagine, in σ , un punto improprio di tipo I.

DIMOSTRAZIONE. Ragionando, per comodità, su σ^{-1} , si consideri, in π , la coppia punto-retta, incidentisi, P, r con $P = (1, 0, \lambda, \mu)$ ed $r = [\lambda, \mu; 0, 0]$, ove si è posto $U^\sigma = (\lambda, \mu)$, $\lambda, \mu \in F$, e $(\lambda, \mu) \neq (0, 1)$. $P^{\sigma^{-1}}$ è intersezione di $[0, 1; \lambda, \mu - 1]$, retta per P di direzione $(0, 1)$, con $r^{\sigma^{-1}} = \{\infty; 0, 0\}$; pertanto

$$P^{\sigma^{-1}} = (0, -\lambda s^{-1}, 0, \mu - 1) \quad \text{oppure} \quad P^{\sigma^{-1}} = (0, \lambda s^{-1}, 0, 1 - \mu).$$

Se (α) , $\alpha \in F$, è punto improprio di tipo I e se $t = \{\alpha; -\alpha, \mu - \lambda\alpha\}$ è la retta per P di direzione (α) , allora $t^{\sigma^{-1}} = (t \cap l)P^{\sigma^{-1}}$, con $t \cap l =$

$= (1, 0, \lambda - \mu\alpha^{-1}, 0)$; dopo ciò, se $t\sigma^{-1}$ è retta per il punto improprio di tipo I, (γ) , $\gamma \in F$, $\gamma \neq \alpha$, devono sussistere le identità $\gamma = \lambda s^{-1}$ e $\gamma(\lambda - \mu\alpha^{-1}) = 1 - \mu$ oppure $\gamma = -\lambda s^{-1}$ e $\gamma(\lambda - \mu\alpha^{-1}) = \mu - 1$: ovvie considerazioni permettono di concludere che, al più, un solo valore di α può soddisfare le precedenti condizioni.

I lemmi sino ad ora stabiliti, permettono di conseguire il primo dei risultati fondamentali, dal nostro punto di vista, per la risoluzione del problema postoci. Vale, infatti, il seguente:

LEMMA 7. *Ogni collineazione di π muta in sè la retta l ed il fascio di rette di direzione U .*

DIMOSTRAZIONE. Sia χ collineazione non identica di π ; cominciamo col provare che χ muta in sè la retta l .

Per assurdo, risulti $l^\chi \neq l$; poichè π è di classe II, $V^\chi = V$, l^χ è retta per V ed è possibile individuare una collineazione ψ di π appartenente al gruppo (1.5) tale che $(l^\chi)^\psi = \{0; 0, 1\}$ (cfr. Lemma 1 e Osservazione 1). Se σ è collineazione non identica di π , ottenuta ponendo, in (1.5), $a_{11} = a_{22} = a$ ($a \in F$, $a \neq 0, 1$), $a_{12} = a_{21} = c_1 = c_2 = 0$, si consideri $\sigma' = \psi^{-1}\chi^{-1}\sigma\chi\psi$; σ' è collineazione non identica di π che fissa ogni punto improprio e tale che $(O^{\chi\psi})^{\sigma'} = O^{\chi\psi}$ se $O = (0, 0, 0, 0)$.

Poichè π è (V, UV) -transitivo e $O^{\chi\psi} \in \{0; 0, 1\}$, esiste la traslazione τ tale che $(O^{\chi\psi})^\tau = (0, 0, 0, 1)$; ne deriva che $\tau^{-1}\sigma'\tau$ è collineazione non identica di π che fissa, con ogni punto improprio, il punto $(0, 0, 0, 1)$: tale eventualità è esclusa dal Lemma 3.

Per provare compiutamente il lemma, supponiamo che $U^\chi \neq U$ e sia ω la collineazione involutoria, non identica, di π definita precedentemente. $\omega' = \chi^{-1}\omega\chi$ è altresì collineazione involutoria, non identica, di π che fissa ogni punto della retta l e il punto improprio U^χ , necessariamente distinto da V , quindi, per il Lemma 2, ω' non muta in sè l'insieme delle rette (1.3).

