

# RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

RENATO ZANOVELLO

## **Integrali di funzioni di Anger, Weber ed Airy-Hardy**

*Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova*,  
tome 58 (1977), p. 275-285

<[http://www.numdam.org/item?id=RSMUP\\_1977\\_\\_58\\_\\_275\\_0](http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1977__58__275_0)>

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1977, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques*  
<http://www.numdam.org/>

## Integrali di funzioni di Anger, Weber ed Airy-Hardy (\*\*)

RENATO ZANOVELLO (\*)

SUNTO - In questo lavoro vengono esaminati gli integrali che si presentano in questioni di matematica applicata :

$$\int_0^{\infty} Ei_n(x) dx, \int_0^{\infty} x^{\lambda-1} J_\nu(x) dx, \int_0^{\infty} x^{\lambda-1} E_\nu(x) dx,$$

ove i simboli sono specificati nel contesto del lavoro stesso.

Per la risoluzione di alcuni problemi fisici, si fa ricorso agli integrali di Airy-Hardy [1, p. 320 e segg.]; in relazione ad essi, esamino nel presente lavoro, l'integrale

$$(1) \quad \int_0^{\infty} Ei_n(x) dx, \quad (n = 2, 3, 4, \dots),$$

ove

$$(2) \quad Ei_n(x) = \int_0^{\infty} e^{-T_n(t,x)} dt,$$

---

(\*) Indirizzo dell'A.: Centro di Calcolo Scientifico, Università - Via Belzoni 7 - Padova.

(\*\*) Lavoro eseguito nell'ambito dei Gruppi di Ricerca Matematica del C.N.R.

$$(3) \quad T_n(t, x) = t^n {}_2F_1 \left( -\frac{n}{2}, \frac{1-n}{2}; 1-n; -\frac{4x}{t^2} \right),$$

e ove  ${}_2F_1$  indica la classica funzione ipergeometrica di Gauss. Ricordo che  $Ei_n(z)$  è una funzione intera di  $z$ .

Nota subito che dalle (2), (3) e' :

$$(4) \quad Ei_n(0) = \frac{1}{n} \Gamma \left( \frac{1}{n} \right).$$

Per la soluzione del mio problema, sarà necessario valutare preliminarmente anche gli integrali  $\int_0^\infty x^{\lambda-1} J_\nu(x) dx$ ,  $\int_0^\infty x^{\lambda-1} E_\nu(x) dx$ , che non mi risultano esplicitati in letteratura, con il significato dei simboli specificato nel § 1.

§ 1. Innanzitutto considero allora, in generale, i seguenti integrali :

$$(5) \quad \int_0^\infty x^{\lambda-1} J_\nu(x) dx \quad , \quad \int_0^\infty x^{\lambda-1} E_\nu(x) dx \quad ,$$

ove  $J_\nu(x)$  ed  $E_\nu(x)$  indicano rispettivamente le classiche funzioni di Anger e di Weber [1, p. 308 e segg.], con  $\nu$  reale e  $\lambda$  variabile nell'intervallo aperto  $(0, 3/2)$ .

Comincio dal primo dei due integrali che figurano in (5) e ricordo che è, in generale :

$$(6) \quad J_\nu(x) = \frac{\sin(\nu\pi)}{\pi} \left[ -\nu \cdot s_{-1,\nu}(x) + s_{0,\nu}(x) \right],$$

ove  $s_{-1,\nu}$  e  $s_{0,\nu}$  indicano particolari funzioni di Lommel [1, p. 345 e segg.].

