Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova

Adriana Brogini

Variabili casuali deboli

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 58 (1977), p. 55-64

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1977__58__55_0>

Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, Vol. 58 (1977)

Variabili casuali deboli.

Adriana Brogini (*)

1. - Introduzione.

L'oggetto di questo lavoro del quale, in questo articolo, ne sarà presentata solo la prima parte, è quello di studiare le variabili casuali, v. c., definite su uno spazio di probabilità generalizzato, che hanno come codominio un anello topologico (problemi del genere, anche per strutture algebrico-topologiche diverse, sono indicati in (5)).

Nel fatto: se (X, Σ_X, P) è uno spazio di probabilità, una v.c. definita su X è una funzione $f: X \to R$, tale che: se B è un boreliano di R, $f^{-1}(B) \in \Sigma_X$. Si impone, abbastanza facilmente, lo studio di quelle v.c. che hanno come codominio una struttura algebrico-topologica più generale di R.

Per poterla determinare si osservi che:

lo studio delle v.c. ha come strumento fondamentale il calcolo dei momenti delle stesse; risulta allora importante, che nella struttura del loro codominio si possano eseguire, in qualche modo, le operazioni di somma, differenza e di prodotto. Ne segue che tale codominio debba potersi atteggiare ad anello, A. Si imporrà che l'operazione di prodotto nell'anello sia commutativa e che l'anello contenga una coppia isomorfa del corpo reale al fine di poter parlare di media delle v.c. Una effettiva generalizzazione del caso v.c. reali, impone, poi, che l'anello possegga una valutazione, (definita in 2)), reale tale che: la valutazione, ristretta sulla copia isomorfa del corpo reale nell'anello coincida con la valutazione usuale reale: se

(*) Indirizzo dell'A.: Facoltà di Sc. St. Att. e Dem. dell'Università, I-35100 Padova.

$p : A \to R$, è la valutazione di A, per ogni $r \in R$, si abbia : $p(r) = |r|$. Per concludere si osservi che : nel corso del lavoro lo spazio di probabilità di partenza, verrà generalizzato nel modo seguente :

$X = (X, T')$ è spazio topologico, con topologia T', (la necessità di ciò è determinata dalla necessità di poter parlare di v.c. continue) ; Σ_X sarà su X l'algebra di Borel generata da T', (la più piccola σ-algebra di sottoinsiemi di X che contiene ogni aperto di T') ; P sarà funzione di insieme definita su Σ_X a valori nell'anello, per la quale si richiederà che soddisfi le ipotesi della def. 1).

A tal punto, i metodi dell'Analisi Funzionale suggeriscono la via per una trattazione delle funzioni $k : X \to A$, da considerarsi variabili casuali deboli : *k, come sopra, si dirà un variabile casuale debole, v.c.d., se e solo se per ogni omomorfismo f (di anello), continuo di A in R, si ha : $(f \circ k)^{-1}(B) \in \Sigma_X$ per ogni boreliano B di R.*

Nel n. 2) si introdurranno le ipotesi atte per una integrazione delle v.c.d. a valori dell'anello A. *Ciò permetterà di trattare un calcolo delle probabilità su queste v.c.d.* ; si otterrà : nel n. 3) *la diseguaglianza di Kolmogoroff* e nel n. 4), dopo l'introduzione di un « integrale forte » per le v.c.d., si otterrà *la legge dei grandi numeri*, che assicura per tali v.c.d., supposte come nelle ipotesi di pag. 9, la convergenza delle loro medie a zero a meno di un insieme $B \subseteq X$, tale che : $P(B) = 0$.

Al fine : desidero ringranziare il Prof. G. Bratti per la sua collaborazione a parte del n. 2) e alla redazione definitiva di questo lavoro ; come pure il Prof. A. Zanella per utili colloqui su questo argomento.

2. - Sia R il corpo reale e A sia un anello commutativo con unità : 1_A ; si supponga che :

A contiene una copia isomorfa di R, nel senso che : esiste un $g : R \to A$, con g isomorfismo di anello e $g(1_R) = 1_A$. D'ora in poi, la circostanza di sopra si scriverà : $R \subseteq A$, e $1_R = 1_A$.

