RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

F. PARODI

Costruzione di un universo di dispositivi non lineari su una coppia di gruppi abeliani

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 58 (1977), p. 45-54

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1977__58__45_0>

REND. SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol. 58 (1977)

Costruzione di un universo di dispositivi non lineari su una coppia di gruppi abeliani

F. PARODI (*)

Introduzione.

G. Darbo ha trattato in forma assiomatica la « teoria dei dispositivi », generalizzando il concetto di dispositivo elettrico (Network). L'esigenza fondamentale di considerare totalità di dispositivi chiuse rispetto alla « composizione in rete » ha condotto alla nozione di Universo di dispositivi [1].

In questo lavoro mi propongo di costruire, a partire da una coppia (X, Y) di gruppi abeliani, un universo di dispositivi « non lineare » nel senso che alcune proprietà lo distinguono in modo essenziale dagli universi lineari.

In tale universo, che chiamo universo totale su (X, Y), un dispositivo ad n terminali è caratterizzato dall'insieme dei funzionamenti ammissibili, cioè da un sottoinsieme $A \subset X^n \times Y_n$ contenente il funzionamento nullo $(0, 0)$.

L'universo totale si presenta come un ampliamento dell'universo lineare su X, Y definito in [1].

La struttura di gruppo su X ed Y può essere arricchita in seguito per poter delimitare alcuni sottouniversi dell'universo totale. Ad esempio se X ed Y si identificano al gruppo additivo del corpo reale $\mathbb{R}$ si potrà individuare nell'universo totale il sottouniverso dei dispositivi « monotoni », cioè costituito da quei dispositivi il cui insieme di funzionamenti è un insieme monotono.

(*) Indirizzo dell'A.: Istituto di Matematica - Università - Via L. B. Alberti, 4 - Genova.

Già nell'universo lineare su un corpo non tutti i dispositivi hanno interesse dal punto di vista del significato fisico, ma le proprietà di passività (rispetto ad un insieme di strutture paracomplesse) e di massimalità individuano il sottouniverso dei dispositivi « fisicamente realizzabili ».

Nel caso particolare dell'universo totale su $\mathbb{R}$ la monotonia può essere la proprietà che estende al caso non lineare la passività, tuttavia i dispositivi monotoni massimali non costituiscono un sottouniverso dell'universo totale, essendo ben noto che esistono insiemi monotoni massimali la cui somma, (composizione in parallelo) non è massimale.

Resta aperto a questo punto il problema di individuare nel caso non lineare le proprietà universali che caratterizzano la fisica realizzabilità e di delimitare in qualche universo totale un sottouniverso non lineare che sia fisicamente significativo.

— Siano X ed Y gruppi abeliani, $\mathcal{C}$ la categoria dei gruppi abeliani; sia $\mathcal{S}_0$ la categoria degli insiemi finiti e applicazioni.

Consideriamo i futuri:

$X^\alpha : \mathcal{S}_0 \to \mathcal{C}$ controvariante, $Y_\alpha : \mathcal{S}_0 \to \mathcal{C}$ covariante (1) è noto che tali funtori sono esatti nel senso che mutano quadrati di applicazioni completamente commutativi in $\mathcal{T}$ categoria dei trasduttori, in quadrati esatti di morfismi di $\mathcal{C}$ cioè in quadrati completamente commutativi nella categoria delle relazioni $\tilde{\mathcal{C}}$.

Allora entrambi possono essere estesi a funtori: [2] $X^\alpha : T \to \tilde{\mathcal{C}}$ controvariante, $Y_\alpha : \mathcal{T} \to \tilde{\mathcal{C}}$ covariante, univocamente con la condizione che commutino con le antinvoluzioni.

— Consideriamo ora il funtore $|-| : \mathcal{C} \to 0\text{-}\mathcal{S}$ supporto insiemistico dove $0\text{-}\mathcal{S}$ è la categoria degli insiemi con punto base, è ovvio che tale funtore muta Pull-back in Pull-back (non Push-out in Push-out!) e conserva altresì monomorfismi ed epimorfismi quindi può essere esteso in modo unico ad un funtore $|-| : \tilde{\mathcal{C}} \to \widehat{0\text{-}\mathcal{S}}$ dove $\widehat{0\text{-}\mathcal{S}}$ è la categoria delle corrispondenze fra insiemi con punto base che diremo la categoria delle 0-corrispondenze.

