

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

GAETANO FICHERA

Teoremi di media e formole di maggiorazione relative alle funzioni biarmoniche

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 59 (1978), p. 285-294

http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1978__59__285_0

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1978, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

Teoremi di media e formole di maggiorazione relative alle funzioni biarmoniche.

GAETANO FICHERA (*)

In un mio recente lavoro [1] ho osservato la seguente formola di maggiorazione relativa ad una funzione biarmonica $u(x)$, definita per ogni x di un campo (insieme aperto) A dello spazio cartesiano X^3 ed appartenente a $L^2(A)$

$$(1) \quad |u(x)| \leq \frac{1,915}{d^{\frac{1}{2}}} \left(\int_A |u(y)|^2 dy \right)^{\frac{1}{2}};$$

d è la distanza di x dalla frontiera ∂A di A .

Formole quale la (1) sono di notevole utilità nella teoria matematica classica dell'elasticità, dato che esse permettono di dare una limitazione di tipo puntuale alle componenti di spostamento, oppure a quelle di tensione o di deformazione (in assenza di forze di massa), note che siano limitazioni per il quadrato dell'integrale di siffatte grandezze. Ciò, ad esempio, permette di provare la celebre congettura di Saint-Venant nei punti interni ad una barra cilindrica lontani dalle basi di questa, appena si sia ottenuta, come è possibile fare, una limitazione per l'integrale dell'energia elastica relativo alla differenza fra la effettiva soluzione e quella di Saint-Venant (cfr. [1], [2], [3]).

La (1) costituisce per le funzioni biarmoniche l'analogo di una ben

(*) L'indirizzo dell'A.: Istituto Matematico « G. Castelnuovo », Università di Roma.

nota maggiorazione per le funzioni armoniche

$$(2) \quad |u(x)| \leq \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{\pi}} \frac{1}{d^{\frac{n-1}{2}}} \left(\int_A |u(y)|^2 dy \right)^{\frac{1}{2}},$$

la quale, però, rispetto alla (1), ha il vantaggio di far intervenire una costante di maggiorazione: $\frac{1}{2}\sqrt{3/\pi}$ la quale è ottimale, cioè non sostituibile, per un arbitrario campo A , con una costante minore. Ciò è subito visto assumendo nella (2) $u(x) \equiv 1$, A un campo sferico ed x il suo centro.

Vista l'importanza, anche ai fini del calcolo pratico delle strutture elastiche, di formole quali la (1), mi sono proposto di migliorare la (1), cercando di sostituire il coefficiente 1,915 con una costante ottimale come nella (2). Ingredienti essenziali per il raggiungimento di tale fine sono diversi teoremi di media per le funzioni biarmoniche, che, a mio avviso, hanno interesse a sé stante e che, per ciò, ho voluto considerare in un dettaglio più ampio di quanto il semplice scopo, che mi ero inizialmente prefisso, non richiedesse.

Ritengo che questa mia piccola Nota sia non del tutto indegna di essere dedicata all'amico Giuseppe Scorza Dragoni, anche perché, nel corso di essa, viene data risposta ad un quesito che il nostro comune Maestro, Mauro Picone, aveva posto, addirittura nel 1936, circa la possibilità di dimostrare che un elegante teorema di media, da lui scoperto per le funzioni biarmoniche, fosse atto a caratterizzare tali funzioni (cfr. [4]).

* * *

Sia A un campo dello spazio cartesiano X^n ed $u(x)$ una funzione reale biarmonica in A . Sia x un fissato punto di A e d la sua distanza da ∂A . Sia Ω la sfera unitaria di X^n ed $\omega \equiv (\omega_1, \dots, \omega_n)$ il punto su di essa variabile. Sia $y \equiv (y_1, \dots, y_n)$ il punto variabile in A e

$$A_2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial y_n^2}.$$

Posto $y = x + \rho\omega$, si ha

$$A_2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{n-1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} L_\omega,$$

essendo L_ω l'operatore di Laplace-Beltrami su Ω . Si assuma $0 < \rho < d$. Dall'equazione biarmonica $\Delta_2^2 u = 0$, tenendo presente che si ha, uniformemente per $\omega \in \Omega$,