Supponiamo dapprima che U^χ sia punto improprio di tipo I. Se $U^{\omega'}$ fosse punto improprio di tipo II, considerata una collineazione ψ del gruppo (1.5) che, fissando ogni punto improprio di tipo I, trasforma il punto improprio di tipo II, $(0, 1)$, nel punto $U^{\omega'}$ (Osservazione I), risulterebbe

$$(U^\chi)^{\psi\omega'^{-1}\psi^{-1}} = U^\chi, \quad P^{\psi\omega'^{-1}\psi^{-1}} = P \quad \text{se } P \in l,$$

e

$$(0, 1)^{\psi\omega'^{-1}\psi^{-1}} = U^{\omega'\omega'^{-1}\psi^{-1}} = U^{\psi^{-1}} = U.$$

Pertanto, il piano π dovrebbe ammettere una collineazione, $\psi\omega'^{-1}\psi^{-1}$, che fissa ogni punto della retta l , ogni retta per il punto improprio di tipo I, U^z , e tale che $(0, 1)^{\psi\omega'^{-1}\psi^{-1}} = U$, eventualità esclusa dal Lemma 4.

Nell'ipotesi, quindi, che U^z risulti punto improprio di tipo I, tale, altresì, deve essere $U^{\omega'}$. Poichè ω' , come già osservato, non muta in sè l'insieme dei punti impropri di tipo I, deve esistere un punto di tale insieme, L , cosicchè $L^{\omega'}$ sia punto improprio di tipo II. Se ϱ è una collineazione del gruppo (1.5) che trasforma $L^{\omega'}$ in $(0, 1)$, allora $\sigma = \varrho^{-1}\omega'^{-1}\varrho$ è collineazione di π che fissa i punti della retta l , ogni retta per il punto improprio di tipo I, U^z , e per la quale $(0, 1)^\sigma = L$. In tali circostanze, il Lemma 5 assicura che U^σ è punto improprio di tipo II: ciò è però escluso da quanto di già provato per ω' .

Pertanto, una eventuale collineazione χ di π che non fissi il punto U deve, necessariamente, mutarlo in un punto improprio di tipo II; dopo ciò, a meno di una collineazione del gruppo (1.5), si può supporre che $U^z = (0, 1)$.

Chiamata, ancora, con ω' la collineazione involutoria non identica di π , $\chi^{-1}\omega\chi$, che fissa ogni punto della retta l ed il punto improprio di tipo II, $(0, 1)$, deve risultare $U^{\omega'}$ punto improprio di tipo II perchè, per quanto provato, non esistono collineazioni di π che portano U in un punto improprio di tipo I. Per il Lemma 6 è possibile, allora, scegliere un punto improprio di tipo I, M , tale che $M^{\omega'}$ sia punto improprio di tipo II; se φ è una collineazione del gruppo (1.5) tale che $(0, 1)^\varphi = (U^z)^\varphi = M^{\omega'}$, $\chi\varphi\omega'^{-1}$ è collineazione di π che fa corrispondere ad U il punto improprio di tipo I, M , contro quanto già stabilito.

Il lemma è così dimostrato.

2. Il gruppo delle collineazioni di π .

Il piano (affine) di traslazione Π individuato dal quasicorpo di M. Hall $J = J(F, s) = J(+, \cdot)$ che è definito dal campo F e dal polinomio $x^2 - s \in F[x]$, irriducibile in $F[x]$, ha come punti (propri) $\mathbf{P} = \{(x, y) | x, y \in J\}$ e come rette (proprie) $\mathbf{R} = \{[c], [m, b] | c, m, b \in J\}$, l'incidenza essendo così definita:

$$[c] = \{(x, y) \in \mathbf{P} | x = c\}, \quad [m, b] = \{(x, y) \in \mathbf{P} | y = mx + b\}.$$

Se Π si estende ad un piano proiettivo, (m) indica il punto improprio della sua retta $[m, b]$, (∞) quello della sua retta $[c]$, mentre $[\infty]$ è la sua retta impropria descritta dai punti (impropri) così ottenuti.

$J(+)$ ha una struttura di F -spazio vettoriale (sinistro) con base $\{1, \xi\}$: se $x \in J$ è $x = x_1 + x_2\xi$ ($x_1, x_2 \in F$) e quella struttura definisce l'addizione; inoltre, se $x = x_1 + x_2\xi$, $y = y_1 + y_2\xi \in J$ è

$$xy = x_1y_1 + x_1y_2\xi, \quad \text{se } x_2 = 0, \\ xy = x_1y_1 - (x_1^2 - s)x_2^{-1}y_2 + (x_2y_1 - x_1y_2)\xi, \quad \text{se } x_2 \neq 0.$$

Risulta $F = \{x_1 + x_2\xi \in J | x_2 = 0\}$ e F è il nucleo di $J(+, \cdot)$; se $x = x_1 + x_2\xi \in J$, poniamo $\sigma(x) = x_2$.