---

(1) In questo lavoro si fa costante riferimento per quanto riguarda notazioni e terminologia al lavoro di G. Darbo « Aspetti algebrico-categoriali della teoria dei dispositivi ». [1]

Si hanno così per composizione i funtori

$|X^\alpha| : \mathfrak{T} \to \widehat{0\text{-}\mathfrak{S}}$ controvariante

$|Y_\alpha| : \mathfrak{T} \to \widehat{0\text{-}\mathfrak{S}}$ covariante

per semplicità di notazione scriveremo ancora X^α, Y_α al posto di $|X^\alpha|$, $|Y_\alpha|$ tutte le volte che ciò non crea ambiguità.

— Sia $\mathfrak{D} : \mathfrak{T} \to \mathfrak{S}$ il funtore covariante

$$\mathfrak{D}_\alpha = \mathrm{Map}_{\widehat{0-\mathfrak{S}}} (X^\alpha , Y_\alpha)$$

definito nel modo ovvio.

Un elemento A di $\mathfrak{D}_\alpha$ è una o-corrispondenza di X^α in Y_α ovvero un sottoinsieme del prodotto $X^\alpha \times Y_\alpha$ tale che $(0, 0) \in A$, se poi $\Gamma : \alpha \to \beta$ è un trasduttore ed $A : X^\alpha \to Y_\alpha$ è una o-corrispondenza $\Gamma_* (A) = \Gamma_. A \Gamma^\cdot$

$$\begin{tikzcd}
X^\alpha \arrow[r, "A"] & Y_\alpha \\
X^\beta \arrow[u, "\Gamma^\cdot"] \arrow[r, "\Gamma_*(A)"'] & Y_\beta \arrow[u, "\Gamma_."']
\end{tikzcd}$$

dove $\Gamma^\cdot$ denota il trasformato di Γ mediante $X^\alpha : \mathfrak{T} \to \widehat{0\text{-}\mathfrak{S}}$

$\Gamma_.$ denota il trasformato di Γ mediante $Y_\alpha : \mathfrak{T} \to \widehat{0\text{-}\mathfrak{S}}$

— Sia $\sigma_{\alpha,\beta} : \mathfrak{D}_\alpha \times \mathfrak{D}_\beta \to \mathfrak{D}_{\alpha+\beta}$ la trasformazione naturale definita

se $A : X^\alpha \to Y_\alpha$ e $B : X^\beta \to Y_\beta$ sono o-corrispondenze

$$\sigma_{\alpha,\beta} (A , B) = A \times B ,$$

$A \times B$ può essere pensata in modo naturale come o-corrispondenza di $X^{\alpha+\beta}$ in $Y_{\alpha+\beta}$.

Teorema $(\mathfrak{D} , \sigma)$ è un universo di dispositivi.

Dim. Si deve provare che $(\mathfrak{D}, \sigma)$ verifica gli assiomi seguenti: [1]

1) Assioma di restrizione.

È commutativo il diagramma:

$$\begin{tikzcd} D_\alpha \times D_\beta \arrow[r, "\sigma_{\alpha,\beta}"'] \arrow[dr, "\pi"'] & D_{\alpha+\beta} \arrow[d, "\varrho_*"] \\ & D_\alpha \end{tikzcd}$$

dove π proiezione canonica, ϱ_* applicazione indotta dal funtore sul trasduttore $\varrho : \alpha + \beta \to \alpha$ reciproco dell'inclusione canonica.

2) Assioma di commutatività.

È commutativo il diagramma

$$\begin{tikzcd} D_\alpha \times D_\beta \arrow[r, "\sigma_{\alpha,\beta}"'] \arrow[d] & D_{\alpha+\beta} \arrow[d] \\ D_\beta \times D_\alpha \arrow[r, "\sigma_{\beta,\alpha}"'] & D_{\beta+\alpha} \end{tikzcd}$$

dove le frecce verticali sono gli isomorfismi canonici.

3) Assioma di associatività.

È commutativo il diagramma

$$\begin{tikzcd} (D_\alpha \times D_\beta) \times D_\gamma \arrow[r] \arrow[d] & D_{(\alpha+\beta)+\gamma} \arrow[d] \\ D_\alpha \times (D_\beta \times D_\gamma) \arrow[r] & D_{\alpha+(\beta+\gamma)} \end{tikzcd}$$

dove le frecce verticali sono gli isomorfismi canonici.

4) Assioma di unità.

$$\mathfrak{D}_\emptyset = \{1\} .$$

La verifica degli assiomi 2, 3, 4 è banale; verifichiamo l'assioma 1) di restrizione.