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} u(x + \rho\omega) = u(x), \quad \lim_{\rho \rightarrow 0} \rho \frac{\partial}{\partial \rho} u(x + \rho\omega) = 0,$$

si deduce, detto α un qualsiasi numero reale tale che $0 < \alpha < 1$,

$$\int_{\Omega} u(x + \rho\omega) d\omega = |\Omega|u(x) + c_1\rho^2,$$

$$\int_{\Omega} u(x + \alpha\rho\omega) d\omega = |\Omega|u(x) + c_1\alpha^2\rho^2,$$

essendo $|\Omega|$ la misura di Ω , cioè

$$|\Omega| = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}.$$

Ne segue

$$(3) \quad (1 - \alpha^2)u(x) = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} u(x + \alpha\rho\omega) d\omega - \frac{\alpha^2}{|\Omega|} \int_{\Omega} u(x + \rho\omega) d\omega.$$

Sia $\Sigma_r(x)$ il campo sferico: $|y - x| < r$. La (3) può scriversi:

$$(3') \quad (1 - \alpha^2)u(x) = \frac{1}{\text{mis } \partial\Sigma_{\alpha\rho}(x)} \int_{\partial\Sigma_{\alpha\rho}(x)} u(y) d\sigma - \frac{\alpha^2}{\text{mis } \partial\Sigma_\rho(x)} \int_{\partial\Sigma_\rho(x)} u(y) d\sigma,$$

che rappresenta una proprietà di media, per una funzione biarmonica, di tipo inconsueto, dato che il valore della funzione nel punto x è espresso come differenza delle medie sulle due sfere concentriche di raggi $\alpha\rho$ e ρ e centro x , essendo dette medie moltiplicate per i coefficienti $(1 - \alpha^2)^{-1}$ e $\alpha^2(1 - \alpha^2)^{-1}$ rispettivamente.

La (3') è caso particolare di una generale formola di media per una funzione poliarmonica, trovata da Picone, che aveva posto il problema di riconoscere se la (3') (o, più in generale, la formola di media da lui ottenuta per le funzioni poliarmoniche) fosse caratte-

ristica per le funzioni biarmoniche (o, più in generale, per quelle poliarmoniche, cfr. [4], pag. 112) ⁽¹⁾.

Dimostrerò che, *considerando α arbitrariamente fissato nell'intervallo aperto $(0, 1)$* , la (3') caratterizza le funzioni biarmoniche. Precisamente farò vedere che, *fissato α in $(0, 1)$* , se $u(x) \in L^1(A)$ e se, per quasi ogni x di A , detta d la distanza di x da ∂A , per quasi tutti i ϱ dell'intervallo $(0, d)$ sussiste la (3'), allora $u(x)$ è biarmonica in A ⁽²⁾.

Si moltiplichino i due membri di (3'), cioè di (3), per ϱ^{n-1} e si integri su $(0, r)$, essendo $0 < r < d$. Si ottiene:

$$(4) \quad u(x) = \frac{n}{(1 - \alpha^2)r^n |\Omega|} \cdot \left\{ \frac{1}{\alpha^n} \int_0^{\alpha r} \varrho^{n-1} d\varrho \int_{\Omega} u(x + \varrho\omega) d\omega - \alpha^2 \int_0^r \varrho^{n-1} d\varrho \int_{\Omega} u(x + \varrho\omega) d\omega \right\}^{(3)}$$

cioè, detta $|\Sigma_r(x)|$ la misura di $\Sigma_r(x)$,

$$(4') \quad u(x) = \frac{1}{(1 - \alpha^2)|\Sigma_r(x)|} \left\{ \frac{1}{\alpha^n} \int_{\Sigma_{\alpha r}(x)} u(y) dy - \alpha^2 \int_{\Sigma_r(x)} u(y) dy \right\}.$$

