

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

G. ANZELLOTTI

M. GIAQUINTA

Funzioni BV e tracce

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 60 (1978), p. 1-21

http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1978__60__1_0

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1978, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Funzioni BV e tracce.

G. ANZELLOTTI (*) - M. GIAQUINTA (**)

SUMMARY - This paper is concerned with two problems in BV function theory:

(i) approximation of functions in $BV(\Omega)$ by C^∞ functions; (ii) existence of a trace on $\partial\Omega$ for functions in $BV(\Omega)$, when $\mathcal{H}^{n-1}(\partial\Omega) < +\infty$. A local necessary and sufficient condition on $\partial\Omega$ in order to have an estimate of the type

$$\int_{\partial\Omega} |f| \leq c_1 \int_{\Omega} |Df| + c_2 \int_{\Omega} |f|$$

is given in section 3. An extension theorem for $H^{1,1}$ functions is given in section 4.

0. Questo lavoro, che riprende e amplia in modo sostanziale un lavoro precedente [1] che ha avuto una limitatissima diffusione, si occupa di due problemi nella teoria delle funzioni che hanno derivate misure. Il primo problema nasce dall'osservazione che lo spazio $C^\infty(\Omega)$ non è denso in $BV(\Omega)$ con la topologia indotta dalla norma di $BV(\Omega)$, ed è quello di approssimare, in qualche senso ragionevole, una funzione $f \in BV(\Omega)$ con funzioni regolari. La risposta che si dà (teorema 1) è che per ogni $f \in BV(\Omega)$ esiste una successione $\{f_h\} \subset C^\infty(\Omega)$ tale che

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} f_h \rightarrow f \quad \text{in } L^1(\Omega) \\ \int_{\Omega} |Df_h| \rightarrow \int_{\Omega} |Df| . \end{array} \right.$$

(*) Indirizzo dell'A.: Istituto Matematico, Università, Povo (Trento).

(**) Indirizzo dell'A.: Istituto di Matematica Applicata, Facoltà di Ingegneria, Università di Firenze.

Il secondo problema che ci si pone è essenzialmente quello di caratterizzare gli aperti Ω sulla cui frontiera le funzioni $BV(\Omega)$ hanno traccia. Per i risultati ormai classici sull'argomento si veda [4], [7], [8]. Noi faremo vedere (paragrafo 2) che sulla frontiera ridotta $\mathcal{F}^*\Omega$ di un aperto Ω con $\mathcal{H}^{n-1}(\partial\Omega) < \infty$ è possibile definire, mediante proprietà locali, la traccia di una funzione BV . Ci si chiede poi se la traccia così definita verifica qualche maggiorazione e si prova (paragrafo 3) l'equivalenza fra il verificarsi di una certa condizione locale per ogni $x \in \partial\Omega$ e l'esistenza di una maggiorazione di traccia. Se questa condizione è soddisfatta si dimostra poi che l'operatore di traccia

$$\gamma: BV(\Omega) \rightarrow L^1(\mathcal{F}^*\Omega)$$

è continuo rispetto alla convergenza (1) ed è suriettivo.

Per molte questioni ci sono state utili le conversazioni avute con E. De Giorgi ed E. Giusti.

1. Si ha il seguente teorema di approssimazione per le funzioni $BV(\Omega)$; la dimostrazione si ispira a quella di [6].

TEOREMA 1. Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^n$ e sia $f \in BV(\Omega)$, esiste allora una successione $\{f_i\} \subset C^\infty(\Omega)$ tale che

$$i) \quad \begin{cases} f_i \rightarrow f & \text{in } L^1(\Omega) \\ \int_{\Omega} |Df_i| \rightarrow \int_{\Omega} |Df| \end{cases}$$

D'ora in poi, se valgono le (i) del teorema 1, si dirà che la successione f_i T -converge a f e si scriverà $f_i \xrightarrow{T} f$. La T -convergenza è indotta dalla distanza

$$d(f, g) = \int_{\Omega} |f - g| + \left| \int_{\Omega} |Df| - \int_{\Omega} |Dg| \right|$$

su $BV(\Omega)$. Questa distanza non è invariante per traslazioni.

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA 1. Per dimostrare il teorema basterà provare che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una funzione $g \in C^\infty(\Omega)$ tale che

$$\int_{\Omega} |f - g| < \varepsilon \quad \left| \int_{\Omega} |Df| - \int_{\Omega} |Dg| \right| < \varepsilon.$$

Sia $\{\Omega_k\}$ una successione di aperti tale che

$$\Omega_k \subset \subset \Omega_{k+1}, \quad \bigcup_{k=0}^{\infty} \Omega_k = \Omega$$

$$\int_{\Omega \setminus \Omega_0} |Df| < \varepsilon \quad \int_{\partial \Omega_2} |Df| = 0.$$

Sia poi $\{w_k\}$ una successione di funzioni con

$$w_k \in C_0^\infty(\Omega_{3k+1}), \quad w_k^{(x)} = 1 \quad \text{se } x \in \Omega_{3k}$$

e poniamo $\varphi_0 = w_1$, $\varphi_k = w_{k+1} - w_k$ per ogni $k \geq 1$. Siano poi

$$V_0 = \Omega_2, \quad V_k = \Omega_{3k+2} \setminus \Omega_{3k-1} \quad \text{per } k \geq 1$$

e poniamo infine

$$g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \psi_{\tau_k} * (f\varphi_k)$$

dove $\psi_{\tau_k} = \tau_k^{-n} \psi(y\tau_k^{-1})$ è una successione di regolarizzanti con $\text{spt } \psi_{\tau_k} \subset \{x \in \mathbf{R}^n: |x| < \tau_k\}$, in cui i numeri τ_k sono tali che valgano le seguenti condizioni

- i) $\tau_{k+1} \leq \tau_k$ e $\tau_k \rightarrow 0$
- ii) $\left| \int_{\Omega_2} |D(\psi_{\tau_0} * f)| - \int_{\Omega_2} |Df| \right| < \varepsilon$
- iii) $(\text{spt } \psi_{\tau_0}) + V_0 \subset \Omega_3$
- iv) $\text{spt } (\psi_{\tau_k} * (f\varphi_k)) \subset V_k \cup V_{k+1}$
- v) $(\text{spt } \psi_{\tau_k}) + V_{k+1} \subset \Omega_{3k+3} \setminus \Omega_{3k-2}$
- vi) $\int_{\Omega} |\psi_{\tau_k} * (f\varphi_k) - f\varphi_k| dx \leq \varepsilon 2^{-k}$
- vii) $\int_{\Omega} |\psi_{\tau_k} * (fD\varphi_k) - fD\varphi_k| dx \leq \varepsilon 2^{-k}.$

Per la (iv) la serie che definisce $g(x)$ è una somma finita in ogni

punto x e si ha

$$g(x) = \psi_{\tau_0} * f(x) \quad \text{se } x \in V_0$$

$$\begin{aligned} g(x) &= (\psi_{\tau_k} * (f\varphi_k))(x) + (\psi_{\tau_{k-1}} * (f\varphi_{k-1}))(x) = \\ &= (\psi_{\tau_k} * f)(x) + (\psi_{\tau_{k-1}} - \psi_{\tau_k}) * (f\varphi_{k-1})(x) \quad \text{se } x \in V_k, \text{ con } k \geq 1. \end{aligned}$$

