RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

TOMASO MILLEVOI
ANTONIO VELUSCEK

Sulla proprietà di estensione in anelli noetheriani

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 60 (1978), p. 23-31

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1978__60__23_0>

Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, Vol. 60 (1978)

Sulla proprietà di estensione in anelli noetheriani.

Tomaso Millevoi - Antonio Veluscek (*)

Summary - A definition of the extension property (P.E.) is given, which coincides with that given by S. Baldassarri Ghezzo and C. Margaglio in the case of an integral domain. Conditions are then found for a ring to satisfy P.E.; among the most significant are the following, all of which are equivalent:

a) $\omega \in T$, the total ring of quotients of A, $h(A:\omega) > 1 \Rightarrow \omega \in A$.

b) Every principal ideal in A of grade 1 is pure.

c) For every ideal (a, b) free outside of an ideal of height > 1 one has $dh(a, b) < 2$.

Si dice che uno spazio anellato soddisfa alla proprietà di estensione (P.E.) se ogni sua sezione σ, definita per lo meno fuori da un chiuso di codimensione $\geqslant 2$, è restrizione di una sezione globale. Tale definizione è dovuta a M. Baldassarri (cfr. [1]).

C. Margaglio e S. Baldassarri Ghezzo tradussero in termini algebrici la proprietà di estensione per spazi anellati irriducibili, riferendosi all'anello delle sezioni globali, che in tal caso risulta un dominio di integrità, e trovarono inoltre condizioni affinchè un dominio di integrità noetheriano soddisfi alla P.E. (cfr. [6], pag. 391 e Prop. 2, pag. 392, e [2], pag. 233 e Teor. 3, pag. 245).

Facendo seguito ad un precedente lavoro (cfr. [3]) si studiano ora tali condizioni in anelli noetheriani anche non integri.

(*) Indirizzo degli AA.: Seminario Matematico, Università, 35100 Padova.
Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.S.A.G.A. del C.N.R.

Gli anelli che considereremo saranno sempre commutativi, con unità e noetheriani.

Sia $\mathfrak{P}$ un ideale primo di un anello A. Sia $S\mathfrak{P} = C(\mathfrak{P} \cup Z(A)) = C(\mathfrak{P}) \cap C(Z(A))$ il complementare in A dell'insieme formato dagli elementi di $\mathfrak{P}$ e dai divisori dello zero. $S\mathfrak{P}$ risulta chiuso rispetto alla moltiplicazione, e l'anello dei quozienti $A_{S\mathfrak{P}}$ risulta un sottoanello di T, anello totale dei quozienti di A.

Estendendo ad anelli non integri la definizione di S. Baldassarri Ghezzo (cfr. [2], pag. 233) diremo che

DEF. 1. *Un anello A soddisfa alla* P.E. *se, per ogni ideale $\mathfrak{J}$ di A, tale che $h(\mathfrak{J}) > 1$, nell'anello totale dei quozienti di A risulta $\bigcap_{\mathfrak{P} \not\supset \mathfrak{J}} A_{S\mathfrak{P}} = A$, l'intersezione essendo presa sopra tutti gli ideali primi $\mathfrak{P}$ di A che non contengono $\mathfrak{J}$.*

LEMMA 2 (cfr. [5], Teor. 53, pag. 34). *$A = \bigcap A_{S\mathfrak{P}}$ se $\mathfrak{P}$ descrive l'insieme dei primi massimali associati agli ideali principali generati dagli elementi regolari di A.*

DIM. Basterà verificare che $A \supseteq \bigcap A_{S\mathfrak{P}}$, l'inclusione opposta essendo ovvia. Sia allora $\omega \in \bigcap A_{S\mathfrak{P}}$ e sia b/a una rappresentazione di ω in T. Se $(a):b = A$, $\omega \in A$; supponiamo allora per assurdo che $(a):b \neq A$, cioè $b \notin (a)$; allora $(a):b$ sarebbe contenuto in uno (almeno) dei punti associati all'ideale (a), e dunque in uno $\mathfrak{P}$ dei primi massimali associati ad (a). Ma $\omega \in A_{S\mathfrak{P}}$, dunque $b/a = c/s$ con $s \notin \mathfrak{P}$; quindi $sb = ac$, dunque $s \in (a):b \subseteq \mathfrak{P}$ assurdo.