Dalla (4') segue immediatamente che $u(x)$ coincide quasi ovunque in A con una funzione ivi continua, talché, d'ora in poi, potrò supporre $u(x)$ continua in A . Detto B un arbitrario campo limitato tale che $\bar{B} \subset A$, sia $\{v^r(x)\}$ una successione di funzioni di classe uno in \bar{B}

⁽¹⁾ La (3') è stata riscoperta, nel 1955, da R. J. Duffin [5] e, nel 1966, da J. H. Bramble e L. E. Payne [6], che, anzi, ritrovano il generale teorema di media dato da Picone nel 1936 [4] per le funzioni poliarmoniche.

⁽²⁾ Picone suggerisce, nel caso biarmonico, di assumere $\alpha = 2^{-\frac{1}{2}}$. Bramble e Payne [6] dimostrano quello che essi chiamano uno « strong converse » del teorema di media di Picone per le funzioni poliarmoniche. Tuttavia le loro ipotesi sono tali da richiedere, nel caso biarmonico, che la (3') sussista per ogni α di $(0, 1)$. Ma in tal caso, come vedremo in questa stessa Nota, facendo tendere α ad 1, si ottiene una proprietà di media dovuta a Nicolescu e, quindi, il « teorema di inversione » di Bramble e Payne si deduce da quello già dimostrato nel 1930 da Nicolescu (cfr. [8] e bibliografia ivi citata).

⁽³⁾ Si noti che il sussistere della (4) per $r \in (0, d)$ implica la (3) per quasi tutti gli r di tale intervallo, come si vede moltiplicando i due membri di (4) per r^n e derivando rispetto ad r .

ed ivi convergente uniformemente verso $u(x)$ (cfr. [7], pag. 506). Sia C un arbitrario campo tale che $\bar{C} \subset B$. Sia δ un numero positivo tale che ogni punto di \bar{C} abbia da ∂B distanza non inferiore a δ . Poniamo per ogni $x \in \bar{C}$

$$w^v(x) = \frac{1}{(1 - \alpha^2) |\Sigma_\delta(x)|} \left\{ \frac{1}{\alpha^n} \int_{\Sigma_{\alpha\delta}(x)} v^v(y) dy - \alpha^2 \int_{\Sigma_\delta(x)} v^v(y) dy \right\}.$$

Si ha:

$$|u(x) - w^v(x)| \leq \frac{n}{(1 - \alpha^2) |\Omega| \delta^n} \left\{ \left(\frac{1}{\alpha^n} + \alpha^2 \right) \int_B |u(y) - v^v(y)| dy \right\}.$$

Segue da ciò la convergenza (uniforme) in \bar{C} di $\{w^v(x)\}$ verso $u(x)$. Si ha poi, per $x \in \bar{C}$, tenendo presente la formola di Gauss-Green,

$$\begin{aligned} u_{|k}^v(x) &= \frac{1}{(1 - \alpha^2) |\Sigma_\delta(x)|} \cdot \left\{ \frac{1}{\alpha^n} \int_0^{\alpha\delta} \varrho^{n-1} d\varrho \int_\Omega v_{|k}^v(x + \varrho\omega) d\omega - \alpha^2 \int_0^\delta \varrho^{n-1} d\varrho \int_\Omega v_{|k}^v(x + \varrho\omega) d\omega \right\} = \\ &= \frac{\delta^{n-1}}{(1 - \alpha^2) |\Sigma_\delta(x)|} \left\{ \frac{1}{\alpha} \int_\Omega v^v(x + \alpha\varrho\omega) \omega_k d\omega - \alpha^2 \int_\Omega v^v(x + \varrho\omega) \omega_k d\omega \right\} \\ &\quad (k = 1, \dots, n) \text{ (*)}. \end{aligned}$$

Detto μ un intero positivo arbitrario, abbiamo per $x \in \bar{C}$

$$|w_{|k}^{v^{+\mu}}(x) - u_{|k}^v(x)| \leq \frac{n}{(1 - \alpha^2) \delta} \left(\frac{1}{\alpha} + \alpha^2 \right) \max_B |v^{+\mu}(y) - v^v(y)|.$$

Si è così dimostrato, data l'arbitrarietà di B e di C , che $u(x)$ ha derivate prime continue in A e per la sua derivata $u_{|k}$ si ha, per

(*) Il simbolo $u_{|k}$ denota la derivata parziale $\partial u / \partial x_k$.