Supponiamo che F, s verifichino l'ipotesi (1.1) del n. 1; è individuato un sistema cartesiano $K = K(F, s) = K(+, \circ)$ (cfr. G. Pannella [8]) ponendo $K(+) = J(+)$ in quanto gruppi additivi e definendo con $x = x_1 + x_2\xi$, $y = y_1 + y_2\xi \in K = J$

$$x \circ y = -xy \text{ se } x_2 \neq 0 \text{ e } [\sigma(xy)]^2 - s[\sigma(y)]^2 \text{ è non quadrato in } F, \\ x \circ y = xy \text{ altrimenti.}$$

Il piano (affine) π individuato da $K(+, \circ)$ ha, per definizione, i medesimi punti $\mathbf{P}$ e le medesime rette $\mathbf{R}$ di Π con l'incidenza così definita:

$$[c] = \{(x, y) \in \mathbf{P} | x = c\}, \quad [m, b] = \{(x, y) \in \mathbf{P} | y = m \circ x + b\};$$

per evitare ambiguità, denoteremo con $[c]'$, $[m, b]'$ le rette di π , $(\infty)'$ e $(m)'$ saranno i suoi punti impropri e $[\infty]'$ la sua retta impropria. Da notare che è, canonicamente, $[c] = [c]'$ se $c \in J = K$, $[m, b] = [m, b]'$ se $m \in F$, $(\infty) = (\infty)'$ e $(m) = (m)'$ se $m \in F$.

La coppia di piani Π, π è un modello della coppia di piani studiata al n. 1 e indicata con le medesime notazioni (F. Bartolozzi [1]); è facile verificare che le rette ed i punti di π messi in evidenza nel n. 1 si traducono, nell'attuale modello, così: $V = (\infty)' = (\infty)$, $U = (0)' = (0)$, $0 = (0, 0)$, $OU = [0, 0]' = [0, 0]$, $l = OV = [0]' = [0]$.

LEMMA 8. *Il piano π appartiene alla classe II di H. Lenz.*

DIMOSTRAZIONE. Poichè π risulta $(V, [\infty]')$ -transitivo e $K(+, \circ)$ è sistema cartesiano non distributivo nè a destra nè a sinistra, è suf-

ficiente escludere l'esistenza di un punto P e di una retta p di π , $P \notin p$, tali che π risulti (X, x) -transitivo se e solo se X è punto di p e la retta x congiunge P con X . Esista una tale coppia P, p ; tenuto conto che la collineazione ω introdotta al n. 1 fissa soltanto $[\infty]'$ ed l nel fascio di rette di direzione V , deve essere $p = l$, $P \in [\infty]'$ e $P \neq V$. Inoltre, poichè ω su $[\infty]'$ fissa i soli punti V e U , si ha $P = U$.

In conseguenza, π deve risultare (O, OU) -transitivo; perchè ciò accada è necessario che $K(+, \circ)$ verifichi la seguente condizione (cfr. T. V. S. Jagannathan [3]; p. 70): se a, b , con $a \neq b$, sono elementi non nulli di K (comunque) fissati, se x è elemento non nullo di K con $a \neq x \neq b$, se $m \in K$ è definito pretendendo $m \circ x = a - b$ e m', x' sono elementi di K individuati dalle condizioni $m \circ x' = -b$ e $m' \circ x = a$, il prodotto $m' \circ x'$ non deve dipendere da x .

Per provare che tale condizione non è verificata, si assuma $a = \xi$, $b = -1 + \xi$ e $x \in F$, $x \neq 0$; si ottiene $m = x^{-1}$, $m' = x^{-1}\xi$, $x' = x + (-x)\xi$ e risulta $m' \circ x' = \pm m'x' = \pm (-sx^2 + \xi)$, l'eventuale ambiguità di segno dipendendo dalla scelta di x in F .

Se $m' \circ x'$ fosse indipendente da x non vi sarebbe ambiguità di segno e dovrebbe essere $sx^2 = s$, ossia $x^2 = 1$ che contraddice $|F| > 3$.

OSSERVAZIONE II. Al n. 1 abbiamo senz'altro ammesso l'appartenenza di π alla classe II di H. Lenz; la dimostrazione del precedente lemma è indipendente dai risultati già ottenuti usufruendo di quella ipotesi.

LEMMA 9. Sia $C(\oplus, *)$ il sistema cartesiano (il quasicorpo) che fornisce coordinate a π (a Π) nel suo riferimento (O, U, V, E_1) , con $E_1 = (\lambda, 1)$ essendo $\lambda \in F$ e $\lambda \neq 0$. Il sistema cartesiano (il quasicorpo) $C(\oplus, *)$ è isomorfo al sistema cartesiano $K(F, s')$ (al quasicorpo $J(F, s')$) con $s' = \lambda^2 s$.