COROLLARIO 3. *Se in A ogni ideale principale di grado* 1 *è puro, e $\mathfrak{B}$ è un ideale di altezza > 1, risulta $A = \bigcap_{\mathfrak{P} \not\supset \mathfrak{B}} A_{S\mathfrak{P}}$.*

In tal caso, infatti, ogni primo $\mathfrak{P}$ associato ad un ideale principale generato da un elemento regolare ha altezza $= 1$ e dunque non contiene $\mathfrak{B}$.

DEF. 4. Sia T l'anello totale dei quozienti di A. Un elemento $\omega \in T$ si dice *ammissibile su A* quando l'ideale $A : \omega$ ha altezza > 1 (cfr. [6], pag. 391).

TEOREMA 5. *Un anello A soddisfa alla* P.E. *se e solo se ogni elemento di T ammissibile su A appartiene ad A.*

DIM. La condizione è sufficiente, infatti sia $\mathfrak{J}$ un ideale di A con $h(\mathfrak{J}) > 1$, se $\omega \in \bigcap_{\mathfrak{P} \not\supset \mathfrak{J}} A_{S\mathfrak{P}} \subseteq T$, allora, fissato comunque un primo

$\mathfrak{P} \not\supset \mathfrak{J}$, esiste un elemento $s \notin \mathfrak{P} \cup Z(A)$ tale che $\omega = x/s$, quindi $s \in A:\omega$, e dunque $A:\omega \not\subset \mathfrak{P}$; vale cioè la seguente implicazione

$$\mathfrak{P} \not\supset \mathfrak{J} \Rightarrow \mathfrak{P} \not\supset A:\omega\,, \qquad \text{da cui} \qquad h(A:\omega) \geqslant h(\mathfrak{J}) > 1\,,$$

e quindi ω ammissibile su A, da cui, per l'ipotesi, $\omega \in A$. Dunque $\bigcap_{\mathfrak{P} \not\supset \mathfrak{J}} A_{S\mathfrak{P}} \subseteq A$; l'inclusione inversa essendo ovvia, si ha la tesi.

La condizione è necessaria, infatti sia $\omega \in T$, e sia b/a una rappresentazione di ω in T; allora $a \in A:\omega$, $a \notin Z(A)$, per cui $A:\omega \not\subseteq Z(A)$; fissato comunque un primo $\mathfrak{P} \not\supset A:\omega$ esiste allora un elemento $s \in A:\omega$ ed $s \notin \mathfrak{P} \cup Z(A)$, cioè $s \in S\mathfrak{P}$; ora $s\omega = x$ e dunque $\omega = x/s \in A_{S\mathfrak{P}}$. Quindi

$$\omega \in T \Rightarrow \omega \in \bigcap_{\mathfrak{P} \not\supset A:\omega} A_{S\mathfrak{P}}\,.$$

Se ω è ammissibile, $h(A:\omega) > 1$ da cui la tesi, atteso che in tal caso per ipotesi $\bigcap_{\mathfrak{P} \not\supset A:\omega} A_{S\mathfrak{P}} = A$.

Osservazione 6. L'enunciato del teorema precedente è una generalizzazione della definizione della P.E. data da Margaglio (cfr. [6], pag. 391) e coincide con questa nel caso integro.

Lemma 7. *Se b/a è una rappresentazione di $\omega \in T$, allora $A:\omega = (a):b$.*

Dim. Banale.

Osservazione 8. Considerato un elemento $\omega \in T$, risulta $\omega \in A$ se e solo se $A:\omega = A$.

In accordo con la Def. 4 ed il Teorema 5 porremo perciò, per definizione, $h(A) > 1$.

Lemma 9. *Sia A un anello locale, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ una A-successione. Allora ogni ideale primo associato ad uno degli ideali generati da un sottoinsieme di $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ è contenuto nella unione dei primi associati a $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.*

In particolare, se a è un elemento regolare tutti i divisori dello zero sono contenuti nell'unione dei primi associati all'ideale (a).