Dalla (vi) segue subito che

$$\int_{\Omega} |f - g| < 2\varepsilon$$

inoltre si ha

$$\begin{aligned} \int_{\Omega \setminus V_0} |Dg| &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \int_{V_k} |D\psi_{\tau_k} * f| + |\psi_{\tau_{k-1}} * (\varphi_{k-1} Df)| + \\ &\quad + |\psi_{\tau_k} * (\varphi_{k-1} Df)| + |(\psi_{\tau_{k-1}} - \psi_{\tau_k}) * f D\varphi_{k-1}| \leq \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ 3 \int_{\Omega_{3^{k-1}} \setminus \Omega_{3^k}} |Df| + \varepsilon 2^{-k} \right\} \leq 6 \int_{\Omega \setminus \Omega_0} |Df| + \varepsilon \end{aligned}$$

e ricordando la (ii)

$$\left| \int_{\Omega} |Df| - \int_{\Omega} |Dg| \right| \leq 9\varepsilon. \quad \blacksquare$$

Dalla semicontinuità dell'integrale del gradiente rispetto alla convergenza L^1 e dal teorema 1 segue il

COROLLARIO 1. *Data una funzione $f \in L^1(\Omega)$ si ha $f \in BV(\Omega)$ se e solo se esiste una successione $\{f_h\} \subset C^\infty(\Omega)$ tale che*

$$(i) \quad f_h \rightarrow f \quad \text{in } L^1(\Omega)$$

$$(ii) \quad \int_{\Omega} |Df_h| dx \leq \text{costante}.$$

Si ha poi la seguente

PROPOSIZIONE 1. *Sia $\{f_h\} \subset BV(\Omega)$ una successione di funzioni T -convergente a $f \in BV(\Omega)$ e sia A un aperto contenuto in Ω tale che*

$$\int_{\partial A} |Df| = 0$$

allora si ha

$$f_h|_A \xrightarrow{x} f|_A$$

DIMOSTRAZIONE. È sufficiente ricordare la semicontinuità dell'integrale del gradiente in entrambi gli aperti A e $\Omega \setminus \bar{A}$.

2. In questo paragrafo studieremo le tracce delle funzioni $f \in BV(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ sulla frontiera di aperti Ω con $\mathcal{H}^{n-1}(\partial\Omega) < +\infty$. Si ha la seguente

PROPOSIZIONE 2. *Se esiste una successione di aperti $\{\Omega_k\}$ con $\Omega_k \subset \subset \Omega$ tale che*

$$\text{i) } \mathcal{L}^n(\Omega \setminus \Omega_k) \rightarrow 0$$

$$\text{ii) } P(\Omega_k, \mathbb{R}^n) \leq L$$

dove L è una costante indipendente da k , allora ogni insieme $E \subset \Omega$ di perimetro finito in Ω (e in particolare Ω stesso) è di perimetro finito in $\mathbb{R}^n$ e precisamente si ha

$$P(E, \mathbb{R}^n) \leq P(E, \Omega) + L$$

DIMOSTRAZIONE. Gli insiemi $A \cap \Omega_k$ sono di perimetro finito in $\mathbb{R}^n$ e si ha precisamente

$$P(E \cap \Omega_k) = P(E \cap \Omega_k, \Omega) \leq P(E, \Omega) + L$$

ma allora, per la semicontinuità del perimetro, segue la tesi. ■

Le ipotesi della proposizione precedente sono verificate dagli aperti Ω con $\mathcal{H}^{n-1}(\partial\Omega) < +\infty$, infatti, in tal caso, per ogni k è possibile ricoprire $\partial\Omega$ con una famiglia finita di sfere $B_i^{(k)}$ di raggi $\varrho_i^{(k)} < 1/k$ in modo che

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}^{n-1}(\partial B_i^{(k)}) \leq \mathcal{H}^{n-1}(\partial\Omega) + 1$$

e gli insiemi $\Omega_k = \Omega \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} \overline{B_i^{(k)}}$ sono proprio come nelle ipotesi della proposizione 2.

Si ha dunque:

PROPOSIZIONE 3. *Se $\mathcal{H}^{n-1}(\partial\Omega) < +\infty$ allora Ω ha perimetro finito in $\mathbb{R}^n$. Inoltre ogni insieme $E \subset \Omega$ che ha perimetro finito in Ω è anche di perimetro finito in $\mathbb{R}^n$.*

Il seguente esempio mostra che l'ipotesi $\mathcal{H}^{n-1}(\partial\Omega) < +\infty$ non può essere sostituita dall'ipotesi $P(\Omega) < +\infty$, neppure nel caso in cui la frontiera topologica e la frontiera essenziale di Ω coincidono.

ESEMPIO. Sia A il quadrato $(0, 1) \times (0, 1) \subset \mathbb{R}^2$ e siano gli insiemi

$$S_i = \left\{ \left(\frac{1}{i}, y \right) \in \mathbb{R}^2 : 0 < y \leq \frac{1}{2}, 2 \leq i \in \mathbb{N} \right\}.$$

Sia poi $\{r_j\}$ una numerazione di $\mathbb{Q} \cap (0, \frac{1}{2})$ e consideriamo i punti $p_i^j = (1/i, r_j) \in S_i$. Per ogni p_i^j sia B_i^j una palla aperta di centro p_i^j e di raggio ϱ_i^j in modo che

$$\varrho_i^j \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1} \right), \quad \sum_{j=1}^{\infty} \varrho_i^j \leq 2^{-j}$$

e poniamo

$$\Omega = A \setminus \bigcup_{i=2}^{\infty} \overline{\bigcup_{j=1}^{\infty} B_i^j}$$

È chiaro che Ω è un aperto e $P(\Omega) < +\infty$. Consideriamo infine l'insieme

$$E = \left\{ (x, y) \in \Omega : \frac{1}{2k} \leq x \leq \frac{1}{2k+1}, \quad y < \frac{1}{2}, \quad k \in \mathbb{N} \right\}.$$

E è un aperto di perimetro finito in Ω e si ha precisamente $P(E, \Omega) \leq \leq \mathcal{H}^{n-1}(\Omega \cap \partial E) \leq 1$, però E non è di perimetro finito in $\mathbb{R}^n$.

Per ogni funzione f misurabile definita su Ω e per ogni $x \in \mathcal{F}^*\Omega$ definiamo (confronta Federer [3])

$$\lambda_f(x) = \sup \{ t \in \mathbb{R} : \Theta(\{y \in \Omega : f(y) < t\}, x) = 0 \}$$

$$\mu_f(x) = \inf \{ t \in \mathbb{R} : \Theta(\{y \in \Omega : f(y) > t\}, x) = 0 \}$$

$$F_f(x) = \frac{1}{2} [\lambda_f(x) + \mu_f(x)].$$

Quando f sarà fissata scriveremo $\lambda(x)$, $\mu(x)$, $F(x)$, omettendo l'indice f . Osservando che $\lambda(x) \geq t \in \mathbb{R}$ se e solo se per ogni intero positivo i si ha

$$\lim_{j \rightarrow \infty} j^n \mathcal{L}^n \left(\left\{ y \in \Omega: f(y) < t - \frac{1}{j} \right\} \cap \left\{ y: |x - y| < \frac{1}{j} \right\} \right) = 0$$

si ottiene che $\lambda(x)$ è una funzione boreliana su $\mathcal{F}^*\Omega$ e analogamente si procede per $\mu(x)$.

