

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

GIULIANO BRATTI

Risoluzione di una congettura di De Giorgi in R^2

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 58 (1977), p. 87-90

http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1977__58__87_0

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1977, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

Risoluzione di una congettura di De Giorgi in \mathbb{R}^2 .

GIULIANO BRATTI (*)

1. - In (3) De Giorgi propone la seguente congettura: se A e B_n sono aperti di \mathbb{R}^n , $B_n \subset A$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, se P e Q sono operatori differenziali in A , se le quaterne (A, B_n, P, Q) sono C^∞ -compatibili allora è C^∞ -compatibile anche la quaterna $(A, \cup_n B_n, P, Q)$.

È già stato dimostrato che se P e Q sono a coefficienti costanti, la congettura è, in generale, falsa se su Q si suppone la sola ipoeletticità (4). A mia conoscenza rimane aperto il caso in cui Q è ellittico e, più in particolare il caso in cui Q è l'operatore di Laplace.

Lo scopo di questo articolo è di dimostrare che: se Q è l'operatore di Laplace, in \mathbb{R}^2 la congettura è vera.

Per richiamare il problema e porre la simbologia:

a) nel seguito si porrà: $D_x^2 + D_y^2 = (D_x + iD_y)(D_x - iD_y) = Q\bar{Q}$; se f è una funzione \bar{f} indicherà la sua coniugata;

b) se A e B sono aperti con $B \subset A$, la quaterna (A, B, P, Q) si dice C^∞ -compatibile se e solo se: per ogni f per cui il sistema $Pu = f$, $Qu = 0$ è C^∞ -localmente risolubile, (per ogni punto p di A esiste un suo intorno W_p e una $u \in C^\infty(W_p)$ tale che $Pu = f$, $Qu = 0$), il sistema $Pu = f$, $Qu = 0$ è C^∞ -risolubile in B .

Per un teorema di Lojasiewicz-Malgrange, se P e Q sono primi tra di loro, le f di cui al punto b) sono tutte e solo quelle di $\ker Q|_A = \{f \in C^\infty(A) : Qf = 0\}$ se $P = PQ_1$ e $Q = Q_1Q_2$, quelle f sono quelle di $\ker Q_{2/A}$, (1).

(*) Indirizzo dell'A.: Seminario Matematico, Via Belzoni, 7; 1-35100 PD.

(1) Si trascura il caso che P e Q non abbiano zeri complessi comuni. A sarà supposto connesso.

2. - LEMMA, *Le seguenti proposizioni sono equivalenti:*

a) *la quaterna (A, B, P, Q) è C^∞ -compatibile;*

b) *se c'è una curva continua semplice e chiusa in B , allora c è la frontiera di un compatto K tale che: $K \subset A$.*

DIMOSTRAZIONE. $a) \Rightarrow b)$. $P(D_x, D_y)$ con la sostituzione: $D_x = d/dz$ e $D_y = id/dz$ diviene un operatore lineare nella derivata complessa $d/dz: a_n d^n/dz^n + \dots + a_0$. Se c_1, \dots, c_k , sono gli zeri dell'equazione caratteristica dell'operatore $L(d/dz)$, di molteplicità r_1, \dots, r_k , si ha: $L(d/dz) = (d/dz - c_1)M(d/dz)$.

Allora, se vale a), per ogni $f \in \text{Ker } Q|_A$ esiste, in B , una soluzione olomorfa dell'equazione $d/dz(u) - c_1(u) = f$.

Sia c la curva continua semplice e chiusa contenuta in B e tale che: se K è il compatto di cui c è la frontiera esista $z_0 \in K$ ma $z_0 \notin A$. Si può supporre per semplicità $z_0 = 0$. Se $f(z) = \frac{e^{c_1 z}}{z}$, poichè $f \in \text{ker } Q|_A$ dovrebbe esistere una soluzione dell'equazione $d/dz(u) - c_1(u) = \frac{e^{c_1 z}}{z}$ in B . Ciò è assurdo (2).

$b) \Rightarrow a)$. Si ponga: $L = B \cup Z_B$, dove Z_B è la riunione delle componenti connesse e compatte del complementare di B .

L è aperto e semplicemente connesso (5); per la b), $L \subset A$.

Ovvio allora che l'equazione $L(d/dz)u = f$ è risolubile con una u olomorfa in L , per ogni olomorfa f in L . Ciò implica che la quaterna (A, B, P, Q) è C^∞ -compatibile.

LEMMA. *La quaterna $(A, B, P, Q\bar{Q})$ è C^∞ -compatibile se e solo se B ha la proprietà b) del lemma di sopra.*

DIMOSTRAZIONE. Se $f \in \text{ker } Q|_A$; sia $g \in C^\infty(A)$ tale che: $\bar{Q}g = f$. Allora il sistema $Pu = g, \bar{Q}Qu = 0$ è risolubile in B ; quindi: $P\bar{Q}u = \bar{Q}g = f, Q\bar{Q}u = 0$ in B ; vale allora la proprietà voluta per B .