Dim. È noto che in un anello locale A ogni permutazione di una A-successione è una A-successione (cfr. [10], Lemma 2, pag. 395);

consideriamo allora un primo $\mathfrak{P}$ associato all'ideale $(a_1, a_2, \ldots, a_{k-1})$ $(k \leqslant n)$ e verifichiamo che esso è contenuto nell'unione dei primi associati a $(a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}, a_k, \ldots, a_n)$: se ciò non fosse esisterebbe $p \in \mathfrak{P}$ con $a_1, \ldots, a_{k-1}, a_k, \ldots, a_n, p$ A-successione e, per l'osservazione precedente, $a_1, \ldots, a_{k-1}, p, a_k, \ldots, a_n$ A-successione, il che è assurdo. Dalla permutabilità delle A-successioni segue l'asserto.

LEMMA 10. *Se* $\mathfrak{J}$ *è un ideale proprio proiettivo di* A, $h(\mathfrak{J}) = \mathrm{gr}\, \mathfrak{J} = 1$.

DIM. $\mathfrak{J}$ non è formato tutto da divisori dello zero poichè, altrimenti, $\mathfrak{J} \subseteq \mathfrak{P}$, con $\mathfrak{P}$ associato allo zero, ma allora $\mathfrak{J}_{\mathfrak{P}}$ sarebbe formato tutto da divisori dello zero e non sarebbe dunque $A_{\mathfrak{P}}$-libero, assurdo; dunque $gr\, \mathfrak{J} \geqslant 1$.

D'altra parte $h(\mathfrak{J}) = \min h(\mathfrak{J}_{\mathfrak{P}})$ per $\mathfrak{P} \supseteq \mathfrak{J}$, ma se $\mathfrak{P} \supseteq \mathfrak{J}$, $\mathfrak{J}_{\mathfrak{P}}$ è proprio, isomorfo ad $A_{\mathfrak{P}}$, dunque principale generato da un elemento non divisore dello zero, per cui (hauptidealsatz) $h(\mathfrak{J}_{\mathfrak{P}}) = 1$; per quanto visto sopra, $1 \leqslant \mathrm{gr}\, \mathfrak{J} \leqslant h(\mathfrak{J}) = 1$, da cui la tesi.

DEF. 11. Siano $\mathfrak{J}$, $\mathfrak{B}$ ideali di un anello A. Diremo che $\mathfrak{J}$ è *localmente libero fuori di* $\mathfrak{B}$ quando, per ogni ideale primo $\mathfrak{P} \not\supset \mathfrak{B}$, risulta

$$\mathfrak{J}_{S\mathfrak{P}} \simeq A_{S\mathfrak{P}} \,.$$

LEMMA 12. *Ogni ideale* $\mathfrak{J}$ *di grado* > 0 *è localmente libero fuori di* $\mathfrak{J}$.

DIM. Infatti $\mathfrak{P} \not\supset \mathfrak{J}$ e $\mathfrak{J} \not\subset Z(A) \Rightarrow \mathfrak{J} \not\subset \mathfrak{P} \cup Z(A) \Rightarrow \mathfrak{J}_{S\mathfrak{P}} = A_{S\mathfrak{P}}$.

DEF. 13. Diremo che un ideale $\mathfrak{J}$ è *libero fuori di* $\mathfrak{B}$ quando esiste un isomorfismo

$$\bigcap_{\mathfrak{P} \not\supset \mathfrak{B}} A_{S\mathfrak{P}} \simeq \bigcap_{\mathfrak{P} \not\supset \mathfrak{B}} \mathfrak{J}_{S\mathfrak{P}}$$

il quale per ogni $\mathfrak{P} \not\supset \mathfrak{B}$ si estende ad un isomorfismo tra $A_{S\mathfrak{P}}$ e $\mathfrak{J}_{S\mathfrak{P}}$.

(Sicchè libero fuori di $\mathfrak{B} \Rightarrow$ localmente libero fuori di $\mathfrak{B}$).

LEMMA 14. *Ogni ideale* $\mathfrak{J}$ *di grado maggiore di zero è libero fuori di* $\mathfrak{J}$.