D'ora in poi Ω sarà sempre un aperto con $\mathcal{H}^{n-1}(\partial\Omega) < +\infty$, osserviamo però che per molti dei discorsi che seguono si potrebbe sostituire questa ipotesi con l'ipotesi della proposizione 2.

I teoremi seguenti permettono di dare una prima nozione locale di traccia di una funzione $f \in BV(\Omega)$ su $\mathcal{F}^*\Omega$.

TEOREMA 2. *Data $f \in BV(\Omega)$, dove $\mathcal{H}^{n-1}(\partial\Omega) < +\infty$, per $\mathcal{H}^{n-1}$ -quasi tutti i punti $x \in \mathcal{F}^*\Omega$ si ha*

$$\lambda(x) = \mu(x) = F(x)$$

DIMOSTRAZIONE. Per la formula di coarea (cfr. [3]) esiste un insieme S numerabile e denso in $\mathbb{R}$ tale che per ogni $s \in S$ l'insieme $E_s = \{x \in \Omega: f(x) > s\}$ è di perimetro finito in Ω . Per la proposizione 3 E_s è allora di perimetro finito in $\mathbb{R}^n$ e, posto

$$B_s = E_s^{(1)} \cup E_s^{(0)} \cup E_s^{(\frac{1}{2})}$$

(dove con $E_s^{(t)}$ si indica l'insieme dei punti di Ω che sono di densità t per E_s) si ha $\mathcal{H}^{n-1}(\mathbb{R}^n \setminus B_s) = 0$. Per provare il teorema è allora sufficiente dimostrare che se $x \in \mathcal{F}^*\Omega$ e $\lambda(x) < \mu(x)$ allora $x \in \mathbb{R}^n \setminus B_s$ per qualche $s \in S$. A tale scopo osserviamo che se $x \in \mathcal{F}^*\Omega$ e $\lambda(x) < \mu(x)$ si trova $s \in S$ con $\lambda(x) < s < \mu(x)$ e si ha

$x \notin E_s^{(1)}$ poichè $E_s \subset \Omega$ e $x \in \Omega^{(1)}$

$x \notin E_s^{(0)}$ poichè $s < \mu(x)$

$x \notin E_s^{(\frac{1}{2})}$ poichè $\lambda(x) < s$ implica $\Theta^*(\Omega \setminus E_s, x) > 0$ ed essendo $\Theta(\Omega, x) = \frac{1}{2}$ non può essere anche $\Theta(E_s, x) = \frac{1}{2}$. ■

Si ha ovviamente la

PROPOSIZIONE 4. *Sia $\mathcal{H}^{n-1}(\partial\Omega) < +\infty$ e sia $f \in BV(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, si ha allora per $\mathcal{H}^{n-1}$ -quasi tutti i punti $x \in \mathcal{F}^*\Omega$*

$$(i) \quad \lim_{\varrho \rightarrow 0^+} \frac{1}{\mathcal{L}^n(\Omega \cap B_\varrho(x))} \int_{\Omega \cap B_\varrho(x)} |f(y) - F(x)|^{n/(n-1)} dy = 0,$$

$$(ii) \quad \lim_{\varrho \rightarrow 0^+} \frac{1}{\mathcal{L}^n(\Omega \cap B_\varrho(x))} \int_{\Omega \cap B_\varrho(x)} f(y) dy = F(x).$$

OSSERVAZIONE. Notiamo che se $f, g \in BV(\Omega)$ si ha $\mathcal{H}^{n-1}$ -q.o. su $\mathcal{F}^*\Omega$

$$F_f + F_g = F_{f+g} \quad F_{|f|} = |F_f|$$

PROPOSIZIONE 5. *Sia Ω un aperto di perimetro finito in $\mathbb{R}^n$ con $\mathcal{H}^{n-1}(\partial\Omega) < +\infty$, sia $f \in BV(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ e sia $2\|f\|_{L^\infty(\Omega)} < M < +\infty$ posto allora*

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in \Omega \\ 0 & \text{se } x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega \end{cases}$$

si ha che $\tilde{f} \in BV(\mathbb{R}^n)$ e inoltre vale

$$(i) \quad \int_{\mathbb{R}^n} |D\tilde{f}| \leq \int_{\Omega} |Df| + M \cdot \mathcal{H}^{n-1}(\partial\Omega)$$

DIMOSTRAZIONE. Cominciamo col supporre che $f \in C^\infty(\Omega) \cap BV(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ è allora chiaro che il sottografico E di $\tilde{f}$ ha perimetro finito in $\Omega' \times \mathbb{R}$ per ogni aperto $\Omega' \supset \supset \Omega$ tale che $\mathcal{L}^n(\Omega' \setminus \Omega) < +\infty$ e precisamente si ha

$$\begin{aligned} P(E, \Omega' \times \mathbb{R}) &\leq \mathcal{H}^{n-1}((\Omega' \times \mathbb{R}) \cap \partial E) \leq \\ &\leq \mathcal{L}^n(\Omega' \setminus \Omega) + 2\|f\|_{L^\infty(\Omega)} \cdot \mathcal{H}^{n-1}(\partial\Omega) + \int_{\Omega} \sqrt{1 + |Df|^2} dx \end{aligned}$$

dunque $\tilde{f} \in BV(\mathbb{R}^n)$ e si ha anche

$$\int_{\mathbb{R}^n} |D\tilde{f}| = \int_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega} |D\tilde{f}| + \int_{\partial\Omega} |D\tilde{f}| + \int_{\Omega} |Df|$$

dove $\int_{\mathbf{R}^n \setminus \Omega} |D\tilde{f}| = 0$ e

$$\int_{\partial\Omega} |D\tilde{f}| \leq \mathcal{H}^{n-1}(\mathcal{F}^*E \cap [\mathbf{R} \times \partial\Omega]) \leq 2 \cdot \mathcal{H}^{n-1}(\partial\Omega) \cdot \|f\|_{L^\infty(\Omega)}$$

per cui la (i) è provata per le funzioni che sono anche $C^\infty(\Omega)$. Se ora $f \in BV(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, per il teorema 1 esiste una successione $\{f_j\} \subset C^\infty(\Omega) \cap BV(\Omega)$ che T -converge a f in Ω e si può supporre che $2\|f_j\|_{L^\infty(\Omega)} < M$; per ognuna delle f_j vale allora la (i) e passando al limite per $j \rightarrow \infty$ si ha la tesi. ■

Ricordiamo ora (vedi [2]) che per ogni insieme Ω di perimetro finito in $\mathbf{R}^n$ si può trovare una successione di compatti $\{K_i\}$ tale che: $\mathcal{F}^*\Omega = \left(\bigcup_{i=0}^{\infty} K_i\right) \cup \Sigma$ dove $\mathcal{H}^{n-1}(\Sigma) = 0$ ogni K_i è contenuto in una ipersuperficie S_i di classe C^1 e per $\mathcal{H}^{n-1}$ -quasi ogni $x \in K_i$ il vettore

$$\nu(x) = \lim_{\varrho \rightarrow 0^+} \frac{\int_{B_\varrho(x)} D\varphi_\Omega}{\int_{B_\varrho(x)} |D\varphi_\Omega|}$$

sta sulla retta normale a S_i in x . Si possono poi sempre arrangiare le cose in modo che i K_i siano disgiunti e che esista su ogni S_i un campo continuo di vettori $n_i(x)$ con $|n_i(x)| = 1$ e con $n_i(x) = \nu(x)$ per $\mathcal{H}^{n-1}$ -quasi tutti gli $x \in K_i$.