Distinguo quattro casi :

I)  $\lambda \neq 1, \nu \neq 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Moltiplico ambo i membri di (6) per  $x^{\lambda-1}$  ed integro in  $(0, \infty)$ ; ottengo, tenuto conto di [2] :

$$(7) \int_0^\infty x^{\lambda-1} J_\nu(x) dx = -\frac{\nu \sin(\nu\pi)}{\pi} \frac{\Gamma\left(\frac{\lambda}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{\lambda}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)\Gamma\left(-\frac{\nu}{2}\right)}{2^{3-\lambda}\Gamma\left(1+\frac{\nu-\lambda}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{\nu+\lambda}{2}\right)} +$$

$$+ \frac{\sin(\nu\pi)}{\pi} \frac{\Gamma\left(\frac{1+\lambda}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-\lambda}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1+\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-\nu}{2}\right)}{2^{2-\lambda}\Gamma\left(1+\frac{\nu-\lambda}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{\nu+\lambda}{2}\right)}.$$

II)  $\lambda \neq 1, \nu = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Poichè è [3] :

$$(8) \quad J_\nu(x) = J_\nu(x), \quad (\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \dots),$$

ove  $J_\nu(x)$  è la classica funzione di Bessel di prima specie, ricavo per  $\nu$  intero positivo o nullo :

$$(9) \quad \int_0^\infty x^{\lambda-1} J_\nu(x) dx = \frac{2^{\lambda-1} \Gamma\left(\frac{\nu+\lambda}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu-\lambda}{2}+1\right)},$$

come risulta mediante la formula [3, p. 49].

Per  $\nu$  intero negativo, ricordo che è

$$(10) \quad J_\nu(x) = (-1)^{-\nu} J_{-\nu}(x),$$

dal che deduco che, in tale circostanza, posso scrivere :

$$(11) \quad \int_0^{\infty} x^{\lambda-1} \mathbf{J}_{\nu}(x) dx = (-1)^{-\nu} \int_0^{\infty} x^{\lambda-1} \mathbf{J}_{-\nu}(x) dx = (-1)^{-\nu} \frac{2^{\lambda-1} \Gamma\left(\frac{\lambda-\nu}{2}\right)}{\Gamma\left(1 - \frac{\lambda+\nu}{2}\right)}.$$

III)  $\lambda = 1, \nu = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

In questo caso, per  $\nu$  intero positivo o nullo, posso scrivere, ricordando la (8) ed un noto risultato [4, p. 486] :

$$(12) \quad \int_0^{\infty} \mathbf{J}_{\nu}(x) dx = 1,$$

mentre, per  $\nu$  intero negativo, tenendo presente anche la (10), ho :

$$(13) \quad \int_0^{\infty} \mathbf{J}_{\nu}(x) dx = (-1)^{-\nu} \int_0^{\infty} \mathbf{J}_{-\nu}(x) dx = (-1)^{-\nu}.$$

IV)  $\lambda = 1, \nu \neq 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

In tal caso, il primo integrale che figura in (5) diverge, come si può vedere dalla (6), ricordando noti teoremi e tenendo presente

che per [2],  $\int_0^{\infty} s_{-1,\nu}(x) dx$  converge, mentre  $\int_0^{\infty} s_{0,\nu}(x) dx$  diverge.

§ 2. Passo ora all'esame del secondo integrale di (5), ricordando che è, in generale [1, p. 310] :

$$(14) \quad \mathbf{E}_{\nu}(x) = \frac{\nu [\cos(\nu\pi) - 1]}{\pi} s_{-1,\nu}(x) - \frac{1 + \cos(\nu\pi)}{\pi} s_{0,\nu}(x),$$

con il solito significato dei simboli.

Anche ora distinguerò i seguenti casi :

I')  $\lambda \neq 1, \nu \neq 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Moltiplicando ambo i membri di (14) per  $x^{\lambda-1}$  ed integrando successivamente in  $(0, \infty)$ , ricavo, tenendo conto di [2] :

$$\int_0^\infty x^{\lambda-1} E_\nu(x) dx = \frac{\nu [\cos(\nu\pi) - 1]}{\pi} \frac{\Gamma\left(\frac{\lambda}{2}\right)\Gamma\left(1 - \frac{\lambda}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)\Gamma\left(-\frac{\nu}{2}\right)}{2^{3-\lambda}\Gamma\left(1 + \frac{\nu-\lambda}{2}\right)\Gamma\left(1 - \frac{\nu+\lambda}{2}\right)} -$$

