RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

O. MUTZBAUER

Klassifizierung torsionsfreier abelscher Gruppen des Ranges 2 (2. Teil)

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 58 (1977), p. 163-174

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1977__58__163_0>

REND. SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol. 58 (1977)

Klassifizierung torsionsfreier abelscher Gruppen des Ranges 2 (2. Teil)

O. MUTZBAUER *

1. Einleitung

Diese Arbeit (siehe auch [9]) ist eine Ergänzung von [6] und untersucht die Brauchbarkeit der dort gegebenen Klassifizierung torsionsfreier abelscher Gruppen des Ranges 2 – kurz: Gruppen.

Es gibt eine ganze Reihe verschiedenartiger Invarianten für torsionsfreie abelsche Gruppen und zugehörige Klassifizierungssätze, d. h. Umformulierungen des Isomorphieproblems in ein arithmetisches Problem. Damit ist man jedoch der tatsächlichen Lösung noch nicht nähergekommen [3 ; § 85], wenn die korrespondierenden arithmetischen Probleme nicht gelöst werden können.

Für die in [6] — Nomenklatur wird übernommen — verwendete Beschreibung von Gruppen durch Charakteristiken wird eine größte Gruppenklasse bestimmt, innerhalb derer das Isomorphieproblem rechnerisch entscheidbar ist. In dieser Gruppenklasse, den algebraisch strukturierten Minimaxgruppen, befinden sich Gruppen, die mit den bisherigen Methoden nicht klassifiziert werden konnten.

2. Isomorphieproblem

DEFINITION 1. Seien $\mathbf{M}$, $\mathbf{M}'$ Charakteristiken ([6 ; (6)]). Das arithmetische Problem ([6 ; Satz 1]).

$$\mathbf{M}' = \mathbf{M}^{A} \tag{1}$$

(*) Indirizzo dell'A.: Math. Institut Am Hubland D-87 Würzburg, Rep. Fed. Tedesca.

heißt entscheidbar, wenn es ein (computerfähiges) endliches rationales Rechenverfahren gibt, das die Berechnung der rationalen Koeffizienten von $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ entweder gestattet — die Zahlen a, b, c, d heißen dann berechenbar —, oder ihre Existenz widerlegt.

Definition 2. Das Isomorphieproblem heißt für zwei Gruppen G und G' entscheidbar, wenn das arithmetische Problem $\mathrm{M}' = \mathrm{M}^A$ für Charakteristiken M und M' von G bzw. G' entscheidbar ist.

Es ist nicht zu erwarten, daß die gesuchte Gruppenklasse, innerhalb derer das Isomorphieproblem entscheidbar ist, gleich der Klasse aller torsionsfreien abelschen Gruppen des Ranges 2 ist; denn dergleichen ist bereits falsch für rationale Gruppen.

Entsprechend der Unabhängigkeit der lokalen p-Strukturen ([6 ; (4)]) wird die Gleichheit $\mathrm{M}' = \mathrm{M}^A$ nach [6 ; (9)] komponentenweise bestätigt, also separat für jede einzelne Primzahl p. Ist also keine Abhängigkeit zwischen lokalen p-Strukturen erklärt, so muß die Entscheidung für nur endlich viele Primzahlen getroffen werden können, wenn das arithmetische Problem entscheidbar sein soll. Hier bietet sich sofort die Klasse der Minimaxgruppen an, außerhalb derer man nur in Spezialfällen ein endliches Rechenverfahren für die Koeffizienten von $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ erwarten kann. Ist $u, v \in G$ eine Basis der Gruppe G, dann ist G eine Minimaxgruppe, wenn der Faktor $G/\langle u, v \rangle$ von endlichem Rang ist.

Das typische Einzelproblem für $\mathrm{M}' = \mathrm{M}^A$ ist die Berechnung von $a, b, c, d \in \mathbf{Q}$ (bis auf einen gemeinsamen Faktor) mit (siehe [6 ; (12)])

$$\pi_p^A = \frac{c + a\pi_p}{d + b\pi_p} . \tag{2}$$

Es ist also nachzuweisen, ob die Zahlen π_p, π_p^A algebraisch abhängig sind. Sind π_p und π_p^A transzendent über dem Körper $\mathbf{Q}$ der rationalen Zahlen, so gibt es dafür — wie auch schon im Körper der reellen Zahlen — kein allgemeines Verfahren. Man wird also auch dann, wenn die Zahlen π_p transzendent sind, nicht erwarten können, daß das arithmetische Problem $\mathrm{M}' = \mathrm{M}^A$ entscheidbar ist. Damit wird eine Einschränkung nahe gelegt.