Se ora $f \in BV(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, e $\tilde{f} \in BV(\mathbf{R}^n)$ è definita come nella proposizione precedente, ricordando i risultati di traccia di M. Miranda [7], si vede che $\tilde{f}$ ammette una traccia interna $\tilde{F}^+$ e una traccia esterna $\tilde{F}^-$ su ogni ipersuperficie regolare S_i e per ogni boreliano B di $\mathbf{R}^n$ si ha

$$(*) \quad \int_{S_i \cap B} D\tilde{f} = \int_{S_i \cap B} n_i(x) (\tilde{F}^+(x) - \tilde{F}^-(x)) d\mathcal{H}^{n-1}(x).$$

In particolare la (*) vale con $\nu(x)$ al posto di $n_i(x)$ su K_i e in conclusione si ha, sempre per B boreliano:

$$\begin{aligned} \int_{B \cap \mathcal{F}^*\Omega} D\tilde{f} &= \int_{B \cap \mathcal{F}^*\Omega} [\tilde{F}^+(x) - \tilde{F}^-(x)] \cdot \nu(x) d\mathcal{H}^{n-1}(x) \\ \int_{B \cap \mathcal{F}^*\Omega} |D\tilde{f}| &= \int_{B \cap \mathcal{F}^*\Omega} |\tilde{F}^+(x) - \tilde{F}^-(x)| d\mathcal{H}^{n-1}(x) \end{aligned}$$

Infine poichè il vettore $\nu(x)$ punta verso l'interno di Ω nei punti $x \in \mathcal{F}^*\Omega$ è chiaro che $\mathcal{K}^{n-1}$ -q.o. su $\mathcal{F}^*\Omega$ si ha

$$\tilde{F}^-(x) = 0$$

$$\tilde{F}^+(x) = \lim_{\varrho \rightarrow 0^+} \frac{1}{\mathcal{L}^n(\Omega \cap B_\varrho(x))} \int_{\Omega \cap B_\varrho(x)} f(y) dy = F(x)$$

In conclusione si ha il teorema seguente:

TEOREMA 3. Sia Ω un aperto con $\mathcal{K}^{n-1}(\partial\Omega) < +\infty$, sia $f \in BV(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$. allora f ha una traccia F su $\mathcal{F}^*\Omega$ caratterizzata per $\mathcal{K}^{n-1}$ -quasi tutti gli $x \in \mathcal{F}^*\Omega$ da

$$(i) \quad F(x) = \lambda(x) = \mu(x) = \lim_{\varrho \rightarrow 0^+} \frac{1}{\mathcal{L}^n(\Omega \cap B_\varrho(x))} \int_{\Omega \cap B_\varrho(x)} f(y) dy$$

inoltre, se $\tilde{f}$ è definita come nella proposizione 5, si ha che $\tilde{f} \in BV(\mathbb{R}^n)$ e per ogni boreliano B di $\mathbb{R}^n$ vale

$$\begin{aligned} \int_{B \cap \mathcal{F}^*\Omega} D\tilde{f} &= \int_{B \cap \mathcal{F}^*\Omega} F(x) \nu(x) d\mathcal{K}^{n-1}(x) \\ \int_{B \cap \mathcal{F}^*\Omega} |D\tilde{f}| &= \int_{B \cap \mathcal{F}^*\Omega} |F(x)| d\mathcal{K}^{n-1}(x) \end{aligned}$$

se poi facciamo l'ipotesi che sia $\mathcal{K}^{n-1}(\partial\Omega/\mathcal{F}^*\Omega) = 0$ si ha anche, per ogni boreliano B

$$\int_B D\tilde{f} = \int_{B \cap \Omega} Df + \int_{B \cap \partial\Omega} F \nu d\mathcal{K}^{n-1}$$

e cioè per ogni $g \in C_0^1(\mathbb{R}^n)$ e per $i = 1, 2, \dots, n$ vale

$$\int_{\mathbb{R}^n} g D_i \tilde{f} = \int_{\Omega} g D_i f + \int_{\partial\Omega} g F \nu d\mathcal{K}^{n-1}$$

Infine si ha

$$\int_{\mathbb{R}^n} |D\tilde{f}| = \int_{\Omega} |Df| + \int_{\partial\Omega} |F| d\mathcal{K}^{n-1}$$

e vale la formula di Green

$$\int_{\Omega} Df = - \int_{\partial\Omega} F \nu d\mathcal{H}^{n-1}.$$

Osserviamo che senza la condizione $\mathcal{H}^{n-1}(\partial\Omega \setminus \mathcal{F}^*\Omega) = 0$ non valgono in generale le ultime due formule del teorema precedente.

Nel caso in cui $\mathcal{H}^{n-1}(\partial\Omega \setminus \mathcal{F}^*\Omega) > 0$ riusciamo ancora a valutare la misura $|D\hat{f}|$ in termini di f se si verificano le condizioni seguenti:

$$(2.i) \quad \partial\Omega/\mathcal{F}^*\Omega = \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} C_i \right) \cup \Sigma$$

dove $\mathcal{H}^{n-1}(\Sigma) = 0$ e gli insiemi C_i sono compatti, disgiunti due a due, e ciascuno contenuto in una ipersuperficie Γ_i di classe C^1 .

(2.ii) i punti di $\partial\Omega/\mathcal{F}^*\Omega$ sono $\mathcal{H}^{n-1}$ -quasi tutti di densità 1 per Ω .