Sia $p : A \to R$ una valutazione su A, cioè una mappa tale che :

i) $p(a) = 0$ se e solo se : $a = 0_A$; ii) $0 \leq p(-a) = p(a)$; iii) $p(a + b) \leq p(a) + p(b)$; iv) $p(ab) \leq p(a)\,p(b)$; v) se $r \in R$ e $a \in A$, $p(ra) = |r|(p(a)$ e $p(1_A) = 1_R$, (⁰)

Sull'anello A si ponga la topologia fornita dalla p : in essa una base di intorni dello zero è costituita dagli insiemi $V_n = (a \in A :$

(⁰) 1_R è inteso che sia l'unità proetiperativa dei reali.

$p(a) < 1/n)$, per ogni $n \in N$, così che : se $a \in A$ una base di intorni di a, è costituita dagli insiemi : $a + V_n = (a + b$, per ogni $b \in V_n)$. Indicata tale topologia con T_p, risulta facilmente : la coppia $A = (A, T_p)$ è un anello topologico separato (di Hausdorff). Sia A' il duale topologico si A, cioè : $A' = (f : A \to R$, con f omomorfismo di anello e f continuo). Sia T la topologia generata da A' su A : in essa una prebase di intorni di zero su A è costituita dagli insiemi $V(f, 1/n) = (a \in A : |f(a)| < 1/n)$; è ancora facile verificare che la coppia $A_0 = (A, T)$ è un anello topologico. D'ora in poi, la topologia T su A si dirà la topologia debole di A.

Nel corso del lavoro si considereranno solo quegli anelli A per i quali l'anello topologico A_0 è separato (1).

Sia Σ_A la σ-algebra di Borel generata da T_p su A, cioè la più piccola σ-algebra di sottoinsiemi di A che contiene ogni T_p-aperto di A.

Sia $X = (X, T')$ uno spazio topologico e sia Σ_X la sua σ-algebra di Borel.

Sia $P : \Sigma_X \to A$ una funzione di insieme tale che :

i) $P(X) = 1_A$ e $P(\varnothing) = 0_A$; ii) se B_i sono boreliani di X con la condizione che : $B_i \wedge B_j = \varnothing$, allora : $P(\sqcup_i B_i) = \Sigma_i P(B_i)$ non appena gli indici appartengono ad un insieme finito.

DEF. 1. *La quaterna (X, A, A', P) si dice uno spazio di probabilità generalizzato se e solo se : per ogni $f \in A'$, $f \neq 0_{A'}$, cioè f non identicamente nulla, si ha : $f \circ P = P_f : \Sigma_X \to R$, è una probabilità.*

Sia $k : X \to A$ un'applicazione.

DEF. 2. *k si dice una variabile casuale debole, v.c.d., se e solo se : per ogni $f \in A'$ e per ogni boreliano B di R, si ha : $(f \circ k)^{-1}(B) \in \Sigma_X$.*

---

(1) Un esempio di anello A soddisfacente ogni ipotesi richiesta è il seguente : $C^0_R = (h : [0, 1] \to R$, con h continua). Se su C^0_R si pone la topologia fornita dalla p, $p(h) = \max_{x \in [0,1]} |h(x)|$, cioè la topologia della convergenza uniforme sull'intervallo $[0, 1]$ delle funzioni continue ; per la p sono soddisfatte le ipotesi richieste ; C^0_R contiene le funzioni costanti che sono copia isomorfa di R. Inoltre : la verifica che C^0_R ha topologia debole separata è immediata se si osserva che : la mappa $\delta_{x_0} : C^0_R \to R$, $\delta_{x_0}(h) = h(x_0)$ è omomorfismo di anello continuo e che : se $h_1 \neq h_2$, per qualche x_1 di $[0, 1]$ si ha : $\delta_{x_1}(h_1) \neq \delta_{x_1}(h_2)$, così che : se $h_1(x_1) - h_2(x_1) = \varepsilon$, $(h_1 + V(\delta_{x_1}, \varepsilon/3)) \wedge (h_2 + V(\delta_{x_1}, \varepsilon/3)) = \varnothing$.

Siano B_i, $I \leq i \leq n$, boreliani di X tali che: $B_i \wedge B_j \neq \varnothing$, e $\sqcup_i B_i = X$.