Províamo cioè che se $A : X^\alpha \to Y_\alpha$, $B : X^\beta \to Y_\beta$ sono o-corrispondenze $A = \varrho_{.}\,(A \times B)\,\varrho^{\cdot}$.

Consideriamo i seguenti diagrammi commutativi:

$$\begin{tikzcd}
X^\alpha & X^\alpha \times Y_\alpha \arrow[l] \arrow[r] & Y_\alpha \\
& A \arrow[ul, "\varphi_A"] \arrow[u] \arrow[ur, "\psi_A"'] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
X^\beta & X^\beta \times Y_\beta \arrow[l] \arrow[r] & Y_\beta \\
& B \arrow[ul, "\varphi_B"] \arrow[u] \arrow[ur, "\psi_B"'] &
\end{tikzcd}$$

(le frecce verticali sono inclusioni, le frecce orizzontali sono proiezioni).

$$\begin{tikzcd}
X^\alpha & & & & \\
& X^\alpha \times X^\beta \arrow[ul, "\iota^{\cdot}"'] & & Y_\alpha \times Y_\beta & \\
& & A \times B \arrow[ul, "\varphi_A \times \varphi_B"'] \arrow[ur, "\psi_A \times \psi_B"'] & & Y^\alpha \arrow[ul, "\iota_{.}"'] \\
& & & A \times \psi_B^{-1}(0) \arrow[ul, "1 \times \mu"'] \arrow[ur, "\psi \times 0"'] &
\end{tikzcd}$$

Nel diagramma μ è l'inclusione $\mu : \psi^{-1}(0) \to B$, il quadrato è ovviamente un Pull-back quindi completamente commutativo, inoltre identificando $X^\alpha = X^\alpha \times 0$, $Y_\alpha = Y_\alpha \times 0$ si ha $\iota^{\cdot} = 1 \times 0$ e $\iota_{.} = 1 \times 0$ segue allora:

$$\varrho_{.}\,(A \times B)\,\varrho^{\cdot} = \tilde{\iota}_{.}\,(A \times B)\,\tilde{\iota}^{\cdot} = \tilde{\iota}_{.}\,(\psi_A \times \psi_B)\,(\widetilde{\varphi_A \times \varphi_B})\,\tilde{\iota}^{\cdot} =$$

$$= (\psi_A \times 0)\,(\widetilde{1 \times \mu})\,(\widetilde{\varphi_A \times \varphi_B})\,\tilde{\iota}^{\cdot} = (\psi_A \times 0)\,(\widetilde{\varphi_A \times \varphi_B\,\mu})\,(\widetilde{1 \times 0}) =$$

$$= (\psi_A \times 0)\,(\widetilde{\varphi_A \times 0}) = \psi_A\,\tilde{\varphi}_A = A\,.$$

OSSERVAZIONE. Si noti che è essenziale considerare o-corrispondenze, se si considerassero tutte le corrispondenze risulterebbe $\mathfrak{D}_{\varnothing}$ costituito da due elementi, non sarebbe così verificato l'assioma 4) di unicità, così come non sarebbe neppure verificato l'assioma 1) di restrizione.

— L'universo ora introdotto è individuato dalla assegnazione nella categoria dei gruppi abeliani dei due oggetti X ed Y, e lo chiameremo « UNIVERSO TOTALE » dei dispositivi su X ed Y.

TEOREMA. L'universo dei dispositivi lineari su X ed Y è un sottouniverso dell'universo totale.

— Dunque l'universo totale si presenta come un ampliamento dell'universo lineare su X ed Y, esso è interessante in quanto costituisce un primo esempio di « universo non lineare ».

Alcuni esempi mostrano infatti che questo universo non gode di alcune proprietà degli universi di dispositivi lineari e dei loro sottouniversi.

Più precisamente mostreremo che nell'« universo totale »:

— le potenze non sono endomorfismi di universo;

— i dispositivi idempotenti non costituiscono un sottouniverso, mentre è ben noto [1] che negli universi di dispositivi lineari:

— le potenze sono endomorfismi di universo;

— i dispositivi idempotenti costituiscono un sottouniverso.

— Caratterizziamo nell'universo totale alcuni dispositivi e le operazioni fondamentali che utilizzeremo nel seguito, omettiamo le ovvie dimostrazioni.