DIM. Per il Lemma 12 come isomorfismo si può scegliere l'identità.

LEMMA 15. *Se* $\mathfrak{J}$ *è localmente libero fuori di* $\mathfrak{B}$, *ed esiste un primo* $\mathfrak{P} \not\supset \mathfrak{B}$, *allora* $\operatorname{gr} \mathfrak{J} > 0$.

DIM. Se ciò non fosse $\mathfrak{J} \subseteq Z(A) \Rightarrow \mathfrak{J}_{S\mathfrak{P}} \subseteq Z(A_{S\mathfrak{P}}) \Rightarrow \mathfrak{J}_{S\mathfrak{P}}$ non isomorfo ad $A_{S\mathfrak{P}}$, assurdo.

COROLLARIO 16. *Se* $\mathfrak{J}$ *è libero fuori di* $\mathfrak{B}$, *con* $h(\mathfrak{B}) > 1$, *risulta* $\operatorname{gr} \mathfrak{J} \geqslant 1$.

LEMMA 17. *Siano* $\mathfrak{J}$ *e* $\mathfrak{B}$ *ideali di* A *ed* x *un elemento non divisore dello zero. L'ideale* $x\mathfrak{J}$ *è libero fuori di* $\mathfrak{B}$ *se e solo se lo è* $\mathfrak{J}$.

DIM. La moltiplicazione per x nell'anello totale dei quozienti T subordina un isomorfismo tra $\mathfrak{J}_{S\mathfrak{P}}$ e $(x\mathfrak{J})_{S\mathfrak{P}}$ e tra $\bigcap\limits_{\mathfrak{P}\not\supset\mathfrak{B}} \mathfrak{J}_{S\mathfrak{P}}$ e $\bigcap\limits_{\mathfrak{P}\not\supset\mathfrak{B}} (x\mathfrak{J})_{S\mathfrak{P}}$, da cui la tesi.

TEOREMA 18. *Sia* A *un anello commutativo, noetheriano, con unità,* T *il suo anello totale dei quozienti. Le seguenti condizioni sono allora equivalenti*:

i) A *soddisfa alla* P.E.

ii) *Se* $\omega \in T$ *è ammissibile su* A, $\omega \in A$.

iii) *Ogni ideale principale di* A *di grado* 1 *è puro.*

iv) *Ogni ideale di* A *generato da due elementi e libero fuori da un ideale di altezza* > 1 *è del tipo* $c(d, e)$, *con* c, d *non divisori dello zero e* $(d):e = (d)$.

v) *Ogni ideale di* A *generato da due elementi e libero fuori da un ideale di altezza* > 1 *ha dimensione omologica* < 2.

vi) *Per ogni ideale* (a, b) *libero fuori da un ideale di altezza* > 1, *con* a *non divisore dello zero, l'ideale* $(a):b$ *è proiettivo.*

DIM. Abbiamo gia visto (Teorema 5) l'equivalenza delle due prime condizioni. Perfezioneremo la dimostrazione provando che ogni condizione implica la successiva e che l'ultima implica la seconda.

ii) $\Rightarrow$ iii) Sia (a) un ideale proprio di A, con a non divisore dello zero; sia $(a) = \mathfrak{Q}_1 \cap \mathfrak{Q}_2 \cap \ldots \cap \mathfrak{Q}_n$ una rappresentazione normale di (a) come intersezione di ideali primari; indichiamo con $\mathfrak{P}_i$ il radicale di $\mathfrak{Q}_i$. Se (a) non fosse puro potremmo scegliere b appartenente a tutti i primari relativi ai primi minimali di (a), quelli di altezza $= 1$ (hauptidealsatz) e $b \notin \mathfrak{Q}_j$, con $\mathfrak{P}_j$ non minimale, cioè $h(\mathfrak{P}_j) > 1$. Risulterebbe allora $h((a):b) > 1$, $\omega = b/a$ ammissibile, $(a):b \subseteq \mathfrak{Q}_j:b \subseteq \mathfrak{P}_j \neq A$ per cui $\omega \notin A$ (Oss. 8), assurdo.

iii) $\Rightarrow$iv) Sia $\mathfrak{J} = (a', b)$ libero fuori di $\mathfrak{B}$, con $h(\mathfrak{B}) > 1$; allora (Corollario 16) $\mathfrak{J}$ contiene un elemento non divisore dello zero $a = a' + rb$ (cfr. [7], Lemma 1, pag. 357), e risulta $\mathfrak{J} = (a, b)$.