Se a_i, $I \leq i \leq n$, sono elementi di A, l'applicazione $k : X \rightarrow A$, $k(x) = \Sigma_i a_i c_{B_i}(x)$, $c_{B_i}(x) = 1_A$, se $x \in B_i$, $c_{B_i}(x) = 0_A$ se $x \notin B_i$, è una v.c.d., poichè: se $f \in A'$, $f \circ k(x) = \Sigma_i f(a_i)\, \bar{c}_{B_i}(x)$, con $\bar{c}_{B_i}(x)$ funzione caratteristica di B_i. Ogni applicazione del tipo descritto sopra si dirà una variabile casuale debole e semplice, v.c.d.s.

DEF. 3. *Se $k : X \rightarrow A$ è una v.c.d.s., si pone:* $E(k) = \Sigma_i a_i P(B_i)$, *se* $k = \Sigma_i a_i c_{B_i}$.

Siano k_1 e k_2 v.c.d.s.; per ogni $f \in A'$ si pone: $d_f(k_1, k_2) = \int |f \circ k_1 - f \circ k_2| dP_f$, (2).

DEF. 4. *Una successione, k_n $n \in N$, di v.c.d.s., si dice debolmente fondamentale in media, se e solo se: per ogni $\varepsilon \in R_+$ e per ogni $f \in A'$, esiste $n_0 = n_0(f, \varepsilon)$ numero naturale, tale che: per ogni $n \geq n_0$ e per ogni $m \geq n_0$ si ha: $d_f(k_n, k_m) < \varepsilon$.*

Sia k_0 una v.c.d. e sia k_n, $n \in N$, una successione di v.c.d.s.

DEF. 5. *La successione k_n si dice debolmente convergente in probabilità verso la k_0, se e solo se; per ogni $\varepsilon \in R_+$ e per ogni $f \in A'$, f non identicamente nulla, si ha:* $\lim_n P_f(x \in X : |f_0 k_n - f_0 k_0| \geq \varepsilon) = 0$.

Sia $k : X \rightarrow A$ una v.c.d. e sia a un elemento di A.

DEF. 6) *Si dice che a è l'integrale debole di k, e si scrive: $\int k = a$, se e solo se: esiste una successione, k_n, $n \in N$, di* v.c.d.s. *tale che:*

i) *la successione k_n è debolmente convergente in probabilità verso la k;*

ii) *la successione è debolmente fondamentale in media;*

iii) $\lim_n \int k_n = a$ *nella topologia debole, cioè: per ogni $f \in A'$ si ha:* $f(\lim_n \int k_n) = \lim_n f(\int k_n) = f(a)$.

Dalla definizione di sopra ne viene: se k è una v.c.d. *debolmente integrabile in A, il suo integrale (debole) è unico.*

Infatti: si supponga che le coppie (a, k_n) e (a', k'_n) siano, per la v.c.d. k, come nella definizione 6). Dimostriamo che $a = a'$,

---

(2) Si usa il fatto che la differenza di due v.c.d. è ancora una v.c.d.

(con il che è anche dimostrato che l'integrale debole di una v.c.d., se esiste, è indipendente dalla scelta delle k_n, v.c.d.s.), (^{0})

Si ha:

per ogni $f \in A'$, le successioni $(f \circ k_n)$ e $(f \circ k'_n)$ convergono in P_f probabilità verso la $f \circ k$ e sono, ambedue, fondamentali in media (sempre rispetto alla P_f probabilità).

Per i noti teoremi sulla teoria dell'integrazione, $f \circ k$ risulta P_f integrabile e si ha:

$$\int f \circ k \, dP_f = \lim_n \int f \circ k_n \, dP_f = \lim_n \int f \circ k'_n \, dP_f, \tag{1}$$

Se si osserva che per ogni k, v.c.d.s., si ha: se $f \in A'$

$f(\int k) = \int f \circ k \, dP_f$, per la continuità della f, risulta: $\lim_n \int f \circ k_n dP_f = \lim_n f(\int k_n) = f(\lim_n \int k_n)$, così che, dalla (1), si ottiene: $\int f \circ k \, dP_f = f(\lim_n \int k_n) = f(a) = f(\lim_n \int k_n) = f(a')$.

Poichè A_0 è separato, l'equazione $f(a) = f(a')$, per ogni $f \in A'$, dà: $a = a'$.