$0 < r < d$,

$$\begin{aligned} u_{1k}(x) &= \frac{1}{(1-\alpha^2)|\Sigma_r(x)|} \left\{ \frac{1}{\alpha^n} \int_{\partial\Sigma_{\alpha r}(x)} u(y) \omega_k d\sigma - \alpha^2 \int_{\partial\Sigma_r(x)} u(y) \omega_k d\sigma \right\} = \\ &= \frac{1}{(1-\alpha^2)|\Sigma_r(x)|} \left\{ \frac{1}{\alpha^n} \int_{\Sigma_{\alpha r}(x)} u_{1k}(y) dy - \alpha^2 \int_{\Sigma_r(x)} u_{1k}(y) dy \right\}, \end{aligned}$$

cioè per u_{1k} sussiste la (4'). Ne viene che $u(x)$ ha in A derivate parziali continue di ordine comunque elevato.

Dalla (3) si deduce

$$\alpha \int_{\Omega} u_{\varrho}(x + \alpha \varrho \omega) d\omega = \alpha^2 \int_{\Omega} u_{\varrho}(x + \varrho \omega) d\omega$$

e quindi, per la formola di Gauss-Green, posto $w(y) = \Delta_2 u(y)$

$$\frac{1}{|\Sigma_{\alpha \varrho}(x)|} \int_{\Sigma_{\alpha \varrho}(x)} w(y) dy = \frac{1}{|\Sigma_{\varrho}(x)|} \int_{\Sigma_{\varrho}(x)} w(y) dy.$$

Sostituendo al secondo membro ϱ con $\alpha \varrho$ ed iterando questo procedimento, si trae, per ogni numero naturale k ,

$$\frac{1}{\Sigma_{\alpha^k \varrho}(x)} \int_{\Sigma_{\alpha^k \varrho}(x)} w(y) dy = \frac{1}{|\Sigma_{\varrho}(x)|} \int_{\Sigma_{\varrho}(x)} w(y) dy$$

e quindi per $k \rightarrow \infty$

$$w(x) = \frac{1}{|\Sigma_{\varrho}(x)|} \int_{\Sigma_{\varrho}(x)} w(y) dy.$$

Pertanto w è armonica in A , cioè u è biarmonica in A .

Torno ora a considerare la (4'), che scrivo al modo seguente:

$$(5) \quad u(x) = \frac{1}{(1-\alpha^2)|\Sigma_r(x)|} \left\{ \frac{1-\alpha^{n+2}}{\alpha^n} \int_{\Sigma_{\alpha r}(x)} u(y) dy - \alpha^2 \int_{\Sigma_r(x)-\Sigma_{\alpha r}(x)} u(y) dy \right\}.$$

Se $u(x)$ è biarmonica in A , la (5) sussiste comunque si assuma

$\alpha \in (0, 1)$. Passando al limite per $\alpha \rightarrow 1^-$, dalla (5) si trae

$$(6) \quad u(x) = \frac{1}{|\Sigma_r(x)|} \left\{ \frac{n+2}{2} \int_{\Sigma_r(x)} u(y) dy - \frac{1}{2} r \int_{\partial \Sigma_r(x)} u(y) d\sigma \right\}.$$