DIMOSTRAZIONE. È definita un'applicazione bigettiva $h: K \rightarrow C$ pretendendo che il punto $(0, a)$ di π , $a \in K(F, s)$, abbia coordinate $(0, h(a))$ nel riferimento (O, U, V, E_1) . Con $a, b \in K(F, s)$, il punto $(0, a + b)$ di π ha coordinate nel riferimento (O, U, V, E_1) , $(0, h(a) \oplus h(b))$: ne deriva $h(a + b) = h(a) \oplus h(b)$ e h è isomorfismo additivo.

Analogamente, per $(0, (\lambda^{-1}a) \circ (\lambda b))$ si trova $(0, h(a) * h(b))$ e risulta

$$h[(\lambda^{-1}a) \circ (\lambda b)] = h(a) * h(b).$$

Identificando a con $h(a)$, se $a \in K$, è $K(+) = C(\oplus)$ e il sistema car-

tesiano $C(\oplus, *)$ si identifica con $K(+, *)$ essendo $*$ così definita: se $a = a_1 + a_2\xi$, $b = b_1 + b_2\xi \in K$ è $a * b = a_1b_1 + a_1b_2\xi$ se $a_2 = 0$ mentre, se $a_2 \neq 0$, risulta

$$a * b = \pm [(a_1b_1 - (a_1^2 - s\lambda^2)a_2^{-1}b_2) + (a_2b_1 - a_1b_2)\xi]$$

ove si scelga il segno inferiore quando $(a_2b_1 - a_1b_2)^2 - s\lambda^2(b_2)^2$ è non quadrato in F , il segno superiore altrimenti. Ne deriva che $K(+, *)$ è il sistema cartesiano $K(F, s')$, con $s' = \lambda^2 s$, descritto dal campo F e dal suo elemento s' . Analoga dimostrazione vale con riferimento al piano II .

LEMMA 10. Sia $s \neq -1$; χ indichi una collineazione di π (di II , e fissi la retta l e la direzione U) per la quale si abbia $(0, 0)^x = (0, 0)$, $(1, 1)^x = (\lambda, 1)$ essendo $\lambda \in K = J$ e $\lambda \neq 0$. Con (x, y) punto (proprio) di π (di II) si ha $(x, y)^x = (\lambda \circ x^\varphi, y^\varphi)$ ($(x, y)^x = (\lambda x^e, y^e)$), λ è elemento di F e $\varphi: K \rightarrow K$ ($\varphi: J \rightarrow J$) è automorfismo additivo per il quale, con $a, b \in K$ ($a, b \in J$), risulta

$$(a \circ b)^\varphi = (\lambda^{-1} \circ a^\varphi) \circ (\lambda \circ b^\varphi), \quad ((ab)^e = (\lambda^{-1} a^e)(\lambda b^e)).$$

DIMOSTRAZIONE. Proviamo il lemma per il piano π .

Poichè π è $(V, [\infty]')$ -transitivo e appartiene alla classe II di H. Lenz (Lemma 8), χ è collineazione affine.

Inoltre, per il Lemma 7, χ fissa la retta l e la direzione U di π ; in conseguenza, per le ipotesi, deve essere $(x, y)^x = (x^\varphi, y^\varphi)$ se (x, y) è punto (proprio) di π , con $\varphi, \psi: K \rightarrow K$ opportune applicazioni bigettive, tali che $0^\varphi = 0^\psi = 0$, $1^\varphi = \lambda$ e $1^\psi = 1$.

Poichè $V^x = V$, se $(m)'$ è direzione di π ($m \in K$) è $(m)'^x = (m^\delta)'$ con $\delta: K \rightarrow K$ applicazione bigettiva per la quale $0^\delta = 0$.

Pertanto, se $(x, y) \in [m, 0]'$ ($x, y, m \in K$) deve aversi $(x^\varphi, y^\varphi) \in [m^\delta, 0]'$, ossia $(m \circ x)^\varphi = m^\delta \circ x^\varphi$ e, se $\alpha \in K$ per cui $\alpha^\varphi = 1$ ($\alpha \neq 0$), $m^\delta = (m \circ \alpha)^\varphi$.