In tali condizioni infatti la funzione $\hat{f} \in BV(\mathbb{R}^n)$ ha due tracce $\varphi_1^{(i)}$ e $\varphi_2^{(i)}$, una per ciascuna faccia, su ogni superficie Γ_i e, posto $\phi(x) = \varphi_1^i(x) - \varphi_2^i(x)$ per $\mathcal{H}^{n-1}$ -quasi ogni $x \in \partial\Omega \setminus \mathcal{F}^*\Omega$, si ha

$$\int_{\mathbb{R}^n} |D\hat{f}| = \int_{\mathcal{F}^*\Omega} |F| + \int_{\partial\Omega \setminus \mathcal{F}^*\Omega} |\phi| + \int_{\Omega} |Df|$$

Osserviamo che la condizione 2.i) equivale alla

3) per $\mathcal{H}^{n-1}$ -quasi ogni $x \in \partial\Omega \setminus \mathcal{F}^*\Omega$ esiste una ipersuperficie Γ passante per x e tale che

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\mathcal{H}^{n-1}(\partial\Omega \cap \Gamma \cap B_{\varepsilon}(x))}{\mathcal{H}^{n-1}(\Gamma \cap B_{\varepsilon}(x))} = 1.$$

3. In questo paragrafo studieremo una condizione locale su $\partial\Omega$ necessaria e sufficiente affinché valga, per ogni $f \in BV(\Omega)$, una maggiorazione del tipo

$$(1) \quad \int_{\mathcal{F}^*\Omega} F d\mathcal{H}^{n-1} \leq L \int_{\Omega} |Df| + c \int_{\Omega} |f| dx$$

dove F è la traccia di f su $\mathcal{F}^*\Omega$ definita nel paragrafo precedente. Faremo poi vedere che, se vale in Ω una maggiorazione del tipo (1), allora l'operatore di traccia è continuo rispetto alla T -convergenza definita nel paragrafo 1 e la traccia gode di alcune proprietà locali che erano già state stabilite nel paragrafo 2 per le funzioni $BV(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$.

Per la seguente definizione confrontare con [5].

DEFINIZIONE 1. Sia Ω un aperto con $\mathcal{H}^{n-1}(\partial\Omega) < +\infty$, per ogni $x \in \partial\Omega$ definiamo

$$q(x) = \limsup_{\varrho \rightarrow 0^+} \left\{ \frac{\int_{\mathcal{F}^*\Omega} \varphi_A d\mathcal{H}^{n-1}}{\int_{\Omega} |D\varphi_A|}; A \subset \Omega \cap B_{\varrho}(x), \mathcal{L}^n(A) > 0, P(A, \Omega) < +\infty \right\}$$

e poniamo $Q = \sup_{x \in \partial\Omega} q(x)$.

Osserviamo che per gli aperti con frontiera di classe C^1 si ha $Q = 1$ mentre per gli aperti con frontiera lipschitziana si ha essenzialmente $Q = \sqrt{1 + L^2}$ dove L è la costante di Lipschitz del bordo di Ω . Hanno $Q < +\infty$ gli aperti con cuspidi verso l'esterno. Osserviamo anche che $x \in \mathcal{F}^*\Omega$ non implica necessariamente $q(x) < +\infty$.

TEOREMA 4. Sia Ω un aperto limitato con $\mathcal{H}^{n-1}(\partial\Omega) < +\infty$ e $Q < +\infty$ sia $f \in BV(\Omega)$ e sia F la traccia di f su $\mathcal{F}^*\Omega$ definita come nel paragrafo precedente. Si ha allora per ogni $\varepsilon > 0$ e per ogni $f \in BV(\Omega)$

$$\int_{\mathcal{F}^*\Omega} |F| d\mathcal{H}^{n-1} \leq (Q + \varepsilon) \int_{\Omega} |Df| + c(\Omega, \varepsilon) \int_{\Omega} |f| dx$$

dove $c(\Omega, \varepsilon)$ non dipende da f .

DIMOSTRAZIONE: Sia $x \in \partial\Omega$ e sia $\varrho(x) > 0$ tale che

$$\int_{\mathcal{F}^*\Omega} \varphi_B d\mathcal{H}^{n-1} \leq (Q + \varepsilon) \int_{\Omega} |D\varphi_B|$$

per ogni insieme $B \subset \Omega \cap B_{\varrho(x)}(x)$ con $P(B, \Omega) < +\infty$. Sia poi

con $\text{spt } f \subset B_{\varrho(x)}(x)$, si ha allora

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{F}^*\Omega} |F| d\mathcal{K}^{n-1} &= \int_0^\infty \mathcal{K}^{n-1}(\{y \in \mathcal{F}^*\Omega : |F(y)| > t\}) dt \leq \\ &\leq \int_0^{+\infty} dt \int_{\Sigma_t} \varphi_{\Sigma_t} d\mathcal{K}^{n-1} \leq (Q + \varepsilon) \int_0^\infty dt \int_\Omega |D\varphi_{\Sigma_t}| \end{aligned}$$

dove $\Sigma_t = \{y \in \Omega \cap B_{\varrho(x)}(x) : |f(y)| > t\}$, per la formula di coarea si ha infine

$$\int_{\mathcal{F}^*\Omega} |F| d\mathcal{K}^{n-1} \leq (Q + \varepsilon) \int_\Omega |Df| \leq (Q + \varepsilon) \int_\Omega |Df|.$$

La famiglia di sfere $\{B_{\varrho(x)}(x)\}_{x \in \partial\Omega}$ è un ricoprimento di $\partial\Omega$; estraiamone un sottoricoprimento finito $B_1, \dots, B_k$ e consideriamo una partizione dell'unità $\varphi_1, \dots, \varphi_k$ tale che

$$0 \leq \varphi_i \leq 1, \quad \varphi_i \in C_0^1(B_i), \quad \sum \varphi_i(x) = 1 \quad \text{se } x \in \partial\Omega.$$

Se ora $f \in BV(\Omega)$ si ha

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{F}^*\Omega} |F| d\mathcal{K}^{n-1} &\leq (Q + \varepsilon) \sum_{i=1}^k \int_\Omega |D(\varphi_i f)| \leq (Q + \varepsilon) \sum_{i=1}^k \cdot \\ &\cdot \left\{ \int_\Omega \varphi_i |Df| + \int_\Omega |D\varphi_i| |f| dx \leq (Q + \varepsilon) \int_\Omega |Df| + c(\Omega, \varepsilon) \int_\Omega |f| dx \right\}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Il seguente teorema stabilisce un legame preciso fra la costante Q e la maggiorazione di traccia.

TEOREMA 5. *Sia Ω un aperto limitato con $P(\Omega) = \mathcal{K}^{n-1}(\partial\Omega) < +\infty$, in Ω si ha una maggiorazione di traccia del tipo (1) se e solo se $Q < +\infty$ e precisamente si ha*

$Q = \inf$ delle costanti L per le quali vale una maggiorazione del tipo (1).