Infatti: poichè $\bigwedge_{(f \in A' \text{ e } \varepsilon \in R+)} V(f, \varepsilon) = \{0_A\}$, cioè l'intersezione di ogni intorno di zero di A nella topologia T è lo zero di A, $f(a) = f(a')$ dà $a = a'$.

3. - Per ogni $k: X \to A$, v.c.d., e (debolmente) integrabile in A, si pone: $\int k = E(k)$.

Se anche k^2, che è ancora v.c.d., è (debolmente) integrale, allora lo è anche la v.c.d. $(k - E(k))^2$.

DEF. 7. *Se $k: X \to A$ è (debolmente) integrabile e anche k^2 lo è, (ambedue v.c.d.)), $E(k)$ si dice la media di k e $E((k - E(k))^2)$ si dice la varianza di k. Per brevità si porrà: $E((k - E(k))^2) = var(k)$.*

Per ogni $f \in A'$, risulta: $f(\mathrm{var}(k)) = \mathrm{var}(f \circ k)$ nella probabilità P_f.

Infatti: il primo termine di sopra è: $f(\int (k - E(k)^2)$, che, per le definizioni poste e per la continuità della f, coincide con: $\int f(k - E(k)^2) \, dP_f$. Per il fatto che f è omomorfismo di anello, si ha: $\int f(k - E(k))^2 \, dP_f = \int (f(k - E(k)))^2 \, dP_f = \int (f(k) - f(E(k)))^2 \, dP_f$ che è la $\mathrm{var}(f \circ k)$.

È anche facile controllare che: $\mathrm{var}(k) = E(k^2) - E(k)$.

(^{0}) che è preoccupazione compresa nel termine «unicità dell'integrale».

Infatti: per gli integrali deboli in A valgono ancora le usuali proprietà dell'integrale classico (proprietà additiva e proprietà distributiva).

Quanto fin qui ottenuto, permette di sviluppare un calcolo di probabilità relativo alle v.c.d. con valori in un anello (soddisfacente le ipotesi introdotte).

DEF. 8. *Se le* k_i, $1 \leq i \leq n$, $k_i : K \to A$, *sono v.c.d., esse si dicono debolmente indipendenti se e solo se: per ogni* $f \in A'$, f *non identicamente nulla, si ha* $f \circ k_i$, $i \leq i \leq n$, *sono v.c. indipendenti rispetto alla probabilità* P_f, *cioè: per ogni* B_i, $1 \leq i \leq n$, (*boreliano di* R), $P_f\big(\wedge_i(x \in X : f \circ k_i(x) \in B_i)\big) = \Pi_i P_f\big(x \in X : f \circ k_i(x) \in B_i\big)$.

DISEGUAGLIANZA GENERALIZZATA DI KOLMOGOROFF.

Se le k_i, $I \leq i \leq n$, $k_i : X \to A$, *sono v.c.d., debolmente indipendenti, di media zero e* $var(k_i) = a_i$, *posto*:
$s_m(x) = \Sigma_{i \leqslant m} k_i(x)$ *e, per ogni* $f \in A'$, $k_f(x) = \max_{m \leqslant n} |f \circ s_m(x)|$, *si ha: per ogni* $\varepsilon \in R_+$, $P_f\big(x \in X :\ k_f(x) \geq \varepsilon\big) \leq 1/\varepsilon^2 \Sigma_i f\big(var(k_i)\big) \leq 1/\varepsilon^2 \Sigma_i$ $p\big(var(k_i)\big)$.

DIMOSTRAZIONE. La prima parte della diseguaglianza di sopra si ottiene osservando che: $f \circ k_i$ sono v.c. reali indipendenti per la probabilità P_f e che: $f \circ s_k(x) = \Sigma_{i \leqslant k} f_0 k_i(x)$; inoltre: $f\big(\mathrm{var}(k_i)\big) = \mathrm{var}(f \circ k)$ in P_f probabilità.

È interessante l'ultima parte della diseguaglianza, poichè pone un limite superiore a $P_f(x \in X :\ k_f(x) \geq \varepsilon)$, indipendente da $f \in A'$.