Essendo A noetheriano, possiamo porre $a = cd$, $b = ce$ con d, e privi di fattori non unitari comuni; c e d risultano non divisori de lo zero. Se $(d, e) = A$, allora $(d):e = (d)$; sia allora (d, e) ideale proprio di A; risulta

$$\bigcap_{\mathfrak{P} \not\supset \mathfrak{B}} (d, e)_{S\mathfrak{P}} \subseteq \bigcap_{\mathfrak{P} \not\supset \mathfrak{B}} A_{S\mathfrak{P}} = (\text{Coroll. } 3)\ A \ ,$$

ed essendo (Lemma 17) (d, e) libero fuori di $\mathfrak{B}$,

$$\bigcap_{\mathfrak{P} \not\supset \mathfrak{B}} (d, e)_{S\mathfrak{P}} \simeq A \ .$$

Dunque $\bigcap_{\mathfrak{P} \not\supset \mathfrak{B}} (d, e)_{S\mathfrak{P}} = uA$; u d'altra parte deve essere unitario poichè d ed e non hanno fattori non unitari comuni e dunque $\bigcap_{\mathfrak{P} \not\supset \mathfrak{B}} (d, e)_{S\mathfrak{P}} = A$. Ne segue che $(d):e = (d)$, poichè altrimenti e apparterrebbe ad uno, $\mathfrak{N}$, dei primi associati a (d) che, in base all'ipotesi, ha altezza $= 1$, e risulterebbe $(d, e) \subseteq \mathfrak{N}$, $(d, e)_{S\mathfrak{N}} \not\supset A$, e dunque, poichè $h(\mathfrak{N}) = 1$, $\mathfrak{N} \not\supset \mathfrak{B}$, $\bigcap_{\mathfrak{P} \not\supset \mathfrak{B}} (d, e)_{S\mathfrak{P}} \neq A$, assurdo.

iv) $\Rightarrow$v) Un siffatto ideale $\mathfrak{J}$ per la iv) è del tipo $c(d, e) \simeq (d, e)$. Se $(d, e) = A$, dh $\mathfrak{J} = 0$; altrimenti d, e è una A-successione ed allora (cfr. [4], 152.4, pag. 191 o [10], (8), pag. 245) dh $\mathfrak{J} =$ dh $(d, e) = 1$.

v) $\Rightarrow$vi) Se vale l'ipotesi della vi), per la v) dh $(a, b) < 2$. Considerata la sequenza esatta

$$0 \to \operatorname{Ker} \varphi \to A \times A \xrightarrow{\varphi} (a, b) \to 0$$

dove φ manda la coppia (r, s) in $ar + bs$, si ha, essendo a non divisore dello zero, $\operatorname{Ker} \varphi \simeq (a):b$ (cfr. [10], Lemma 3, pag. 405), d'altra parte se dh $(a, b) = 0$, allora dh $\operatorname{Ker} \varphi = 0$, e se dh $(a, b) = 1$, ancora dh $\operatorname{Ker} \varphi = 0$ (cfr. [8], Teor. 13, pag. 137); in ogni caso dunque $\operatorname{Ker} \varphi$, e quindi $(a):b$, è proiettivo.

vi) $\Rightarrow$ii) Sia $\omega \in T$ un elemento ammissibile, $\omega = b/a$, $h((a):b) > 1$. Allora l'ideale $\mathfrak{J} = (a, b)$ è libero fuori di $(a):b$, infatti per ogni primo $\mathfrak{P}$ che non contenga $(a):b$, siccome $(a):b$ non è formato tutto da divisori dello zero, si ha $(a):b \not\subset \mathfrak{P} \cup Z(A)$ ed esiste quindi in $(a):b$ un elemento x non divisore dello zero e non appartenente a $\mathfrak{P}$. Risulta allora $xb = ya$, $b = ya/x \in aA_{S\mathfrak{P}}$ e dunque

$$\mathfrak{I}_{S\mathfrak{P}} = aA_{S\mathfrak{P}} \simeq A_{S\mathfrak{P}}\,, \qquad \cap\, \mathfrak{I}_{S\mathfrak{P}} = \cap\, aA_{S\mathfrak{P}} = a(\cap\, A_{S\mathfrak{P}}) \simeq \cap\, A_{S\mathfrak{P}}\,.$$