In definitiva, si ottiene

$$(A) \quad (m \circ x)^\varphi = (m \circ \alpha)^\varphi \circ x^\varphi \quad \text{se } m, x \in K,$$

con α elemento non nullo di K definito dalla pretesa $\alpha^\varphi = 1$. Da (A), con $m = x = 1$, si ottiene $1 = 1^\varphi = \alpha^\varphi \circ \lambda$ che assicura α^φ , $\lambda \in K - F$ oppure α^φ , $\lambda \in F$. Proveremo che $\lambda \in F$ mostrando che l'ipotesi α^φ , $\lambda \in K - F$ conduce ad una contraddizione; in più, supporremo — s

quadrato in F , avvertendo che, se questo non è il caso, si perviene alla contraddizione in maniera analoga.

Con $-s$ quadrato in F e α^φ , $\lambda \in K - F$ è $(s \circ \lambda) \circ \lambda = 1$ che fornisce $\alpha^\varphi = s \circ \lambda$ tenuto conto che (A), come già osservato, dà $1 = \alpha^\varphi \circ \lambda$; ne deriva, $s \circ \alpha^\varphi = s \circ (s \circ \lambda)$.

Inoltre, da (A), con $m = \alpha$ e $x = 1$, si ha $\alpha^\varphi = (\alpha^2)^\varphi \circ \lambda$ e si trova $(\alpha^2)^\varphi = s$; mentre, con $x = \alpha \circ \alpha = \alpha^2$ e $m = 1$ si ottiene $s = (\alpha^2)^\varphi = \alpha^\varphi \circ (\alpha^2)^\varphi$ ed avendosi $\alpha^\varphi \circ \alpha^\varphi = s$ è $(\alpha^2)^\varphi = \alpha^\varphi$.

Ancora, avendo presente la (A) e quanto di già provato, risulta

$$(\alpha^2 \circ \alpha)^\varphi = (\alpha \circ \alpha^2)^\varphi = (\alpha^2)^\varphi \circ (\alpha^2)^\varphi = s \circ \alpha^\varphi$$

e

$$s = (\alpha^2)^\varphi = (\alpha^2 \circ \alpha)^\varphi \circ \lambda = (s \circ \alpha^\varphi) \circ \lambda = [s \circ (s \circ \lambda)] \circ \lambda = (s^2 \circ \lambda) \circ \lambda = s^{-1},$$

ossia $s^2 = 1$ che è la contraddizione dovuta. Da α^φ , $\lambda \in F$ e $\alpha^\varphi \circ \lambda = 1 = \alpha^\varphi \lambda$ segue $\alpha^\varphi = \lambda^{-1}$.

Da (A) con $m = 1$, tenuto conto che $\alpha^\varphi = \lambda^{-1} \in F$ si ottiene $x^\varphi = \lambda \circ x^\varphi$, quindi $(x, y)^z = (\lambda \circ x^\varphi, y^\varphi)$.

Essendo $(m \circ x)^\varphi = m^\varphi \circ (\lambda \circ x^\varphi)$, $m, x \in K$, con $x = 1$ è $m^\varphi = m^\varphi \circ \lambda = \lambda \circ m^\varphi$ poichè $\lambda \in F$: se ne deduce $m^\varphi = \lambda^{-1} \circ m^\varphi$ e risulta $(a \circ b)^\varphi = (\lambda^{-1} \circ a^\varphi) \circ (\lambda \circ b^\varphi)$ se $a, b \in K$.

Da $(a, a + b) \in [1, b]'$, se $a, b \in K$, segue $(\lambda \circ a^\varphi, (a + b)^\varphi) \in [\lambda^{-1}, b^\varphi]'$, $(a + b)^\varphi = \lambda^{-1} \circ (\lambda \circ a^\varphi) + b^\varphi$ e φ , poichè $\lambda \in F$, è automorfismo additivo.

OSSERVAZIONE III. Il precedente lemma si può invertire, ossia, come facilmente si verifica, se $\lambda \in F$, $\lambda \neq 0$ e se $\varphi: K \rightarrow K$ ($\varrho: J \rightarrow J$) è automorfismo additivo per il quale, con $a, b \in K$ ($a, b \in J$), risulta

$$(a \circ b)^\varphi = (\lambda^{-1} \circ a^\varphi) \circ (\lambda \circ b^\varphi), \quad ((ab)^\varphi = (\lambda^{-1} a^\varphi)(\lambda b^\varphi)),$$

esiste una collineazione χ di π (di Π , e χ fissa la retta l e la direzione U) per la quale si ha $(0, 0)^z = (0, 0)$, $(1, 1)^z = (\lambda, 1)$ e la cui azione sui punti propri di π (di Π) è così definita: $(x, y)^z = (\lambda \circ x^\varphi, y^\varphi)$ se (x, y) è punto proprio di π ($(x, y)^z = (\lambda x^\varphi, y^\varphi)$ se (x, y) è punto proprio di Π).