Definition 3. Eine Gruppe mit Charakteristik

$$\mathrm{M} = \{ M_p \mid p \in \mathbf{P} \} \quad \text{und} \quad M_p = \begin{pmatrix} p^{-m_p} p^{-n_p} \pi_p \\ 0 \quad\quad p^{-n_p} \end{pmatrix}$$

heißt algebraisch strukturiert, wenn alle p-adischen Zahlen $\pi_p \in \mathbf{K}_p^*$ algebraisch über den rationalen Zahlen sind.

Mit der Klasse aller algebraisch strukturierten Minimaxgruppen ist eine größte Gruppenklasse gegeben, außerhalb derer man — mit Hilfe der in [6] entwickelten Klassifizierung — i. a. Entscheidbarkeit des Isomorphieproblems nicht mehr erwarten kann. Es soll jedoch gezeigt werden, daß man das Isomorphieproblem innerhalb dieser Gruppenklasse stets rechnerisch lösen kann.

3. Algebraische Zahlen

Um ein Rechenverfahren anzugeben, mit dessen Hilfe man entscheiden kann, ob algebraisch strukturierte Gruppen isomorph sind oder nicht, muß eine standardisierte Form für algebraische Zahlen angegeben werden.

Eine p-adische Zahl läßt sich nur dann als algebraisch über $\mathbf{Q}$ erkennen, wenn ein definierendes Polynom mit rationalen Koeffizienten angegeben werden kann. Mit der Methode von Kronecker [11 ; § 32] kennt man dann auch das Minimalpolynom. Für die genaue Angabe der Zahl π ist es weiter notwendig aber auch hinreichend eine rationale Näherung π_0 und eine « Umgebung » von π_0 zu kennen, so daß die Zahl π die einzige Nullstelle des Minimalpolynoms in dieser Umgebung von π_0 ist. Umgebungen werden mit Hilfe einer « p-adischen Bewertung » p-adischer Zahlen beschrieben. Es sei

$$\mathcal{O}_p(0) := \infty ,$$

und für eine p-adische Zahl $\pi \in \mathbf{K}_p^*$, $\pi \neq 0$:

$$\mathcal{O}_p(\pi) := x \in \mathbf{Z} \text{ minimal bzgl. } \quad p^{-x}\pi \quad \text{ganz.}$$

Es wird hier genügen p-adische ganze Zahlen zu betrachten.

Einer p-adischen ganzen Zahl $\pi \in \mathbf{Q}_p^*$ läßt sich also umkehrbar eindeutig ein System ganzer Zahlen zuordnen:

$$\pi \longleftrightarrow (n, a_0, \ldots, a_n, \pi_0, d) = S \tag{3}$$

wobei n der Grad des Minimalpolynoms $\frac{1}{a_n} f$ von π ist, mit

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i .$$

Die ganzen Zahlen a_i haben 1 als größten gemeinsamen Teiler und $\Theta_p(\pi - \pi_0) > d$.

PROPOSITION 4. Es seien $p \in \mathbf{P}$, $0 \leq d$, $\pi_0 \in \mathbf{Z}$, f ein Polynom mit ganzzahligen Koeffizienten. Dann sind äquivalent:

$$\left\{\begin{array}{l}\text{Es gibt genau ein } \pi \in \mathbf{Q}_p^* \text{ mit} \\ f(\pi) = 0,\ \Theta_p\big(f'(\pi)\big) = d \text{ und } \Theta(\pi - \pi_0) > d .\end{array}\right. \tag{4}$$

$$\Theta_p\big(f(\pi_0)\big) > 2d \text{ und } \Theta_p\big(f'(\pi_0)\big) = d . \tag{5}$$

Beweis. Gilt (4) dann bestätigt man mittels

$$f'(\pi_0) = f'(\pi) + (\pi_0 - \pi) f''(\pi) + \ldots$$

und

$$f(\pi_0) = f(\pi) + (\pi_0 - \pi) f'(\pi) + \frac{(\pi_0 - \pi)^2}{2} f''(\pi) + \ldots$$

Bedingung (5).