(15)

$$- \frac{1 + \cos(\nu\pi)}{\pi} \frac{\Gamma\left(\frac{1+\lambda}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-\lambda}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1+\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-\nu}{2}\right)}{2^{2-\lambda}\Gamma\left(1 + \frac{\nu-\lambda}{2}\right)\Gamma\left(1 - \frac{\nu+\lambda}{2}\right)}.$$

II')  $\lambda \neq 1, \nu = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Dalla definizione della funzione di Weber :

$$E_\nu(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin(\nu\vartheta - x \sin \vartheta) d\vartheta,$$

ricavo, tenuto conto rispettivamente di [5, p. 401, (7) e (5)], per  $\nu$  pari positivo, negativo o nullo :

$$(16) \quad E_\nu(x) = - \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin(x \sin \vartheta) \cos(\nu\vartheta) d\vartheta$$

e per  $\nu$  dispari positivo :

$$(17) \quad E_\nu(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(x \sin \vartheta) \sin(\nu\vartheta) d\vartheta,$$

mentre per  $\nu$  dispari negativo, posso scrivere:

$$(18) \quad E_{\nu}(x) = -E_{-\nu}(x).$$

Per note formule che legano gli integrali di (16) e (17) alle funzioni  $s_{0,\nu}(x)$  e  $s_{-1,\nu}(x)$  [1, p. 310], ottengo dalla (16), tenendo conto che  $\nu$  è pari positivo, negativo o nullo:

$$(19) \quad E_{\nu}(x) = -\frac{2}{\pi} s_{0,\nu}(x),$$

e dalla (17), ove è  $\nu$  dispari positivo:

$$(20) \quad E_{\nu}(x) = -\frac{2\nu}{\pi} s_{-1,\nu}(x).$$

Ciò premesso, ricordando [2], dalla (19) ricavo per  $\nu$  pari positivo, negativo o nullo:

$$(21) \quad \int_0^{\infty} x^{\lambda-1} E_{\nu}(x) dx = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} x^{\lambda-1} s_{0,\nu}(x) dx = \\ = -\frac{1}{\pi} \frac{\Gamma\left(\frac{1+\lambda}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1-\lambda}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1+\nu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1-\nu}{2}\right)}{2^{1-\lambda} \Gamma\left(1 - \frac{\lambda+\nu}{2}\right) \Gamma\left(1 - \frac{\lambda-\nu}{2}\right)},$$

e dalla (20) ottengo per  $\nu$  dispari positivo:

$$(22) \quad \int_0^{\infty} x^{\lambda-1} E_{\nu}(x) dx = -\frac{2\nu}{\pi} \int_0^{\infty} x^{\lambda-1} s_{-1,\nu}(x) dx = \\ = -\frac{\nu}{\pi} \frac{\Gamma\left(\frac{\lambda}{2}\right) \Gamma\left(1 - \frac{\lambda}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) \Gamma\left(-\frac{\nu}{2}\right)}{2^{2-\lambda} \Gamma\left(1 - \frac{\lambda+\nu}{2}\right) \Gamma\left(1 - \frac{\lambda-\nu}{2}\right)},$$

mentre per  $\nu$  dispari negativo, tenendo presente la (18), ritrovo la coincidenza tra primo e terzo membro della (22).

Pertanto le (21), (22) risolvono completamente il presente caso.

III')  $\lambda = 1, \nu = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Dalla (19), integrando e tenendo conto al solito di [2], ricavo che per  $\nu$  pari positivo, negativo o nullo, il secondo integrale di (5) con  $\lambda = 1$  è divergente. Invece, per  $\nu$  dispari positivo o negativo, dalla (20), tenuto conto eventualmente di (18) ed applicando la solita formula citata, ottengo che il secondo integrale di (5) con  $\lambda = 1$  è nullo.

IV')  $\lambda = 1, \nu \neq 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

In questo caso, il secondo integrale che figura in (5) diverge, tenuto conto di (14) e delle considerazioni svolte nell'analogo caso IV) del § 1.

§ 3. Ciò premesso, al fine della valutazione di (1), distinguerò due casi, a seconda che  $n$  sia pari o dispari.