Per la sua dimostrazione si osservi che è sufficiente dimostrare che: *per ogni* $a \in A$ *e per ogni* $f \in A'$ *si ha* $|f(a)| \leq p(a)$, *così che*:

$$1/\varepsilon^2 \Sigma_i f\big(\mathrm{var}(k_i)\big) = f\big(1/\varepsilon^2 \Sigma_i \mathrm{var}(k_i)\big) \leq p\big(1/\varepsilon^2 \Sigma_i \mathrm{var}(k_i)\big) \leq 1/\varepsilon^2 \Sigma_i p\big(\mathrm{var}(k_i)\big)$$

per l'additività della f, e per la sub-addittività della p.

Sia $f \in A'$; poichè f è omomorfismo continuo da $A = (A, T_p)$ in R con la topologia usuale, $S(f, 1) = (a \in A :\ |f(a)| \leq 1)$ è intorno di 0_A nella topologia T_p, (poichè immagine inversa mediante f dell'intorno, dello zero reale, $(-1, 1)$).

Poichè: se $b \in A$ e $b \neq 0_A$, $(1/n)b/p(b)$ sta in V_n, e per qualche $n \in N$ si ha: $S(f, 1) \supseteq V_n = (a \in A :\ p(a) \leq 1/n)$, deve risultare: $|f\big((1/n)bp(b)\big| \leq 1$, da cui: $|f(b)| \leq p(b)n$ per ogni $b \in A$.

Sia $E_f = (c \in R_+ : |f(a)| \leq cp(a)$, per ogni $a \in A)$. E_f non è vuoto per il risultato precedente.

Si ponga: $c' = \inf E_f$; risulta: $|f(a)| \leq c'p(a)$, poichè, se $c' \notin E_f$ esiste una successione c_n, $n \in N$, $c_n \in E_f$, con $\lim_n c_n = c'$, per ogni $n \in N$, vale: $|f(a)| \leq c_n p(a)$, per ogni $a \in A$, e, quindi, passando al limite: $|f(a)| \leq c'p(a)$.

Dimostriamo che $c' = 1$.

Infatti: se fosse $c' > 1$ esisterebbe $a \in A$ tale che: $|f(a)| > p(a)$, ovvero: $c' \geq |f(a)/p(a)| > 1$. Poichè: $|f(a^n)| \leq c'p(a^n) \leq c'p(a)^n$, $n \in N$, dovrebbe risultare: $c' \geq |f(a^n/p(a)^n)|$; il che è assurdo visto che $|f(a/p(a))| > 1$.

4. – D'ora in poi si assumerà:

l'anello topologico $A = (A, T_p)$ è completo e: se p è la valutazione di A, p o $P = P_p : \Sigma_x \to R$ è probabilità.

Analogamente a quanto nel n. 2) si porrà:

DEF. 9. $k : X \to A$ si dice p-misurabile se e solo se: per ogni boreliano $B \in \Sigma_A$ $k^{-1}(B) \in \Sigma_X$.

DEF. 10. $k : X \to A$, *p-misurabile, si dice fortemente integrabile in A se e solo se:*

esiste una successione di v.c.d.s., k_n, con le seguenti proprietà:

i) *per ogni* $\varepsilon \in R_+$: $\lim_n P_p\big(x \in X : p(k_n - k)(x) \geq \varepsilon\big) = 0$;

ii) $\lim_{m,n} \int p(k_n - k_m)\, dP_p = 0$.

(Brevemente: la proprietà i) si leggerà: la successione k_n è fortemente convergente in misura; la proprietà ii) si leggerà: la successione k_n è fondamentale fortemente in media).

Con la def. 10) *si porrà:* $\int k\, dP = \lim_n \int k_n$.

(Al solito si osservi che: se k è fortemente integrabile in A allora lo è anche p o k e risulta $p(\int k\, dP) \leq \int p_0 k\, dP_p)$.

LEMMA. *Sia $k : X \to A$ fortemente integrabile.*

Si supponga che esista una successione di v.c.d.s., k_n, $k_n(x) = \Sigma_i\, a_i^n\, c_{B_{i,n}}(x)$ con le $a_i^n \in R$ che converga, secondo la def. 10) *verso la k.*

Allora: se $\int k\, dP = 0$, per ogni f, $g \in A'$, $\int f \circ k\, dP_g = 0$, $(g \neq 0)$; se anche k^2 è fortemente integrabile in A, allora: $var(f \circ k)$ nella probabilità P_g non supera $(p \circ k)^2\, dP_p$.