Gilt (5), dann gibt es nach [5; 6, Theorem 1] ein $\pi \in \mathbf{Q}_p^*$ mit den gewünschten Eigenschaften. Erfüllt auch $\mu \in \mathbf{Q}_p^*$ die Bedingung (4), dann folgt aus

$$f(\mu) = f(\pi) + (\mu - \pi) f'(\pi) + \frac{(\mu - \pi)^2}{2} f''(\pi) + \ldots$$

$\mu = \pi$ und Proposition 4 ist bewiesen.

PROPOSITION 5. Sei $p \in \mathbf{P}$. Für $0 \leq d, \pi_0 \in \mathbf{Z}$ und ein Polynom f mit ganzzahligen Koeffizienten gelte (5), dann konvergiert das Newtonsche Iterationsverfahren

$$\pi_{n+1} = \pi_n - \frac{f(\pi_n)}{f'(\pi_n)} \in \mathbf{Q}_p^*$$

mit Startwert π_0 gegen die Nullstelle π von f, die nach Proposition 4 existiert.

Beweis. Es gilt

$$f(\pi_{n+1}) = f(\pi_n) + (\pi_{n+1} - \pi_n) f'(\pi_n) + \frac{(\pi_{n+1} - \pi_n)^2}{2} f''(\pi_n) + \dots$$

also

$$f(\pi_{n+1}) = \frac{1}{2} \left[\frac{f(\pi_n)}{f'(\pi_n)}\right]^2 f''(\pi_n) + \dots$$

und damit

$$\mathcal{O}_p[f(\pi_{n+1})] > \mathcal{O}_p[f(\pi_n)].$$

Proposition 5 ist also mittels Induktion bewiesen.

Proposition 4 ist ein hinreichendes Kriterium dafür, daß ein System S der Form (3) genau eine algebraische Zahl beschreibt. Die Bedingung (5) kann noch abgeschwächt werden, indem man einen Satz vom Newton-Kantorovich-Typ beweist. Dafür ist lediglich der Beweis von [10; 12.6.2] zu modifizieren. Proposition 5 eröffnet die Möglichkeit beliebig genaue Näherungen einer Nullstelle zu erhalten.

4. Abhängigkeit algebraischer Zahlen

Die Notationen dieses Paragraphen sind [12] entnommen. Sei $\mathbf{Q}(\pi) < \mathbf{K}_p^*$ die einfache algebraische (und damit endliche) Körpererweiterung des Körpers der rationalen Zahlen mit der p-adischen Zahl $\pi \in \mathbf{K}_p^*$ im Körper $\mathbf{K}_p^*$ der p-adischen Zahlen. tr (a)

bezeichne die Spur von $a \in \mathbf{Q}(\pi)$ über $\mathbf{Q}$. Für die über $\mathbf{Q}$ algebraischen Zahlen $\pi, \mu \in \mathbf{K}_p^*$ vom Grade n seien

$$A = (a_{ij}) := \operatorname{tr}(\pi^{i+j}), \ b = (b_j) := \operatorname{tr}(\mu\pi^j) \tag{6}$$

$$\text{wobei } 0 \leq i, j < n .$$

Lemma 6. Sei $p \in \mathbf{P}$, seien $\pi, \mu \in \mathbf{K}_p^*$ algebraisch vom Grade n über $\mathbf{Q}$ mit $\mathbf{Q}(\pi) = \mathbf{Q}(\mu)$. Dann gilt:

(i) Det $A \neq 0$,

(ii) für die rationalen Zahlen $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbf{Q}$ ist genau dann

$$\mu = \sum_{0 \leqslant i < n} a_i \pi^i = f(\pi), \tag{7}$$

wenn für alle j mit $0 \leq j < n$ gilt:

$$\sum_{0 \leqslant i < n} a_{ij} a_i = b_j . \tag{8}$$

Beweis. Die Determinante der (rationalen) Matrix A ist die Diskriminante der Basis $\{\pi^i | 0 \leq i < n\}$ von $\mathbf{Q}(\pi)$ über $\mathbf{Q}$ und damit ungleich 0, da $\mathbf{Q}$ die Charakteristik 0 hat [12; II. 11, Corollary].

Da $\mu \in \mathbf{Q}(\mu)$ gilt: $\mu = \sum_{0 \leqslant i < n} a_i \pi^i$ mit rationalen a_i $(0 \leq i < n)$. Die Gleichungen $\pi^j \mu = \sum_{0 \leqslant i < n} a_i \pi^{i+j}$ $(0 \leq j < n)$ führen durch Spurbildung auf das lineare Gleichungssystem

$$\sum_{0 \leqslant i < n} a_{ij} a_i = b_j$$

für die Koeffizienten $a_0, \ldots, a_{n-1}$. Wegen (i) gibt es genau eine Lösung und Lemma 6 ist bewiesen.