Per  $n$  pari, è noto che per  $x$  positivo, è [1, p. 321]:

$$(23) \quad Ei_n(x) = \frac{2x^{\frac{1}{2}}}{n} K_{\frac{1}{n}}(2x^{\frac{n}{2}}),$$

dove  $K_\nu(z)$  indica al solito, la funzione di Macdonald. Tenendo conto delle proprietà delle funzioni che figurano in (23), posso scrivere:

$$(24) \quad \int_0^\infty Ei_n(x) dx = \frac{2}{n} \int_0^\infty x^{\frac{1}{2}} K_{\frac{1}{n}}(2x^{\frac{n}{2}}) dx =$$

$$= \frac{1}{n^2 \cdot 2^{\frac{3}{n}-2}} \int_0^\infty t^{\frac{3}{n}-1} K_{\frac{1}{n}}(t) dt = \frac{1}{n^2} \Gamma\left(\frac{2}{n}\right) \Gamma\left(\frac{1}{n}\right).$$



§ 4. Per  $n$  dispari, sempre per  $x$  positivo, è [1, p. 323]:

$$(25) \quad Ei_n(x) = \frac{\pi x^{\frac{1}{2}}}{n} \left\{ tg \left( \frac{\pi}{2n} \right) J_{\frac{1}{n}}(2x^{\frac{n}{2}}) - E_{\frac{1}{n}}(2x^{\frac{n}{2}}) \right\} + \\ + \frac{\pi x^{\frac{1}{2}}}{n \sin \left( \frac{\pi}{n} \right)} \left\{ J_{-\frac{1}{n}}(2x^{\frac{n}{2}}) - J_{\frac{1}{n}}(2x^{\frac{n}{2}}) \right\},$$

ove  $J_{\nu}$ ,  $J_{\nu}$ , ed  $E_{\nu}$  hanno il significato già detto nel § 1.

Tenendo conto delle proprietà delle funzioni che figurano in (25),

ricavo, dopo aver posto, come in (24),  $x = \left( \frac{t}{2} \right)^{\frac{2}{n}}$ :

$$(26) \quad \int_0^{\infty} Ei_n(x) dx = \frac{\pi}{n^2} tg \left( \frac{\pi}{2n} \right) \frac{1}{2^{\frac{3}{n}-1}} \int_0^{\infty} t^{\frac{3}{n}-1} J_{\frac{1}{n}}(t) dt - \\ - \frac{\pi}{n^2} \frac{1}{2^{\frac{3}{n}-1}} \int_0^{\infty} t^{\frac{3}{n}-1} E_{\frac{1}{n}}(t) dt + \frac{\pi}{n^2 \sin \left( \frac{\pi}{n} \right) 2^{\frac{3}{n}-1}} \int_0^{\infty} t^{\frac{3}{n}-1} J_{-\frac{1}{n}}(t) dt - \\ - \frac{\pi}{n^2 \sin \left( \frac{\pi}{n} \right) 2^{\frac{3}{n}-1}} \int_0^{\infty} t^{\frac{3}{n}-1} J_{\frac{1}{n}}(t) dt,$$

avendo, per il momento, escluso il valore  $n = 3$ , dati i casi IV) e IV'), trattati in precedenza. Ciò fatto, ricordo che e' [4, p. 486]:

$$(27) \quad \int_0^{\infty} t^{\mu} J_{\nu}(t) dt = \frac{2^{\mu} \Gamma \left( \frac{\nu + \mu + 1}{2} \right)}{\Gamma \left( \frac{\nu - \mu + 1}{2} \right)}, \quad \left( \mu + \nu > -1, \mu < \frac{1}{2} \right).$$

Allora, ricorrendo alla (27) per gli ultimi due integrali di (26) e alle (7), (15) rispettivamente per il primo e secondo integrale a secondo membro in (26), ricavo in definitiva, con alcuni passaggi :

$$\int_0^{\infty} Ei_n(x) dx = \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2n}\right) \Gamma\left(1 - \frac{3}{2n}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2n}\right) \Gamma\left(-\frac{1}{2n}\right)}{4n^3 \Gamma\left(1 - \frac{1}{n}\right) \Gamma\left(1 - \frac{2}{n}\right)} \left\{ -tg\left(\frac{\pi}{2n}\right) \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) + 1 - \cos\left(\frac{\pi}{n}\right) \right\} +$$