Tale formola di media per le funzioni biarmoniche è ben nota. Essa fu trovata nel 1930 da Miron Nicolescu, il quale anche dimostrò (nel contesto più ampio della teoria delle funzioni poliarmoniche) che essa caratterizza le funzioni biarmoniche (cfr. [8], pp. 8-10, e bibliografia ivi citata) ⁽⁵⁾. Moltiplicando i due membri della (6) per r^n e derivando rispetto ad r si trae un altro ben noto teorema di media per le funzioni biarmoniche, che però è di più scarso interesse rispetto a (3'), (4'), (6), dato che nel secondo membro interviene anche la derivata, secondo la normale esterna ν a $\partial \Sigma_r$, della funzione biarmonica u

$$u(x) = \frac{1}{\text{mis } \partial \Sigma_r(x)} \left\{ \int_{\partial \Sigma_r(x)} u(y) d\sigma - \frac{r}{2} \int_{\partial \Sigma_r(x)} \frac{\partial u}{\partial \nu} d\sigma \right\}.$$

Indico con $f(r)$ una funzione reale misurabile in $(0, +\infty)$, ivi quasi ovunque non nulla, sommabile in ogni intervallo $(0, l)$ ($0 < l < +\infty$) e tale che per ogni l

$$\varphi(l) = \int_0^l r^n f(r) dr \neq 0.$$

Moltiplicando i due membri di (6) per $r^n f(r)$ e integrando su $(0, l)$ ($0 < l < d$) si trae il seguente teorema di media per la funzione biarmonica u

$$(7) \quad u(x) = \frac{n}{2|\Omega|\varphi(l)} \int_{\Sigma_i(x)} [(n+2)\psi(|y|, l) - |y|f(|y|)] u(y) dy,$$

ove

$$\psi(\rho, l) = \int_\rho^l f(r) dr.$$

⁽⁵⁾ L'ipotesi di limitatezza assunta dal Nicolescu può facilmente rimuoversi imitando il tipo di procedimento sopra seguito per «invertire» la (3').

La (7) ha il vantaggio di far intervenire un unico integrale di campo esteso a $\Sigma_i(x)$. Essa, qualunque sia l'arbitraria funzione $f(r)$, purchè verificante le condizioni sopra specificate, è caratteristica per le funzioni biarmoniche, dato che dalla (7), moltiplicando i due membri per $\varphi(l)$ e derivando rispetto ad l , si ottiene la (6).

Sia $p > 1$ e $q = p(p-1)^{-1}$. Se riesce $u(x) \in L^p(A)$, dalla (7), fatta l'ulteriore ipotesi che $|y|f(|y|) \in L^q[\Sigma_a(x)]$, si trae

$$(8) \quad |u(x)| \leq \frac{n}{2|\Omega||\varphi(d)|} \left(\int_{\Sigma_a(x)} [(n+2)\psi(|y|, d) - |y|f(|y|)]^q dy \right)^{1/q} \cdot \left(\int_A |u(y)|^p dy \right)^{1/p} \quad (6).$$

Si può cercare di sfruttare l'arbitrarietà di $f(r)$ per ottimizzare, per un arbitrario campo A , la costante di maggiorazione che interviene nella (8). A tal fine si osservi che se $A = \Sigma_a(x)$, nella (8) sussisterà il segno = se la funzione di y : $(n+2)\psi(|y|, d) - |y|f(|y|)$ è biarmonica in $\Sigma_a(x)$ e u coincide con tale funzione. Posto

$$F(\varrho) = \int_c^{\varrho} f(r) dr,$$

deve allora essere

$$(n+2)F(\varrho) + \varrho F'(\varrho) = c + \varrho^2, \quad F(d) = 0$$

con c costante. Dovendo essere $F(\varrho)$ continua per $\varrho = 0$, si trae

$$c = -\frac{n+2}{n+4} d^2, \quad F(\varrho) = \frac{1}{n+4} (\varrho^2 - d^2)$$

e quindi

$$f(\varrho) = -\frac{2\varrho}{n+4}.$$

(6) La (8) può anche scriversi per $p = 1$, se $|y|f(|y|) \in L^\infty[\Sigma_a(x)]$, nel qual caso essa diventa

$$|u(x)| \leq \frac{n}{2|\Omega||\varphi(d)|} \sup_{\Sigma_a(x)} |(n+2)\psi(|y|, d) - |y|f(|y|)| \int_A |u(y)| dy.$$