DIMOSTRAZIONE. Poichè si ha:
$\lim_n P_g(x \in X: |fok_n - fok_m|(x) \geq \varepsilon) \leq \lim_n P_p(x \in X: p(k_n - k)(x) \geq \varepsilon) = 0$ e si ha: $\lim_{m,n} \int |fok_n - fok_m| \, dP_g \leq \int p(k_n - k_m) \, dP_g \leq \int p(k_n - k_m) \, dP_p = 0$, risulta subito che la $f \circ k$: $X \to R$ è P_g-integrabile e che: $\int f \circ k_n \, dP_g = 0$ poichè: $\int fok_n \, dP_g = \Sigma_i a_i^n P_g(B_{i,n}) = g(\Sigma_i a_i^n P(B_{i,n})) \leq p(\Sigma_i a_i^n P(B_{i,n})) = p(k_n)$ che tende a zero come n tende a $+\infty$.

Per la dimostrazione dell'ultima parte del lemma si osservi che: sia k'_n la successione di v.c.d.s. convergente come nella def. 10) verso la k^2.

Allora: $\mathrm{var}(f \circ k)$ nella probabilità P_g è: $\int (f \circ k)^2 \, dP_g$, visto che la media in P_g-probabilità di $f \circ k$ è zero; $\int (f \circ k)^2 \, dP_g = \int f \circ k^2 d \, P_g = \lim_n \int f \circ k'_n \, dP_g \leq \lim_n \int p \circ k'_n \, dP_p = \int p \circ k^2 \, dP_p$.

Infatti: la successione $p \circ k'_n$ è P_p-convergente in misura verso la $p_0 k^2$; inoltre essa è P_p fondamentale in media; ciò spiega l'ultima eguaglianza di sopra. Per la precedente diseguaglianza si ha: $f_0 k'_n(x) \leq p_0 k'_n(x)$ così che: $\int fok'_n \, dP_g \leq \int \Sigma_i \, pok'_n \, dP_g = \Sigma_i \, p(a_i^n) \, P_g(B_{i,n}) = g(\Sigma_i p(a_i^n) \, P(B_{i,n})) \leq p(\Sigma_i p(a_i^n) \, P(B_{i,n})) \leq p(a_i^n) \, P_p(B_{i,n}) = \int p_0 k'_n \, dP_p$.
La dimostrazione è conclusa.

Il lemma precedente permette la formulazione della *legge dei grandi numeri* (Bernoulli) per v.c.d. con valori in un anello.
A tal fine è utile la seguente definizione:

DEF. 11. *Se k_n è una successione di v.c.d. di X in A, esse si diranno completamente indipendenti se e solo se: per ogni $f \in A'$ la successione $f \circ k_n$ è indipendente rispetto ad ogni probabilità P_g, $g \in A'$, cioè:*

$$P_g\left(\bigwedge_{1}^{n}{}_i \, (x \in X: f \circ k_i(x) \in B_i\right) = \Pi_i P_g(x \in X: fok_i(x) \in B_i), \; i \leq m, \; m \in N,$$

B_i boreliano di R.

TEOREMA. *Sia $k_n: X \to A$, una successione di v.c.d., fortemente integrabili in A soddisfacenti le ipotesi del lemma precedente.*

Se la successione è completamente debolmente indipendente, e se: $\Sigma_n \left(\dfrac{\int p_0 \, k_n^2 \, dP_p}{n^2} \right)$ è convergente, allora: per ogni $f \in A'$ posto:

$$B_f = (x \in X: \lim_n \; (1/n) \Sigma_i^n \, fok_i(x) \neq 0), \quad \text{si ha: } P(B_f) = 0 .$$

DIMOSTRAZIONE. Si osservi che: rispetto alla probabilità P_g la successione $f \circ k_n$ ha le seguenti proprietà:

è una successione di variabili casuali indipendenti di media zero e di varianza: $\mathrm{var}(f \circ k_n)/n^2 \leq \int p \circ k_n^2 \, dP_p/n^2$. Allora: $P_g(B_f) = 0$. Ciò vale per ogni $g \in A'$; così che: $P(B_f) = 0$.

La dimostrazione è conclusa.

Per terminare questa prima parte dello studio delle v.c.d., si vuol mettere in evidenza come la generalizzazione qui introdotta sia effettivamente estensiva del caso classico.