Risulta comodo per semplicità di notazione identificare ogni corrispondenza con il suo grafico, così avrà senso se $A \in \mathfrak{D}_\alpha$ e se $x \in X^\alpha$ e $y \in Y_\alpha$ la notazione $(x, y) \in A$; diremo $(x, y) \in A$ un funzionamento di A, A è individuato allora dall'insieme dei suoi funzionamenti.

— Il dispositivo « collegamento perfetto a due terminali è

$$E_{1,2} = \{(x_1, x_2; y_1, y_2) \mid x_1 = x_2 \;\&\; y_1 + y_2 = 0\}$$

— Se A è un dispositivo sugli n terminali $\{1, 2, \dots n\}$, $n \geq 1$ caratterizziamo l'operazione « soppressione di un terminale »

$$\hat{1} A = \{(x_2, \dots x_n; y_2, \dots y_n) \mid (\exists\, x_1) \quad (x_1, x_2, \dots x_n; 0, y_2, \dots y_n) \in A\}$$

— Se A è un dispositivo sugli n terminali $\{1, 2, \dots n\}$, $n \geq 2$ il dispositivo B che si ottiene da A per identificazione dei terminali 1 e 2 è il seguente:

$$B = \{(x, x_3 \dots x_n ; y, y_3 \dots y_n) \mid (\exists\, x_1\, x_2\, y_1\, y_2)\ (x_1, x_2 \dots x_n ; y_1, y_2 \dots y_n) \in A \ \&\ x_1 = x = x_2 \ \&\ y = y_1 + y_2\}$$

— Se A e B sono dispositivi sui terminali 1, 2, ... n, il dispositivo che si ottiene collegandoli in parallelo è

$$A\ B = \{(x_1 \dots x_n ; y_1 \dots y_n) \mid (\exists y_1' \dots y_n' y_1'' \dots y_n'')\ (x_1 \dots x_n ; y_2' \dots y_n') \in A \ \& \ (x_1 \dots x_n ; y_1'' \dots y_n'') \in B \ \& \ y_1 = y_1' + y_1'' 1 = 1, 2 \dots n.\}$$

— Il dispositivo « neutro sui terminali 1, 2, ... , n è

$$1_{1,2,\dots,n} = \{(x_1, x_2, \dots, x_n ; 0, 0, \dots 0) \mid x_1 \in X = 1, 2, \dots, n\}$$

— Il dispositivo « terra sui terminali 1, 2, ... , n è

$$\perp_{1,2,\dots,n} = \{(0, 0, \dots, 0 ; y_1, y_2, \dots, y_n) \mid y_1 \in y\ L = 1, 2, \dots, n\}$$

ESEMPIO. Mostriamo con un esempio che nell'universo totale su X ed Y se $X \neq 0$ ed $Y \neq 0$ la potenza « due » non è un endomorfismo di universo.

Siano dunque $X \neq 0$ e $x \in X$ $x \neq 0$, $Y \neq 0$ e $y \in Y$ $y \neq 0$ consideriamo $A \in \mathfrak{D}_{\}1,2\{}$, $A = \{(0,0 ; 0,0), (0, x ; 0, y), (x, x ; 0,0)\}$ risulta dalle caratterizzazioni viste

$$A^2 = \{(0, 0 ; 0, 0), (0, x ; 0, 2y), (x, x ; 0, 0)\}$$

$$\hat{1}\,(A^2) = \{(0 ; 0), (x ; 2y), (x ; 0)\}$$

$$\hat{1}\,A = \{(0 ; 0), (x ; y), (x ; 0)\}$$

$$(\hat{1}\,A)^2 = \{(0 ; 0), (x ; 2y), (x ; y), (x ; 0)\}$$

È evidente allora $(\hat{1}\,A)^2 \neq \hat{1}\,(A^2)$ poichè $(x ; y) \in (\hat{1}\,A)^2$ mentre $(x ; y) \notin \hat{1}\,(A^2)$.

ESEMPIO. Mostriamo con un esempio che nell'universo totale su X ed Y, per opportuni X ed Y, i dispositivi idempotenti non costituiscono un sottouniverso.