Con tale scelta di $f(\rho)$ la (7) si scrive

$$u(x) = \frac{n+2}{4l^2} \frac{1}{|\Sigma_l(x)|} \int_{\Sigma_l(x)} [(n+2)l^2 - (n+4)|y|^2] u(y) dy$$

e la (8) per $p = 2$ diviene

$$(9) \quad |u(x)| \leq \frac{n(n+2)}{2\sqrt{n}|\Omega|^{\frac{1}{2}}d^{n/2}} \left(\int_A |u(y)|^2 dy \right)^{\frac{1}{2}},$$

nella quale, per $A \equiv \Sigma_d(x)$ e $u(y) = (n+2)l^2 - (n+4)|y|^2$ sussiste il segno =.

Nel caso $n = 3$ la costante di maggiorazione della (9) diventa

$$\frac{15}{4\sqrt{3}\pi} \simeq 1,22150628,$$

che fornisce un notevole miglioramento della (1).

È opportuno avvertire che alla (9) si sarebbe potuto pervenire anche per altra via. Precisamente quella indicata in [9] (pp. 21-22). Essa consiste, fissato x in A , nel considerare il funzionale

$$J(u) = |u(x)|^2$$

nella classe \mathcal{U} delle funzioni biarmoniche in $\Sigma_d(x)$ che verificano la condizione

$$(10) \quad \int_{\Sigma_d(x)} |u(y)|^2 dy = 1.$$

Usando il tipo di tecnica descritta in [9] si può dimostrare che in \mathcal{U} il funzionale $J(u)$ è dotato di massimo, il quale è uguale al quadrato del coefficiente che interviene nella (9). La funzione massimante è quella stessa sopra indicata, normalizzata mediante la (10), per la quale nella (9) sussiste il segno =.

La via seguita in questa Nota è, però, più interessante per le osservazioni che ha portato a fare sui teoremi di media per le funzioni biarmoniche.

Mi sono limitato a considerare solo le funzioni biarmoniche, ma

non vi è dubbio che le cose dette possono estendersi, solo al prezzo di maggiori complicazioni formali, a funzioni poliarmiche di qualsiasi ordine. Ciò, comunque, può formare oggetto di una buona tesi di laurea per un volenteroso e bravo giovane (?).

(?) Ne esistono, malgrado tutto, ancora oggi!

BIBLIOGRAFIA

- [1] G. FICHERA, *Remarks on Saint-Venant's Principle*, in corso di stampa sui Rendiconti di Matem., Roma.
- [2] G. FICHERA, *Il principio di Saint-Venant: intuizione dell'ingegnere e rigore del matematico*, Rendiconti di Matem., Roma, **10**, serie VI (1977), pp. 1-24.
- [3] R. TOUPIN, *Saint-Venant's Principle*, Archive for Rational Mech. and Anal., **18** (1965), pp. 83-96.
- [4] M. PICONE, *Sulla convergenza delle successioni di funzioni iperarmiche*, Bulletin Mathém. de la Soc. Roumaine des Sciences, **38**, (2) (1936), pp. 105-112.
- [5] R. J. DUFFIN, *Continuation of biharmonic functions by reflection*, Duke Math. Journal, **22** (1955), pp. 313-324.
- [6] J. H. BRAMBLE - L. E. PAYNE, *Mean value theorems for polyharmonic functions*, Amer. Math. Monthly, **73** (1966), pp. 124-127.
- [7] M. PICONE - G. FICHERA, *Corso di Analisi Matematica*, vol. II, Ediz. Veschi, Roma, 1976.
- [8] M. NICOLESCU, *Les fonctions polyharmoniques*, Act. Scient. Industr. **331**, Hermann et Cie Edit., Paris, 1936.
- [9] G. FICHERA, *Risultati concernenti la risoluzione delle equazioni funzionali lineari dovuti all'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo*, Memorie Accad. Naz. Lincei, s. VIII, III, sez. I, fasc. I (1950), pp. 1-81.

Manoscritto pervenuto in redazione il 13 gennaio 1979.