Essendo dunque (a, b) libero fuori da un ideale di altezza > 1, per l'ipotesi vi) $(a):b$ risulta proiettivo, ma siccome ogni ideale proiettivo proprio ha altezza $= 1$ (cfr. Lemma 10), si ha $(a):b = A$, e dunque (cfr. Lemma 7 e Osservazione 8) $\omega \in A$.

OSSERVAZIONE 19. Se A è un dominio di integrità, la condizione iii) coincide con la seguente condizione (di Margaglio, cfr. [6], Prop. 2, pag. 392):

M_2: *Ogni ideale di altezza* 2 *ha grado* 2 .

Infatti, se a è un elemento regolare e l'ideale (a) non è puro, possiamo scegliere in un suo primo associato $\mathfrak{P}$ non minimale un elemento b non appartenente all'unione dei primi minimali di (a), e risulta $h(a, b) = 2$, $\mathrm{gr}\,(a, b) = 1$. Quindi, qualunque sia l'anello A, $M_2 \Rightarrow$ iii).

Viceversa, dato un ideale $\mathfrak{I}$ di un dominio di integrità A, con $h(\mathfrak{I}) = 2$, scelto in $\mathfrak{I}$ un elemento $a \neq 0$, per iii) (a) è puro e quindi ogni suo primo associato ha altezza $= 1$, e dunque $\mathfrak{I}$ non è contenuto nell'unione dei primi associati ad (a), per cui in $\mathfrak{I}$ possiamo scegliere un elemento b non appartenente a tale unione, per cui risulta a, b A-successione, $\mathrm{gr}\,\mathfrak{I} \geqslant 2$, ma il grado è minore dell'altezza e quindi $\mathrm{gr}\,\mathfrak{I} = 2$.

Vogliamo infine confrontare tra loro alcune condizioni strettamente legate alla P.E.

(α) *Ogni primo associato a* (0) *ha altezza* < 2.

M_n: *Ogni ideale di altezza* n *ha grado* n.

S_n: *Ogni ideale di altezza* $\leqslant n$ *ha grado uguale all'altezza* (cfr. [9], pag. 181).

PROPOSIZIONE 20. *Le seguenti condizioni sono equivalenti*:

$$S_2\,, \qquad S_1 + M_2\,, \qquad M_1 + M_2\,, \qquad S_1 + \text{iii})\,.$$

DIM. Intanto risulta $M_1 = S_1$ e $S_2 = M_1 + M_2$ (banale), quindi $M_1 + M_2 \Leftrightarrow S_1 + M_2 \Leftrightarrow S_2$. D'altra parte $S_1 + M_2 \Rightarrow S_1 +$ iii) poichè $M_2 \Rightarrow$ iii) (cfr. Osservazione 19), e $S_1 +$ iii) $\Rightarrow S_1 + M_2$ infatti un ideale $\mathfrak{J}$ con $h(\mathfrak{J}) = 2$ per S_1 non è formato tutto da divisori dello zero; se allora $a \in \mathfrak{J}$ è un elemento regolare, $\mathfrak{J}$ non è contenuto nell'unione dei primi associati ad (a) poichè, per iii), tutti questi hanno altezza $= 1$, esiste dunque $b \in \mathfrak{J}$ tale che a, b è una A-successione.

c.v.d.

PROPOSIZIONE 21. *Un anello A verifica la condizione M_2 se e solo se verifica la condizione* (α) *e soddisfa alla* P.E.