Siano $X = \mathbb{Z}$, $Y = \mathbb{Z}$ ($\mathbb{Z}$ gruppo additivo dell'anello degli interi)

Sia $A \in \mathfrak{D}_{\{1,2\}}$,
$A = \{(0, 0\ ;\ 0, 0)\} \cup \{(0, 1\ ;\ 0, 2k) \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{(1, 1\ ;\ 0, 3h) \mid h \in \mathbb{Z}\}$
è ovvio delle caratterizzazioni viste che $A = A^2$

$$\hat{1}\, A = \{(0\ ;\ 0)\} \cup \{(1\ ;\ 2k) \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{(1\ ;\ 3h) \mid h \in \mathbb{Z})\}$$

$$(\hat{1}\, A)^2 = \{(0\ ;\ 0)\} \cup \{(1\ ;\ z) \mid z \in \mathbb{Z}\}$$

risulta allora ovviamente $\hat{1}\, A \neq (\hat{1}\, A)^2$.

Dunque gli esempi mostrati distinguono essenzialmente l'universo totale su X ed Y da qualunque universo lineare, nel senso che certamente non è isomorfo ad alcun universo lineare nè a loro sottouniversi.

Per tale motivo questo universo è interessante infatti si pensa di poter realizzare alcuni universi «non lineari» significativi anche del punto di vista delle applicazioni come suoi particolari sottouniversi.

In tale intento presentiamo alcuni sottouniversi dell'universo totale.

Universo generato dagli insiemi algebrici.

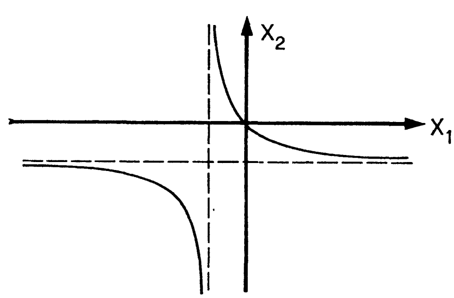
Sia k un corpo, e siano $X = k$, $Y = k$.

Consideriamo in $\mathfrak{D}_\alpha$ gli insiemi algebrici che passano per l'origine delle coordinate dello spazio $k^\alpha \times k_\alpha$, ovvero gli insiemi A costituiti dagli zeri di un numero finito di polinomi $f_1, \dots f_r$ di $k\,[\alpha + \alpha]$ nulli nell'origine.

Si vede con un semplice esempio che gli insiemi algebrici non costituiscono un sottouniverso infatti sia $A \subset k^2 \times k_2$

$$A = \{(x_1, x_2\ ;\ 0, 0) \mid x_2 x_1 + x_2 - x_1 = 0\}$$

che essendo $y_1 = 0 = y_2$ possiamo rappresentare nel piano



risulta $\hat{2}\ A = \{(x_1, 0) \mid x_1 \neq -1\}$ ed è ovvio che questo non è un insieme algebrico se k non è finito.

Consideriamo in $k^\alpha \times k_\alpha$ gli insiemi che si ottengono proiettando insiemi algebrici passanti per l'origine delle coordinate di $k^\alpha \times k_\alpha \times k^\lambda$ (λ insieme finito) sullo spazio $k^\alpha \times k_\alpha$ mediante la proiezione canonica. Un tale insieme A può essere descritto come segue $A = \{(x, y) \mid (\exists z)\, z \in k^\lambda,\ f_1(x, y, z) = 0, \dots, f_r(x, y, z) = 0\}$ con λ insieme finito, $f_1, \dots f_r \in k[a + a + \lambda]$, $z = (z_1 \dots z_p)$ essendo considerata una p-upla di parametri.

— Proviamo che la totalità di tali insiemi costituisce un sottouniverso dell'universo totale, anzi l'universo generato dagli insiem algebrici.

Infatti sia $A \in \mathfrak{D}_{\{1,2,\dots,n\}}$ descritto dalle soluzioni del sistema di equazioni algebriche $f_1(x_1 \dots x_n\, y_1 \dots y_n, \Lambda_1 \dots \Lambda_p) = 0, \dots, f_r(x_1 \dots x_n\, y_1 \dots y_n\, \Lambda_1 \dots \Lambda_p) = 0$ nelle variabili $x_1 \dots x_n\, y_1 \dots y_n$ al variare dei parametri $\Lambda_1 \dots \Lambda_p$.

$\hat{1}\, A$ risulta individuato dalle equazioni:
$y_1 = 0, f_1(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2 \dots y_n, \Lambda_1 \dots \Lambda_p) = 0$ $i = 1, 2, \dots r.$ nelle variabili $x_2 \dots x_n, y_2 \dots y_n$ al variare dei parametri $x_1, y_1, \Lambda_1, \dots, \Lambda_p$.