Für den Nachweis einer Beziehung der Form (7) zwischen π und μ sind nach Lemma 6 die rationale Matrix A und der rationale Vektor b zu berechnen und anschließend das rationale lineare Gleichungssystem (8) (exakt) zu lösen. Dazu ist es nötig, die Spur von Produkten $\pi\mu$ zu berechnen, also das Minimalpolynom von $\pi\mu$, da $\operatorname{tr}(\pi\mu) = -a_1$ [12; II. 10], wenn $x^g + a_1 x^{g-1} + \ldots + a_g$ das Minimalpolynom von $\pi\mu$ ist.

Lemma 7. Sei $p \in \mathbf{P}$, seien $\pi, \mu \in \mathbf{Q}_p^*$ algebraisch über $\mathbf{Q}$, gegeben durch Minimalpolynome und Näherungen, die (5) erfüllen. Dann sind die Minimalpolynome von $\pi\mu$ und von $\pi + \mu$ berechenbar und damit die Spuren.

Beweis. Für die Minimalpolynome von $\pi\mu$ bzw. $\pi + \mu$ müssen Rechenverfahren angegeben werden. Die Beweise sind fast gleich. Es wird nur der erste Fall behandelt. Die Koeffizienten des Polynoms

$$h(x) := \prod (x - \alpha_i \beta_j),$$

mit allen Nullstellen α_i und β_j der Minimalpolynome von π bzw μ, sind die elementarsymmetrischen Funktionen der Produkte $\alpha_i . \beta_j$, also symmetrisch sowohl in den α_i als auch in den β_j. Zweimalige Anwendung des Hauptsatzes über symmetrische Funktionen [11 ; § 33] weist die Koeffizienten von h als Polynome in den Koeffizienten der Minimalpolynome von π und μ aus mit rationalen Koeffizienten, also als rationale Zahlen. Dem konstruktiven Beweis des Hauptsatzes über symmetrische Funktionen entnimmt man ein explizites Rechenverfahren für die Koeffizienten von h.

Mit der Methode von Kronecker [11 ; § 32] gelingt es nun, mit endlicher rationaler Rechnung das Polynom h vollständig in irreduzible Teilpolynome zu zerlegen. Eines dieser Teilpolynome ist das Minimalpolynom von $\pi\mu$. Man erkennt es durch Einsetzen der Näherung $\pi_0 . \mu_0$ oder evtl. $\pi_1 \cdot \mu_1$, mit besseren Näherungen, gewonnen mittels Proposition 5, sollte für $\pi_0 \cdot \mu_0$ (5) noch nicht erfüllt sein. Damit ist Lemma 7 bewiesen.

Lemma 8. Sei $p \in \mathbf{P}$ seien $\pi, \mu \in \mathbf{Q}_p^*$ algebraische Zahlen über $\mathbf{Q}$, gegeben durch Minimalpolynome und Näherungen, die (5) erfüllen. Dann ist eine Beziehung der Form (7) zwischen π und μ berechenbar oder widerlegbar, d. h. die rationalen Koeffizienten können berechnet werden, oder ihre Existenz kann widerlegt werden.

Beweis. Für π und μ lassen sich nach Lemma 7 die Matrix A und der Vektor b aus (6) berechnen. Ist die Determinante von A gleich O, so besteht (7) nicht, ansonsten können die Koeffizienten a_i als Lösung des linearen Gleichungssystems (8) berechnet werden. Mit Lemma 7 wird das Minimalpolynom von $\varrho = \sum_{0 \leqslant i < n} a_i \pi^i = f(\pi)$ berechnet und eine Näherung $\varrho_0 = f(\pi_0)$, die (5) erfüllt. (7) gilt genau dann, wenn $\mu = \varrho$ ist, und Lemma 8 ist bewiesen.

Satz 9. Sei $p \in \mathbf{P}$, seien $\pi, \mu \in \mathbf{Q}_p^*$ algebraische Zahlen über $\mathbf{Q}$, gegeben durch Minimalpolynome und Näherungen, die (5) erfüllen. Dann können vier rationale Zahlen a, b, c, $d \in \mathbf{Q}$ bis auf einen gemeinsamen Faktor berechnet werden für die gilt:

$$\mu = \frac{c + a\pi}{d + b\pi}. \tag{9}$$

oder die Beziehung (9) kann rechnerisch widerlegt werden.