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo che valga la (1). Si ha allora per ogni $A \subset \Omega \cap B_{\varrho}(x)$, con $x \in \partial\Omega$

$$\int_{\mathcal{F}^*\Omega} \varphi_A \leq L \int_\Omega |D\varphi_A| + c \int_\Omega \varphi_A$$

e quindi

$$\begin{aligned} \frac{\int_{\mathcal{F}^*\Omega} \varphi_A}{\int_{\Omega} |D\varphi_A|} &\leq L + c \frac{\int_{\Omega} \varphi_A}{\int_{\Omega} |D\varphi_A|} = L + c \frac{(\text{mis } A)^{(n-1)/n}}{\int_{\Omega} |D\varphi_A|} (\text{mis } A)^{1/n} \leq \\ &\leq L + c \left[\frac{\beta P(A)}{\int_{\Omega} |D\varphi_A|} \right] \omega_n^{1/u} \varrho \leq L + c\beta \omega_n^{1/n} \varrho \left[1 + \frac{\int_{\mathcal{F}^*\Omega} \varphi_A}{\int_{\Omega} |D\varphi_A|} \right] \end{aligned}$$

dove si è sfruttata l'ipotesi $\mathcal{H}^{n-1}(\partial\Omega) = P(\Omega)$ usando

$$P(A) = \int_{\mathcal{F}^*\Omega} \varphi_A + \int_{\Omega} |D\varphi_A|$$

Si ha poi

$$\frac{\int_{\mathcal{F}^*\Omega} \varphi_A}{\int_{\Omega} |D\varphi_A|} [1 - c\beta \omega_n^{1/n} \varrho] \leq L + c\beta \omega_n^{1/u} \varrho$$

e quindi

$$q(x) \leq \lim_{\varrho \rightarrow 0^+} \frac{L + c\beta \omega_n^{1/n} \varrho}{1 - c\beta \omega_n^{1/n} \varrho} = L.$$

Questo fatto, unito al teorema precedente, dà la tesi. ■

Consideriamo ora il problema della continuità dell'operatore di traccia. Dato un aperto limitato Ω con $\mathcal{H}^{n-1}(\partial\Omega) < +\infty$ e $Q < +\infty$ chiameremo $\gamma: BV(\Omega) \rightarrow L^1(\mathcal{F}^*\Omega)$ l'operatore che ad ogni funzione $f \in BV(\Omega)$ associa la sua traccia $F = \gamma f$ su $\mathcal{F}^*\Omega$.

THEOREMA 6. *Sia Ω un aperto limitato con $\mathcal{H}^{n-1}(\partial\Omega) < +\infty$, $Q < +\infty$. Se $\{f_h\}$ è una successione di funzioni di $BV(\Omega)$ T -convergente a $f \in BV(\Omega)$, allora si ha che $\gamma f_h \rightarrow \gamma f$ in $L^1(\mathcal{F}^*\Omega)$.*

DIMOSTRAZIONE. Sia A un aperto relativamente compatto in Ω con frontiera regolare, per ogni $g \in BV(\Omega)$, avente traccia γg su $\mathcal{F}^*\Omega$ e traccia esterna $\tilde{\gamma} g$ su ∂A , si ha allora

$$(i) \quad \int_{\mathcal{F}^*\Omega} |\gamma g| d\mathcal{H}^{n-1} \leq \text{cost} \left\{ \int_{\Omega \setminus \bar{A}} |Dg| + \int_{\partial A} |\tilde{\gamma} g| d\mathcal{H}^{n-1} + \int_{\Omega \setminus \bar{A}} |g| dx \right\}$$

infatti, posto

$$g^*(x) = \begin{cases} g(x) & \text{se } x \in \Omega \setminus \bar{A} \\ 0 & \text{se } x \in A \end{cases}$$

si ha $g^* \in BV(\Omega)$, $\gamma g = \gamma g^*$ e, ricordando la maggiorazione di traccia per la g^* , si ha la (i).

Fissiamo ora $\varepsilon > 0$ e sia $A \subset\subset \Omega$ tale che

$$\begin{aligned} \int_{\partial A} |Df| &= \int_{\partial A} |Df_n| = 0 \quad \text{per ogni } h, \\ \int_{\Omega \setminus \bar{A}} |Df| &< \varepsilon, \quad f_h \Big|_{\partial A} \rightarrow f \Big|_{\partial A} \quad \text{in } L'(\partial A) \end{aligned}$$

per la proposizione 1 si ha $f_h \xrightarrow{T} f$ in $\Omega \setminus A$ e quindi esiste un numero n_1 tale che se $h \geq n_1$ si ha

$$\int_{\Omega \setminus \bar{A}} |Df_h| < 2\varepsilon, \quad \int_{\Omega \setminus \bar{A}} |f_h - f| < \varepsilon, \quad \int_{\partial A} |f_h - f| d\mathcal{H}^{n-1} < \varepsilon$$

Applicando ora la (i) alle funzioni $f_h - f$, per la linearità di γ , si ottiene per ogni $h \geq n_1$

$$\int_{\mathcal{F}^*\Omega} |\gamma f_h - \gamma f| d\mathcal{H}^{n-1} \leq \text{cost. } \varepsilon$$

e quindi la tesi. ■

Vedremo ora di estendere i risultati ottenuti nel teorema 3 alle funzioni BV non limitate; a questo scopo utilizzeremo i teoremi 4 e 6 e imporreemo su Ω la condizione supplementare $\mathcal{H}^{n-1}(\partial\Omega \setminus \mathcal{F}^*\Omega) = 0$.

TEOREMA 7. *Sia Ω un aperto limitato con $P(\Omega) = \mathcal{H}^{n-1}(\partial\Omega) < +\infty$, se $f \in BV(\Omega)$ e definiamo $\tilde{f}$ come nella proposizione 5 allora si ha che $f \in BV(\mathbb{R}^n)$ e vale*

$$\int_{\mathbb{R}^n} |D\tilde{f}| = \int_{\Omega} |Df| + \int_{\partial\Omega} |\gamma f| d\mathcal{H}^{n-1}$$

DIMOSTRAZIONE. Possiamo limitarci al caso di $f \geq 0$. Per ogni intero positivo k poniamo

$$f_k(x) = \inf \{f(x), k\}$$

per il teorema 3 si ha

$$\int_{\mathbf{R}^n} |D\hat{f}_k| = \int_{\Omega} |Df| + \int_{\partial\Omega} |\gamma f_k| d\mathcal{H}^{n-1}$$

e quindi

$$\int_{\mathbf{R}^n} |D\hat{f}| \leq \min_{k \rightarrow \infty} \lim \int_{\mathbf{R}^n} |D\hat{f}_k| \leq \int_{\Omega} |Df| + \int_{\partial\Omega} |\gamma f| d\mathcal{H}^{n-1}$$

ossia $\hat{f} \in BV(\mathbf{R}^n)$, se ora osserviamo che le funzioni troncate $\hat{f}_k$ di $\hat{f}$ T -convergono a f si ha la tesi. ■

TEOREMA 8. (*Caratterizzazione locale della traccia e formula di Green*). Siano $\Omega, f, \hat{f}$, come nel teorema precedente, si ha allora $\mathcal{H}^{n-1}$ -q.o. su $\partial\Omega$

$$\gamma f(x) = \lim_{\varrho \rightarrow 0^+} \frac{1}{\mathcal{L}^n(\Omega \cap B_{\varrho}(x))} \int_{\Omega \cap B_{\varrho}(x)} f(y) dy$$

$$\lim_{\varrho \rightarrow 0^+} \frac{1}{\mathcal{L}^n(\Omega \cap B_{\varrho}(x))} \int_{\Omega \cap B_{\varrho}(x)} |f(y) - (\gamma f)(x)|^{n/(n-1)} dy = 0$$

inoltre per ogni boreliano $B \subset \mathbf{R}^n$ si ha

$$\int_{B \cap \partial\Omega} D\hat{f} = \int_{B \cap \partial\Omega} \gamma f(y) \nu(y) d\mathcal{H}^{n-1}(y)$$

$$\int_{B \cap \partial\Omega} |D\hat{f}| = \int_{B \cap \partial\Omega} |\gamma f| d\mathcal{H}^{n-1}$$

e vale la formula di Green

$$\int_{\Omega} Df = - \int_{\partial\Omega} \gamma f(y) \nu(y) d\mathcal{H}^{n-1}(y)$$