DIM. Un primo di altezza $\geqslant 2$, per la M_2, ha grado $\geqslant 2$ e quindi non può essere associato all'ideale (0), altrimenti avrebbe grado $= 0$, nè ad un ideale principale di grado 1, altrimenti avrebbe grado $= 1$; quindi se vale la M_2, ogni primo associato a (0) ha altezza < 2 (condizione (α)) ed ogni primo associato ad un ideale principale di grado 1 ha altezza $\leqslant 1$, e dunque $= 1$ (condizione iii) del Teorema 18).

Viceversa, se valgono la (α) e la iii), un ideale $\mathfrak{J}$ con $h(\mathfrak{J}) = 2$ non è formato tutto da divisori dello zero, poichè sarebbe contenuto in uno dei primi associati a (0) ed avrebbe, per (α), altezza < 2: se $a \in \mathfrak{J}$ è allora un elemento regolare, $\mathfrak{J}$ non può essere contenuto in nessuno dei primi associati ad (a) poichè questi, per la iii), hanno tutti altezza 1, e dunque esiste un elemento $b \in \mathfrak{J}$ non appartenente a nessuno dei primi associati ad (a), e risulta a, b A-successione, e quindi $\operatorname{gr} \mathfrak{J} = 2$.

PROPOSIZIONE 22. *Se vale la condizione M_2, vale la S_1 se e solo se in A non esistono ideali massimali che siano associati a* (0) *ed abbiano altezza* $= 1$.

DIM. La condizione S_1 vale se e solo se tutti i primi associati a (0) hanno altezza $= 0$. Se $\mathfrak{M}$ è un ideale massimale di A, associato a (0) e di altezza $= 1$, la S_1 non è verificata (invece la M_2 può essere verificata, p.e. se in questo caso A è locale, la M_2 è verificata banalmente).

Viceversa, consideriamo un primo $\mathfrak{P}_0$ associato a (0); se vale la M_2, $h(\mathfrak{P}_0) = 0$ o $h(\mathfrak{P}_0) = 1$; vogliamo escludere il secondo caso. Se, per assurdo, $h(\mathfrak{P}_0) = 1$, $\mathfrak{P}_0$ per ipotesi non può essere massimale, quindi esiste un massimale $\mathfrak{M} \supset \mathfrak{P}_0$, e risulta quindi $h(\mathfrak{M}) \geqslant 2$, da cui $\operatorname{gr} \mathfrak{M} \geqslant 2$. Ora supponiamo dapprima A locale. Se a è un elemento regolare $\in \mathfrak{M}$, tutti i divisori dello zero di A sono contenuti nell'unione dei primi associati ad (a) (cfr. Lemma 9), quindi $\mathfrak{P}_0$ è contenuto (propriamente) in uno $\mathfrak{P}_1$ di questi. Per M_2, $h(\mathfrak{P}_1) = 1$, da cui $h(\mathfrak{P}_0) = 0$. c.v.d. Se A non è locale, basta localizzare rispetto a $\mathfrak{M}$.

BIBLIOGRAFIA

[1] M. BALDASSARRI, *Osservazioni sulla struttura dei fasci lisci*, Atti del Conv. Internaz. di Geom. Alg. di Torino del 1961.

[2] S. BALDASSARRI GHEZZO, *Proprietà di ideali in domini di integrità noetheriani*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, **43** (1970).

[3] S. CHIARUTTINI - T. MILLEVOI, *Sulla proprietà di estensione nei domini noetheriani*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, **53** (1975).

[4] W. GRÖBNER, *Moderne algebraische Geometrie*, Springer-Verlag, 1949.

[5] I. KAPLANSKY, *Commutative Rings*, Allyn and Bacon, Inc., Boston, 1970.

[6] C. MARGAGLIO, *Alcune proprietà delle R-coppie in un dominio d'integrità*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, **39** (1967).

[7] T. MILLEVOI, *Una proprietà degli ideali di classe principale negli anelli di Macaulay*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, **36** (1966).

[8] D. G. NORTHCOTT, *An Introduction to Homological Algebra*, Cambridge, 1960.

[9] F. ODETTI, *Sulla proprietà di estensione*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, **51** (1974).

[10] O. ZARISKI - P. SAMUEL, *Commutative Algebra*, vol. II, Van Nostrand, 1960.

Manoscritto pervenuto in redazione il 24 gennaio 1979.