(2) Che l'equazione: $d/dz(u) - cu = \frac{e^{c_1 z}}{z}$ non possa essere risolta in

B si vede così: la restrizione sull'asse reale positivo contenuto in B di u sarebbe del tipo: $u(x)/e^{c_1 x} - a = \log x$, con qualche $a \in C$. Allora $\log z, z = x + iy$ sarebbe prolungabile come funzione olomorfa a tutto un intorno della curva c . Ciò è assurdo.

Viceversa: $L = B \cup Z_B$ è un aperto semplicemente connesso contenuto in A . In L si ha: $\ker Q_{/L} + \ker \bar{Q}_{/L} = \ker Q\bar{Q}_{/L}$, poichè il sistema $\bar{Q}u = f, Qu = 0$ è risolubile per ogni $f \in \ker Q_{/L}$.

Se $f \in \ker Q\bar{Q}_{/L}$ ciò implica che in L sia ha: $f = g_1 + g_2$ con $g_1 \in \ker \bar{Q}_{/L}$ e $g_2 \in \ker Q_{/L}$. Il sistema $Pu_2 = g_2, Qu_2 = 0$ è ovviamente risolubile in L ; così come lo è il sistema $\bar{P}u_1 = \bar{g}_1, Qu_1 = 0$, e dunque $P\bar{u}_1 = g_1, \bar{Q}\bar{u}_1 = 0$.

Allora in L si ha:

$$P(\bar{u}_1 + u_2) = g_1 + g_2 = f, Q\bar{Q}(\bar{u}_1 + u_2) = 0.$$

Le quaterne $(A, B_n, P, Q\bar{Q})$ siano C^∞ -compatibili per ogni $n \in N$, con i B_n che costituiscono una successione crescente.

Se c è una curva continua semplice e chiusa contenuta in $\cup_n B_n$ esiste n_0 tal che c è contenuta in B_{n_0} e quindi il compatto K di cui c è frontiera è tutto contenuto in A .

Ciò implica che per $B = \cup_n B_n$ soddisfa la proprietà *b*) del lemma di sopra e quindi la quaterna $(A, B, P, Q\bar{Q})$ è C^∞ -compatibile.

Fin qui si è dimostrato che la congettura di De Giorgi relativa ai sistemi $Pu = f, Q\bar{Q}u = 0$ è vera in R^2 , a patto che P e $Q\bar{Q}$ non abbiano fattori comuni.

Si supponga $P = P_1Q$; se la quaterna $(A, B, P_1Q, \bar{Q}Q)$ è C^∞ -compatibile, il sistema $P_1u = f, \bar{Q}u = 0$ è risolubile in B per ogni $f \in \ker \bar{Q}_{/L}$.

Allora: se $g \in \ker Q_{/A}$, in B è risolubile il sistema: $P_1v = \bar{g}, \bar{Q}v = 0$, così che: $P_1\bar{v} = g$ e $Q\bar{v} = 0$, per ogni g come sopra. Allora B ha la proprietà *b*) del primo lemma.

Viceversa: se B ha la proprietà *b*) del primo lemma: in $L = B \cup Z_B$, per ogni $f \in \ker \bar{Q}_{/A}$ è risolubile il sistema $\bar{P}_1v = \bar{f}, Qv = 0$. Ponendo: $\bar{v} = Qu$, si ha: $P_1Qu = f$ e $\bar{Q}Qu = 0$.

Così che la congettura di De Giorgi è vera, con i ragionamenti di sopra, anche se P e $Q\bar{Q}$ non sono primi tra di loro (ovvio: P non multiplo di $Q\bar{Q}$).

(Ragionamenti analoghi nel caso $P = P_1\bar{Q}$).

BIBLIOGRAFIA

- [1] A. ANDREOTTI, M. NACINOVICH, *Complexes of partial differential operators*, Ann. Scuola Normale Superiore di Pisa, 1976.

- [2] G. BRATTI, *A density theorem for some system*, in corso di stampa su : Rendiconti del Seminario Matematico di Padova.
- [3] E. DE GIORGI, *Sulle soluzioni globali di alcuni sistemi di equazioni differenziali*, Boll. UMI, 1975.
- [4] M. NACINOVICH, *Una osservazione su una congettura di De Giorgi*, Boll. UMI, (4) 12, 1975.
- [5] R. NARASIMHAN, *Analysis on real and complex Manifolds*, Masson e Cie, Paris, 1968.

Manoscritto pervenuto in redazione il 22 giugno 1977.