DIMOSTRAZIONE. Si procede analogamente a quanto fatto per dimostrare il teorema 3. ■

4. In questo paragrafo Ω sarà un aperto limitato di $\mathbb{R}^n$ con $\mathcal{H}^{n-1}(\partial\Omega) < +\infty$.

DEFINIZIONE. Sia $\varphi \in L^1(\mathcal{F}^*\Omega)$, diremo che una funzione $f \in BV(\Omega)$ è un prolungamento di φ a Ω se la traccia di f su $\mathcal{F}^*\Omega$ è φ .

TEOREMA 9 (di prolungamento. *Si ha:*

(a) *per ogni $\varphi \in L^\infty(\mathcal{F}^*\Omega)$ si trova una funzione $f \in H^{1,1}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ la cui traccia su $\mathcal{F}^*\Omega$ è φ ; si ha inoltre*

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} \leq c \|\varphi\|_{L^\infty(\mathcal{F}^*\Omega)}$$

(b) *se $Q < +\infty$ allora per ogni $\varphi \in L^1(\mathcal{F}^*\Omega)$ si trova una funzione $f \in H^{1,1}(\Omega)$ la cui traccia su $\mathcal{F}^*\Omega$ è φ ; si ha inoltre*

$$\|f\|_{H^{1,1}(\Omega)} \leq \|\varphi\|_{L^1(\mathcal{F}^*\Omega)}$$

dove c dipende da Ω ma non da φ .

Alla dimostrazione del teorema 9 premettiamo il seguente

LEMMA 1. *Sia S una iper superficie cartesiana di classe C^1 in $\mathbb{R}^n$, e sia $L^1(S)$ nulla fuori di un compatto $K \subset S$. Allora esiste una funzione $f \in H^{1,1}(\mathbb{R}^n)$ che ha φ come traccia su S ed è tale che*

$$\|f\|_{H^{1,1}(\mathbb{R}^n)} \leq 3 \|\varphi\|_{L^1(S)}, \quad \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \psi \|\varphi\|_{L^1(S)}$$

DIMOSTRAZIONE. Possiamo supporre che

$$S = \{(y, t) \in A \times \mathbb{R} : t = w(y)\}$$

dove A è un aperto di $\mathbb{R}^{n-1}$ e $w \in C^1(A)$. Poniamo $\tilde{\varphi} = \varphi \circ w \in L^1(A)$; $\tilde{\varphi}$ è allora nulla fuori di $\tilde{K}$, dove $\tilde{K}$ è la proiezione di K su A . Possiamo quindi trovare una successione $\{\tilde{\varphi}_i\} \subset C_0^1(A)$ che approssima $\tilde{\varphi}$ in $L^1(A)$ e con $\|\tilde{\varphi}_i\|_{L^\infty(A)} \leq \|\varphi\|_{L^\infty(A)}$. È ora facile convincersi che per una opportuna scelta di una sottosuccessione $\{\varphi_{i_j}\}$ di $\{\varphi_i\}$ e di una

successione ε_j decrescente e con $\varepsilon_j \rightarrow 0$, la funzione

$$f(y, t) = \begin{cases} 0 & \text{se } |t - w(y)| > \varepsilon_0 \\ \varphi_{i_1}(y) \frac{\varepsilon_0 - |t - w(y)|}{\varepsilon_0 - \varepsilon_1} & \text{se } \varepsilon_0 \geq |t - w(y)| \geq \varepsilon_1 \\ \dots & \dots \\ \varphi_{i_j}(y) + [\varphi_{i_{j+1}}(y) - \varphi_{i_j}(y)] \frac{\varepsilon_j - |t - w(y)|}{\varepsilon_j - \varepsilon_{j+1}} & \text{se } \varepsilon_j \geq |t - w(y)| \geq \varepsilon_{j+1} \end{cases}$$

è quella cercata. ■

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA 9. Sia $\{K_j\}$ una successione di compatti disgiunti tali che $\mathcal{H}^{n-1}\left(\mathcal{F}^* \Omega \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} K_j\right) = 0$ e ogni K_j sia contenuto in una ipersuperficie S_j che possiamo supporre cartesiana. Per ogni j definiamo su S_j la funzione

$$\varphi_j(x) = \begin{cases} \varphi(x) & \text{se } x \in K_j \\ 0 & \text{se } x \in S_j \setminus K_j. \end{cases}$$

Per il lemma precedente si trova allora una funzione $\phi_i \in H^{1,1}(\mathbb{R}^n)$ la cui traccia su S_j è φ_j e tale che

$$\|\phi_j\|_{H^{1,1}(\mathbb{R}^n)} \leq 3 \|\varphi_j\|_{L^1(K_j)}, \quad \|\phi_j\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \|\varphi\|_{L^\infty(\mathcal{F}^* \Omega)}.$$

Poniamo ora

$$\tilde{\phi} = \sum_{j=1}^{\infty} |\phi_j| \in H^{1,1}(\mathbb{R}^n), \quad \phi = \sum_{j=1}^{\infty} \phi_j \in H^{1,1}(\mathbb{R}^n)$$

dove

$$(i) \quad \max \{ \|\tilde{\phi}\|_{H^{1,1}(\mathbb{R}^n)}, \|\phi\|_{H^{1,1}(\mathbb{R}^n)} \} \leq 3 \|\varphi\|_{L^1(\mathcal{F}^* \Omega)}.$$

Consideriamo la successione di funzioni $\{f_i\} \subset H^{1,1}(\mathbb{R}^n)$ definita come segue

$$\begin{aligned} f_1 &= \phi_1 \\ f_i &= f_{i-1} + \psi_i(\phi_i - f_{i-1}) = (1 - \psi_i)f_{i-1} + \psi_i\phi_i \end{aligned}$$

dove le ψ_i sono funzioni lipschitziane scelte in modo che $0 \leq \psi_i \leq 1$,
 $\psi_i(x) = 1$ se $x \in K_i$, $(\text{spt } \psi_i) \cap \left(\bigcup_{j=1}^{i-1} K_j \right) = \emptyset$.
 Ovviamente si ha

$$|f_i| \leq |f_{i-1}| + |\phi_i| \leq \sum_{j=1}^{i-1} |\phi_j| \leq \hat{\phi}$$

$$f_i|_{\bigcup_{j=1}^{i-1} K_j} = \varphi|_{\bigcup_{j=1}^{i-1} K_j}$$

e per induzione si vede che $\|f_i\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \|\varphi\|_{L^\infty(\mathcal{F}^*\Omega)}$.