Nell'ambito delle v.c. classiche, il più naturale esempio di spazio di probabilità è fornito dalla terna: $([0,1], \Sigma_{[0,1]}, P)$, dove P è la misura di Lebesgue su R. Una v.c. su tale spazio è una mappa $k : [0,1] \to R$ tale che: $k^{-1}(B) \in \Sigma_{[0,1]}$, per ogni boreliano B di R. È già stato messo in evidenza, in nota di pag. 3, come l'anello $C^0 = C_R^0([0,1])$ soddisfi ogni ipotesi richiesta nell'ambito di questo lavoro.

Si osservi che: se $P : \Sigma_{[0,1]} \to C^0$ è così definita: $P(H) = h_{P(H)}$, dove $h_{P(H)}$ indica la funzione costantemente eguale a $P(H)$ nell'intervallo $[0,1]$, la quaterna: $([0,1], C^0, (C^0)', P)$ è uno spazio di probabilità generalizzato poichè: se $g \in (C^0)'$, $g \circ P : \Sigma_{[0,1]} \to R$ è tale che: $g \circ P(H) = g(h_{P(H)}) = P(H)$ poichè $h_{P(H)}$ è l'immagine in C^0, mediante l'isomorfismo che inietta R nelle funzioni costanti sull'intervallo $[0,1]$, del numero $P(H)$, così che: $g(h_{P(H)}) = g(f(P(H))) = g \circ f(P(H))$, se f è l'isomorfismo di sopra. Ma $g \circ f$ è l'identità su R.

Se $k : [0,1] \to R$ è una v.c. classica, essa si può rappresentare in modo naturale come v.c.d. dello spazio di probabilità generalizzato di sopra. Infatti: a k si associ la $\hat{k} : [0,1] \to C^0$, così definita: $\hat{k}(x) = h_{k(x)}$, quest'ultima la funzione costantemente uguale a $k(x)$ sull'intervallo $[0,1]$.

Se $g \in (C^0)'$, $g \circ \hat{k}(x) = k(x)$, per ogni $x \in [0,1]$, per quanto dimostrato sopra.

Ciò indica che la k è v.c.d. del nostro spazio di probabilità generalizzato; *ovvero*: *ogni v.c. classica si può rappresentare come v.c.d.*

Dimostriamo che su $([0,1], C^0, (C^0)', P)$ si possono individuare v.c.d. non rappresentabili, nel modo di sopra, con v.c. classiche.

Sia $k : [0,1] \to C^0$ la mappa così definita: $k(x) = h(x\,;\ )$ dove $h(x\,;\ ) : t \mapsto h(x, t) = xt$, per ogni t di $[0,1]$. Se $g \in (C^0)'$, si ha: $g \circ k(x) = ax$, con $a \in R$, e per ogni $x \in [0,1]$. Infatti: la funzione

$t \mapsto h(x\,;t)$ è il prodotto delle funzioni: $t \mapsto t$, e $t \mapsto x$; per il fatto che g è omomorfismo di anello si ha:

$$g_0 k(x) = g\big((t \mapsto t)(t \mapsto x)\big) = g\big((t \mapsto t)\big) g\big((t \mapsto x)\big) = ax \text{ , se } a = g\big((t \mapsto t)\big)$$

visto che la funzione $t \mapsto x$ è costante e quindi su di essa valgono i ragionamenti di sopra. Che tale v.c.d. non sia rappresentabile con v.c. classiche è ovvio visto che per ogni $x \in [0,1]$ i valori delle rappresentanti di quest'ultime in C^0 sono funzioni costanti.

BIBLIOGRAFIA

[1] A. N. Kolmogoroff, *Foundations of the teory of probability*, Chelsea Publishing Company, N. Y., 1956.
[2] P. Halmos, *Measure Theory*, D. Van Nostrand Company Inc., 1950.
[3] X. Loeve, *Probability Theory*, idem.
[4] J. L. Kelley, *General Topology*, idem.
[5] J. Neveu, *Bases mathematiques de calcul des probabilités*, Masson e Cie, 1970.
[6] W. Feller, *An introduction to probability theory and its applications*, J. Wiley & Sons, Inc., Voll. I, II, 1966.
[7] S. S. Wilks, *Mathematical Statistics*, idem, 1962.

Manoscritto pervenuto in redazione il 25 maggio 1977.