Il dispositivo B che si ottiene da A per cortocircuitazione dei terminali 1 e 2 è individuato dalle equazioni:
$y = y_1 + y_2$, $x = x_1$, $x = x_2$, $f_1(x_1, x_2, x_3, \dots x_n, y_1, y_2\, y_3, \dots y_n, \Lambda_1 \dots \Lambda_p) = 0$ $i = 1, 2 \dots r.$ nelle variabili $x, x_3 \dots x_n, y, y_3 \dots y_n$ al variare dei parametri $x_1, x_2, y_1, y_2, \Lambda_1 \dots \Lambda_p$.

È poi ovvio che se $A \in \mathfrak{D}_\alpha$, $B \in \mathfrak{D}_\beta$ sono dispositivi del tipo detto, anche $A \times B$ è dello stesso tipo; questo basta per mostrare che costituiscono un sottouniverso.

Per provare che tale sottouniverso è generato dagli insiemi algebrici mostreremo che ogni proiezione di insieme algebrico si ottiene da un insieme algebrico per soppressione di terminali e ciò basta ovviamente per concludere.

Sia dunque A proiezione di insieme algebrico su $k^\alpha \times k_\alpha$, $\alpha = \{1, 2 \dots n\}$ individuato dalle equazioni $f_i(x_1 \dots x_n, y_1 \dots y_n, x_{n+1} \dots x_{n+p}) = 0$ $i = 1, 2 \dots r$, nelle variabili $x_1 \dots x_n\, y_1 \dots y_n$ al variare dei parametri $x_{n+1}, \dots x_{n+p}$; posto $\lambda = \{1, 2 \dots p\}$ risulta $A = \hat{\lambda} B$, dove B è l'insieme algebrico di $k^{\alpha+\lambda} \times k_{\alpha+\lambda}$ individuato dalle equazioni $y_{n+1} = 0, \dots y_{n+p} = 0$, $F_i(x_1 \dots x_n, y_1 \dots y_n, x_{n+1} \dots x_{n+p}) = 0$ $i = 1, 2 \dots r.$ nelle variabili $x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+p}, y_1, \dots y_n, y_{n+1}, \dots y_{n+p}$.

OSSERVAZIONE. Il sottouniverso; dell'universo ora descritto dei dispositivi a correnti nulle ($y_i = 0$) è interessante, esso può essere interpretato in modo geometrico. Ad esempio il collegamento in parallelo di due dispositivi A e B sugli stessi terminali corrisponde alla intersezione dei due insiemi A e B, l'operazione di soppressione di un terminale corrisponde alla operazione di proiezione parallela all'asse omonimo, sul sottospazio fondamentale delle rimanenti coordinate.

Il fatto che gli insiemi algebrici non costituiscono un sottouniverso ha allora una interpretazione geometrica nel fatto che proiezioni di insiemi algebrici possono non essere insiemi algebrici.

OSSERVAZIONE. Quanto esposto per insiemi algebrici può facilmente con ovvie modifiche essere ripetuto per insiemi analitici qualora sia k corpo valutato completo.

SOTTOUNIVERSO DEGLI INSIEMI CONVESSI.

Jia $k = \mathbb{R}$, e siano X, Y spazi vettoriali su $\mathbb{R}$ ($\mathbb{R}$ campo dei reali) è immediato provare che gli insiemi convessi di $X^\alpha \times Y_\alpha$ costituiscono un sottouniverso dell'universo totale.

SOTTOUNIVERSO DEGLI INSIEMI MONOTONI.

Sia $k = \mathbb{R}$, e siano $X = \mathbb{R}$ $Y = \mathbb{R}$
$A \subset \mathbb{R}^\alpha \times \mathbb{R}_\alpha$ è detto insieme monotono se per ogni $(x_1; y_1)$, $(x_2; y_2) \in A$ $(x_2 - x_1) \times (y_1 - y_2) \geq 0$ ($\times$ denota il prodotto scalare) è immediato provare che gli insiemi monotoni costituiscono un sottouniverso dell'universo totale.

— È ovvio che questo universo include quale suo sottouniverso l'universo dei dispositivi lineari passivi.

BIBLIOGRAFIA

[1] G. DARBO, *Aspetti algebrico categoriali della teoria dei dispositivi*, Symposia Mathematica, Vol. IV, 303-336 (1970).

[2] F. PARODI, *Simmetrizzazioni di una categoria* : parte I e II Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, Vol. XLIV 185-262 (1970) ; parte III Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, Vol. XLVI 273-327 (1971).

Manoscritto pervenuto in redazione il 17 maggio 1977.