A questo punto è chiaro che se riusciamo a provare che $\{f_i\}$ è una successione di Cauchy in $H^{1,1}(\mathbb{R}^n)$, il limite $f \in H^{1,1}(\mathbb{R}^n)$ delle f_i è proprio il prolungamento cercato, infatti su ogni S_j la traccia di f è il limite in $L^1(S_j)$ delle tracce delle f_j le quali su $K_j \subset S_j$ sono, da un certo punto in poi, sempre uguali a φ_j . Ogni punto $x \in K_j$ è però di frontiera ridotta per Ω e, per il teorema 8, la traccia di $f|_\Omega$ su $\mathcal{F}^*\Omega$ è proprio $\varphi_j(x) = \varphi(x)$.

Mettiamoci allora nelle ipotesi di (a) e osserviamo che $\{f_i\}$ è di Cauchy in $H^{1,1}(\mathbb{R}^n)$ se

$$\sum_{i=2}^{\infty} \|\psi_i(\phi_i - f_{i-1})\|_{H^{1,1}(\mathbb{R}^n)} < +\infty$$

dove

$$\|\psi_i(\phi_i - f_{i-1})\|_{H^{1,1}(\mathbb{R}^n)} \leq \int_{\text{spt } \psi_i} |\phi_i - f_{i-1}| + \int_{\text{spt } \psi_i} |D(\phi_i - f_{i-1})| + \int_{\mathbb{R}^n} |D\psi_i| |\phi_i - f_{i-1}| dx.$$

Fissato $\delta > 0$ possiamo scegliere le ψ_i con supporto di misura piccola in modo che

$$\int_{\text{spt } \psi_i} \{|\phi_i - f_{i-1}| + |D(\phi_i - f_{i-1})|\} dx < \delta 2^{-i}$$

e inoltre in modo che si abbia

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} |D\psi_i| |\phi_i - f_{i-1}| - 2 \int_{K_i} |\phi_i - f_{i-1}| \right| < \delta 2^{-i}.$$

Abbiamo dunque che

$$\begin{aligned} \sum_{i=2}^{\infty} \|\psi_i(\phi_i - f_{i-1})\|_{H^{1,1}(\mathbb{R}^n)} &\leq 2\delta + H^{n-1}\left(\bigcup_{j=2}^{\infty} K_j\right) \|\phi_i - f_{i-1}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \\ &\leq 2\delta + 2\mathcal{H}^{n-1}(\mathcal{F}^*\Omega) \|\varphi\|_{L^\infty(\mathcal{F}^*\Omega)} \end{aligned}$$

per cui $\{f_i\}$ è di Cauchy e $f|_\Omega = \left(\lim_{i \rightarrow \infty} f_i\right)|_\Omega \in H^{1,1}(\Omega)$ è il prolungamento cercato.

Mettiamoci ora nelle ipotesi di (b). Poichè $Q < +\infty$ vale la maggiorazione di traccia e si ha, ricordando anche la (i),

$$\int_{\mathcal{F}^*\Omega} \tilde{\phi} \leq M \|\varphi\|_{L'(\mathcal{F}^*\Omega)}$$

mentre per ogni indice i vale $\max\{f_i, \phi_i\} \leq \tilde{\phi}$ su $\mathcal{F}^*\Omega$. Si ha allora, se le ψ_i sono scelte come nel caso precedente,

$$\sum_{i=2}^{\infty} \|\psi_i(\phi_i - f_{i-1})\|_{H^{1,1}(\mathbb{R}^n)} \leq 2\delta + 2 \int_{\mathcal{F}^*\Omega} \tilde{\phi} d\mathcal{H}^{n-1} < +\infty$$

e ancora $\{f_i\}$ è di Cauchy e $f|_\Omega = \left(\lim_{i \rightarrow \infty} f_i\right)|_\Omega$ è il prolungamento cercato. È poi ovvio che

$$\|f\|_{H^{1,1}(\Omega)} \leq c \|\varphi\|_{L'(\mathcal{F}^*\Omega)}$$

dove c dipende dalle costanti che compaiono nella maggiorazione di traccia, e quindi da Ω , ma non dipende da φ . ■

Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^n$, posto $\Omega' = \mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega}$ si vede che $\partial\Omega' \subset \partial\Omega$. Se $\mathcal{H}^{n-1}(\partial\Omega) < +\infty$ si ha quindi anche $\mathcal{H}^{n-1}(\partial\Omega') < +\infty$, inoltre i punti di $\mathcal{F}^*\Omega$ sono di densità $\frac{1}{2}$ per Ω' e quindi sono $\mathcal{H}^{n-1}$ -quasi tutti di frontiera ridotta per Ω' e viceversa.

Dal teorema precedente e da quanto appena osservato si ottiene infine il seguente:

TEOREMA 10. *Sia Ω un aperto limitato con $\mathcal{H}^{n-1}(\partial\Omega) < +\infty$ e $Q < +\infty$*

(a) *Data $\varphi \in L^1(\mathcal{F}^*\Omega)$ si trova una funzione $f \in H^{1,1}(\mathbb{R}^n)$ tale che traccia di $f|_\Omega$ su $\mathcal{F}^*\Omega$ = traccia di $f|_{\Omega'}$ su $\mathcal{F}^*\Omega' = \varphi$.*

(b) Se poi $\mathcal{K}^{n-1}(\partial\Omega \setminus \mathcal{F}^*\Omega) = 0$, per ogni funzione $f \in H^{1,1}(\Omega)$ si trova una funzione $\tilde{f} \in H^{1,1}(\mathbb{R}^n)$ tale che $\tilde{f}|_\Omega = f$ e

$$\|\tilde{f}\|_{H^{1,1}(\mathbb{R}^n)} \leq c \|f\|_{H^{1,1}(\Omega)}$$

dove c dipende da Ω ma non da f .

BIBLIOGRAFIA

- [1] G. ANZELLOTTI - M. GIAQUINTA, *Sulle funzioni $BV(\Omega)$ e le loro tracce*, Editrice Tecnico Scientifica, Pisa (1974).
- [2] E. DE GIORGI, *Nuovi teoremi relativi alle misure $(r-1)$ -dimensionali in uno spazio a r dimensioni*, Ricerche di Matematica, **4** (1955), pp. 95-113.
- [3] H. FEDERER, *Geometric Measure Theory*, Springer-Verlag (1969).
- [4] E. GAGLIARDO, *Caratterizzazione delle tracce sulla frontiera relative ad alcune classi di funzioni in n variabili*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, **27** (1957), pp. 284-305.
- [5] E. GIUSTI, *Boundary value problems for nonparametric surfaces of prescribed mean curvature*, Ann. Scuola Normale Superior (1976), pp. 501-548.
- [6] N. J. MEYERS - J. SERRIN, $H = W$, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., **51** (1964), pp. 1055-1056.
- [7] M. MIRANDA, *Comportamento delle successioni convergenti di frontiere minimali*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, **38** (1967), pp. 238-257.
- [8] G. PRODI, *Tracce sulla frontiera delle funzioni di B. Levi*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, **26** (1956), pp. 36-60.

Manoscritto pervenuto in redazione l'8 luglio 1977.