LEMMA 11. Siano $f: K = J \rightarrow K = J$ un automorfismo additivo (per definizione, $K(+) = J(+)$) e $\lambda \in F$, $\lambda \neq 0$. Per l'applicazione f sono equivalenti le affermazioni:

i) se $x, y \in K(+, \circ)$ risulta $(x \circ y)^f = (\lambda^{-1} \circ x^f) \circ (\lambda \circ y^f)$;

ii) se $x, y \in J(+, \cdot)$ risulta $(xy)^f = (\lambda^{-1} x^f)(\lambda y^f)$.

DIMOSTRAZIONE. Ci limitiamo a stabilire che da i) segue ii). Se $a \in K$ è $a \circ x = x \circ a$ per ogni $x \in K$, se (e solo se) $a \in F$; ne deriva che la i), con $x = a \in F$, fornisce $(\lambda^{-1} \circ a') \circ (\lambda \circ y') = (\lambda^{-1} \circ y') \circ (\lambda \circ a')$ per ogni $y \in K$, e ciò comporta, come si verifica facilmente, $a' \in F$ e, quindi, $(a \circ y)' = a' y'$. Pertanto, con $x = x_1 + x_2 \xi \in K$ e $\xi' = c_1 + c_2 \xi$ ($c_1, c_2 \in F$) è $x' = x'_1 + c_1 x'_2 + c_2 x'_2 \xi$: poichè f è surgettiva, è $c_2 \neq 0$, $c_2 F' = F$, $F' = F$ e $(K - F)' = K - F$. Se $x \in K - F$ è $x \circ x = s$ se $-s$ è quadrato in F , $x \circ x = -s$ altrimenti. Da i) con $x = y \in K - F$ si ha $(x \circ x)' = (\lambda^{-1} \circ x') \circ (\lambda \circ x') = (z \circ z) \circ \lambda^2$ se $z = \lambda^{-1} \circ x'$, quindi $z \in K - F$; in conseguenza, risulta $s' = s \lambda^2$.

Se, infine, $x = x_1 + x_2 \xi$, $y = y_1 + y_2 \xi$ sono elementi di K , si ha

$$\begin{aligned} \{\sigma[(\lambda^{-1} \circ x') \circ (\lambda \circ y')]\}^2 - s\{\sigma[(\lambda \circ y')]\}^2 &= c_2^2[\sigma(xy)']^2 - c_2^2 s \lambda^2 \{\sigma(y)\}^2 = \\ &= c_2^2 \{\sigma(xy)\}^2 - c_2^2 s' \{\sigma(y)\}^2 = c_2^2 \{\sigma(xy)^2 - s[\sigma(y)]^2\}' \end{aligned}$$

che assicura che gli elementi $\{\sigma[(\lambda^{-1} \circ x') \circ (\lambda \circ y')]\}^2 - s\{\sigma[(\lambda \circ y')]\}^2$ e $[\sigma(xy)]^2 - s[\sigma(y)]^2$ di F sono contemporaneamente (zero o) quadrati in F , oppure non quadrati. Tale osservazione permette ovviamente di concludere che l'ipotesi i) implica l'affermazione ii).

LEMMA 12. Sia $\mathbf{P} = \{(x, y) | x, y \in J\}$ l'insieme dei punti propri del piano di traslazione Π che, poichè $K = J$, coincide con $\{(x, y) | x, y \in K\}$, insieme dei punti propri del piano π . Se $g: \mathbf{P} \rightarrow \mathbf{P}$ è applicazione bigettiva, sono equivalenti le seguenti affermazioni:

j) esiste una (unica) collineazione χ del piano Π per la quale si ha $(x, y)^x = (x, y)^g$, se $(x, y) \in \mathbf{P}$, $U^x = U$ e $l^x = l$;

jj) esiste una (unica) collineazione χ del piano π per la quale si ha $(x, y)^x = (x, y)^g$ se $(x, y) \in \mathbf{P}$.

DIMOSTRAZIONE. Per il Lemma 9, non è restrittivo supporre che $J = J(F, s)$ ($K = K(F, s)$) sia definito assumendo $s \neq -1$.

Inoltre, per il Lemma 7, nella ipotesi jj) deve risultare $l^x = l$, $U^x = U$.