(28)

$$+ \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2n}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2n}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2n}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2n}\right)}{2n^2 \Gamma\left(1 - \frac{1}{n}\right) \Gamma\left(1 - \frac{2}{n}\right)} \left\{ tg\left(\frac{\pi}{2n}\right) \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) + 1 + \cos\left(\frac{\pi}{n}\right) \right\} +$$

$$+ \frac{\pi}{n^2 \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)} \left\{ \frac{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)}{\Gamma\left(1 - \frac{2}{n}\right)} - \frac{\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)}{\Gamma\left(1 - \frac{1}{n}\right)} \right\}.$$

Rimane ora da considerare il caso  $n = 3$ . A tal fine, so che per  $x$  positivo, è [6] :

$$(29) \quad Ei_3(x) = \frac{2\pi}{3^{3/2}} x^{\frac{1}{2}} \left[ J_{-\frac{1}{3}}(2x^{\frac{3}{2}}) - J_{\frac{1}{3}}(2x^{\frac{3}{2}}) \right] + \frac{4x^{\frac{1}{2}}}{3^{3/2}} \sigma_{11}(2x^{\frac{3}{2}}),$$

con

$$(30) \quad \sigma_{11}(t) = \int_0^{\pi} \sin(t \sin \vartheta) \sin \frac{\vartheta}{3} d\vartheta.$$

Esprimendo la (30) mediante funzioni di Lommel [1, p. 310], ho :

$$(31) \quad \sigma_{11}(t) = \frac{3^{\frac{1}{2}}}{2} s_{0, \frac{1}{3}}(t).$$

Ora, in riferimento al secondo membro di (29), ottengo, posto  $x = \left(\frac{t}{2}\right)^{2/3}$  e tenendo conto di (27) per  $\mu = 0$  :

$$\frac{2\pi}{3^{3/2}} \int_0^{\infty} x^{\frac{1}{2}} \left[ J_{-\frac{1}{3}}(2x^{\frac{3}{2}}) - J_{\frac{1}{3}}(2x^{\frac{3}{2}}) \right] dx = \frac{2\pi}{3^{5/2}} \left\{ \int_0^{\infty} J_{-\frac{1}{3}}(t) dt - \int_0^{\infty} J_{\frac{1}{3}}(t) dt \right\} = 0,$$

mentre, per la (31), è :

$$\frac{4}{3^{3/2}} \int_0^{\infty} x^{\frac{1}{2}} \sigma_{11}(2x^{\frac{3}{2}}) dx = \frac{2}{3} \int_0^{\infty} x^{\frac{1}{2}} s_{0, \frac{1}{3}}(2x^{\frac{3}{2}}) dx,$$

che risulta divergente, tenuto conto della [2].

Da quanto sopra, avendo presenti le proprietà delle funzioni che figurano in (29), posso concludere che  $\int_0^{\infty} Ei_3(x) dx$  diverge.

#### BIBLIOGRAFIA

- [1] G. N. WATSON, *A Treatise on the Theory of Bessel functions*, Cambridge Univ. Press, 1966.
- [2] A. ERDÉLYI, W. MAGNUS, F. OBERHETTINGER, F. G. TRICOMI, *Tables of Integral Transforms*, vol. II, McGraw-Hill, 1954, p. 385 (17).
- [3] V. ad es. A. ERDÉLYI, W. MAGNUS, F. OBERHETTINGER, F. G. TRICOMI, *Higher transcendental functions*, vol. II, McGraw-Hill, 1953.

- [4] M. ABRAMOWITZ, I. A. STEGUN, *Handbook of mathematical functions*, Dover, New York, 1965.
- [5] I. S. GRADSHTEYN, I. W. RYZHIK, *Table of Integrals, Series and Products*, Academic Press, 1965.
- [6] G. H. HARDY, *On certain definite integrals considered by Airy and by Stokes*, Quarterly Journal, XLI, 1910, pp. 226-240.

Manoscritto pervenuto in redazione il 15 aprile 1978.