Al n. 1, Lemma 1, abbiamo osservato che le trasformazioni (1.5) definiscono un gruppo di applicazioni $f: \mathbf{P} \rightarrow \mathbf{P}$ ciascuna delle quali si estende a una collineazione di π ; è facile verificare (se si vuole, consultando [6]) che ogni tale f si estende anche ad una collineazione di Π la quale fissa la retta l ed il punto U . Ne deriva che non è restrittivo sostituire g con l'applicazione da essa ottenuta componendola con

opportune applicazioni f del gruppo (1.5). L'appartenenza dell'applicazione $(x, y) \rightarrow (x, y + a)$ ($x, y \in K$, a in K comunque fissato) al gruppo (1.5) garantisce che si può supporre $(0, 0)^e = (0, 0)$. In più, il gruppo (1.5) contiene un sottogruppo che fissa $(0, 0)$ ed è transitivo sui punti (propri) di l diversi da $(0, 0)$; possiamo, cioè, supporre $(0, 1)^e = (0, 1)$.

Nell'ipotesi j) (nell'ipotesi jj)) deve risultare $(1, 1)^e = (\lambda, 1)$ con $\lambda \in K = J$, $\lambda \neq 0$ e si deve avere, per il Lemma 10, $\lambda \in F$ e

$$(x, y)^e = (\lambda x^e, y^e), \quad ((x, y)^e = (\lambda \circ x^e, y^e)) \quad \text{se } (x, y) \in P,$$

essendo $\varrho: J \rightarrow J$ ($\varphi: K \rightarrow K$) un automorfismo additivo ed avendosi $(xy)^e = (\lambda^{-1}x^e)(\lambda y^e)$ se $x, y \in J$ ($(x \circ y)^e = (\lambda^{-1} \circ x^e) \circ (\lambda \circ y^e)$ se $x, y \in K$).

Per il Lemma 11, deve essere $(x \circ y)^e = (\lambda^{-1} \circ x^e) \circ (\lambda \circ y^e)$ se $x, y \in K = J$ ($(xy)^e = (\lambda^{-1}x^e)(\lambda y^e)$ se $x, y \in J = K$) e l'Osservazione III assicura l'esistenza di una (unica) collineazione di π (di II) la cui azione sui punti propri di π (di II) è definita ponendo $(x, y) \rightarrow (\lambda \circ x^e, y^e)$ se $(x, y) \in P$ ($(x, y) \rightarrow (\lambda x^e, y^e)$ se $(x, y) \in P$). Tale applicazione da P a P coincide con g , poichè, essendo $\lambda \in F$, è $\lambda \circ x^e = \lambda x^e$ se $x \in K$ ($\lambda x^e = \lambda \circ x^e$ se $x \in J$). Il lemma è, così, dimostrato.

Il piano II , definito dal quasicorpo di Hall $J(F, s)$, possiede (come subito si verifica) una sola collineazione non identica ω che è a quadrato identico, che fissa ogni punto della retta l ed il punto U ; l'azione di ω sui punti propri di II è così definita: $(x, y)^\omega = (-x, y)$ se $x, y \in J$. Premesso ciò, sussiste il

TEOREMA. *Siano II il piano di traslazione definito dal quasicorpo di Hall $J(F, s)$, π il piano individuato dal sistema cartesiano $K(F, s)$, $\Omega(II)$, risp. $\Omega(\pi)$, il gruppo delle collineazioni di II , risp. π .*

Esiste un monomorfismo (di gruppi) $\Omega(\pi) \rightarrow \Omega(II)$ e l'immagine di $\Omega(\pi)$ in tale monomorfismo è il centralizzante di ω in $\Omega(II)$.

DIMOSTRAZIONE. Assumendo per π , II il modello fissato all'inizio del n. 2, indichiamo con P l'insieme dei punti propri di π che (come insieme) coincide con l'insieme dei punti propri di II .

Sia $\alpha \in \Omega(\pi)$; poichè π appartiene alla classe II di H. Lenz (Lemma 8) e risulta $(V, [\infty]')$ -transitivo, α definisce un'applicazione $\alpha: P \rightarrow P$, ponendo $(x, y)^\alpha = (x, y)^\alpha$ se $(x, y) \in P$, e α è applicazione bigettiva.

Per il Lemma 12 è determinata una collineazione α' di II , $\alpha' \in \Omega(II)$, e risulta $l^{\alpha'} = l$ e $U^{\alpha'} = U$. Se $\alpha, \beta \in \Omega(\pi)$ si ha $(\alpha\beta)' = \alpha'\beta'$

e, se $\alpha \neq \beta$, deve essere $\alpha' \neq \beta'$, poichè l'azione di una collineazione sui punti propri di un piano individua la collineazione: ossia, $\alpha \rightarrow \alpha'$, se $\alpha \in \Omega(\pi)$, definisce un monomorfismo (di gruppi) $\Omega(\pi) \rightarrow \Omega(\Pi)$. Risulta $\alpha'\omega = \omega\alpha'$: infatti, essendo $\bar{U}^{\alpha'} = U$, $l^{\alpha'} = l$, $\alpha'\omega\alpha'^{-1}$ è collineazione di Π non identica che fissa il punto U , ogni punto della retta l e il cui quadrato è la collineazione identica di Π ; per quanto osservato immediatamente prima dell'enunciato del teorema, deve essere

$$\alpha'\omega\alpha'^{-1} = \omega.$$

Per concludere, sia $\chi \in \Omega(\Pi)$ e si abbia $\chi\omega = \omega\chi$. Poichè Π appartiene alla classe IV di H. Lenz ed è $([\infty], [\infty])$ -transitivo, χ definisce, con la sua azione su $\mathbb{P}$, una applicazione bigettiva $g: \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}$. Se P è punto proprio di l è $(P^\chi)^\omega = (P^\omega)^\chi = P^\chi$: ciò comporta $l^\chi = l$, $V^\chi = V$. Inoltre, $(U^\chi)^\omega = (U^\omega)^\chi = U^\chi$, $U^\chi \neq V$, $U^\chi \in [\infty]$ forniscono $U^\chi = U$. Per il Lemma 12, esiste $\alpha \in \Omega(\pi)$ la cui azione sopra i punti $\mathbb{P}$ coincide con quella di g , ed è individuata $\alpha' \in \Omega(\Pi)$, immagine di α nel monomorfismo $\Omega(\pi) \rightarrow \Omega(\Pi)$ già definito, risultando $P^{\alpha'} = P^\omega = P^\chi$ se $P \in \mathbb{P}$; ciò significa $\alpha' = \chi$ e il teorema è compiutamente dimostrato.

OSSERVAZIONE IV. Il precedente teorema, risp. il Lemma 12, consente di scrivere il gruppo delle collineazioni del piano π ; perciò, è sufficiente considerare il gruppo $\Omega(\Pi)$ delle collineazioni del piano di M. Hall definito dal quasicorpo $J(F, s)$ (il gruppo $\Omega(\Pi)$ è determinato in [6]) e calcolare il centralizzante di ω in $\Omega(\Pi)$, risp. gli elementi di $\Omega(\Pi)$ che fissano la retta l e il punto U di Π .

BIBLIOGRAFIA

- [1] F. BARTOLOZZI, *Sopra una classe di piani finiti (R, r) -transitivi*, Atti Accad. Naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. fis., mat. e nat., VIII, **39** (1965), pp. 245-248.
- [2] D. R. HUGHES, *Collineation groups of non-desarguesian planes, I*, Amer. J. Math., **81** (1959), pp. 921-938.
- [3] T. V. S. JAGANNATHAN, *Ordered projective planes*, J. Ind. Math. Soc., **36** (1972), pp. 65-78.
- [4] H. LENZ, *Kleiner Desarguesscher Satz und Dualität in projektiven Ebenen*, Jber. Deutsche Math. Ver., **57** (1954), pp. 20-31.

- [5] T. G. OSTROM, *Finite planes with a single (p, L) -transitivity*, Arch. Math., **15** (1964), pp. 378-384.
- [6] G. PANELLA, *Le collineazioni nei piani di Marshall Hall*, Riv. Mat. Univ. Parma, (2), **1** (1960), pp. 171-184.
- [7] G. PANELLA, *Osservazioni sulla costruzione dei piani di Hughes*, Rend. Mat. e App., **23** (1964), pp. 331-350.
- [8] G. PANELLA, *Una classe di sistemi cartesiani*, Atti Accad. Naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. fis. mat. e nat., VIII, **38** (1965), pp. 480-485.
- [9] G. PICKERT, *Projektive Ebenen*, Springer, Berlin - Heidelberg - New York (1975).
- [10] G. PICKERT, *Die cartesischen Gruppen der Ostrom-Rosati-Ebenen*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, **30** (1967), pp. 106-117.
- [11] L. A. ROSATI, *Su una nuova classe di piani grafici*, Ricerche Mat., **13** (1964), pp. 39-55.
- [12] B. SEGRE, *Lectures on Modern Geometry* (con appendice di L. Lombardo-Radice), Cremonese, Roma (1961).
- [13] H. ZASSENHAUS, *Über endliche Fastkörper*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, **11** (1935), pp. 187-220.

Manoscritto pervenuto in redazione il 16 dicembre 1977.