Beweis. Nach Lemma 8 ist Formel (7), also $\mu = \sum\limits_{0 \leqslant i < n} a_i \pi^i$, berechenbar oder widerlegbar. Im zweiten Falle kann (9) nicht bestehen, ansonsten ist das lineare Gleichungssystem für a, b, c und d, das durch Vergleich der Koeffizienten der linear unabhängigen Potenzen von π entsteht aus

$$(d + b\pi) \sum_{0 \leq i < n} a_i \pi^i = c + a\pi$$

lösbar. Man hat zu prüfen, ob ad $- bc \neq 0$ ist, und Satz 9 istbewiesen.

5. Entscheidbarkeitsfragen

In Paragraph 3 wurde begründet, daß eine algebraische Zahl in natürlicher Weise durch ihr Minimalpolynom, eine Näherung und eine isolierende Umgebung gegeben ist.

Innerhalb der Klasse algebraisch strukturierter Minimaxgruppen ist das Klassifizierungsproblem vollständig lösbar.

Lemma 10. Eine Minimaxgruppe besitzt eine Basis, bzgl. derer sie durch eine Charakteristik

$$\mathrm{M} = \{M_p \mid p \in \mathbf{P}\} \text{ mit } M_p = \begin{pmatrix} p^{-m_p} & p^{-n_p}\pi_p \\ 0 & p^{-n_p} \end{pmatrix}$$

beschrieben wird mit

(i) m_p, n_p sind entweder 0 oder ∞

(ii) für fast alle Primzahlen p ist $m_p = n_p = 0$ (und $\pi_p = 0$)

(iii) für $0 = m_p \neq n_p = \infty$ ist $\pi_p \in \mathbf{Q}_p^*$ Einheit.

Beweis. Eine Minimaxgruppe G hat eine Basis, u, v mit $h_p(u) = h_p(v) = 0$ für alle Primzahlen p, für die G nicht p-divisibel ist, *d. h.* $p\,G \neq G$, und derart, daß $G/< u, v >$ divisibel ist. Aus der Divisibilität von $G/< u, v >$ folgt (i); als Minimaxgruppe erfüllt G (ii) und aus der Höhenbedingung folgt nach [6 ; (4)] schließlich (iii). Damit ist Lemma 10 bewiesen.

Bemerkung 11. Sei M die Charakteristik einer algebraisch strukturierten Minimaxgruppe G, mit $G = < u, v \mid \mathrm{M} >$, dann gibt es natürliche Zahlen s, t mit $st \neq 1$, so daß für alle Primzahlen p mit $m_p \neq n_p = \infty$ gilt:

$$s \neq \pi_p \text{ und } t \neq \pi_p^{-1} .$$

Beschreibt man G mittels [6 ; (9) bis (13)] bzgl. der neuen Basis

$$u^A : = u + sv \text{ und } v^A : \neq v + tu ,$$

d. h. $G = < u^A, v^A \mid \mathrm{M}^A >$, dann gilt für alle Primzahlen p mit $m_p \neq n_p = \infty$:

$$\pi_p^A \neq 0.$$

Wendet man dann einige offensichtliche Basistransformationen an, um die Divisibilität des Faktors $G/< u, v >$ zu erreichen, so erhält man konstruktiv aus der ursprünglichen Charakteristik M eine neue Charakteristik von G mit den in Lemma 10 beschriebenen Eigenschaften. Also läßt sich jede Charakteristik einer algebraisch strukturierten Minimaxgruppe mittels endlich vieler Rechenschritte in eine Charakteristik von der Form wie in Lemma 10 umformen.

Satz 12. In der Klasse der algebraisch strukturierten Minimaxgruppen ist das Isomorphieproblem entscheidbar.

Beweis. Zwei algebraisch strukturierte Minimaxgruppen G und G' seien durch Charakteristiken M und M$'$ gegeben, von der Form wie im Lemma 10. Das ist nach Bemerkung 11 durch eine endliche Rechnung erreichbar.

Nach [6; Satz 1] sind G und G' genau dann isomorph, wenn es eine rationale 2×2 — Matrix $A \in GL(\mathrm{M})$ gibt, so daß mit $A^{-1} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ neben

$$m_p = m'_p \text{ und } n_p = n'_p \text{ für alle } p \in \mathbf{P}$$

speziell für alle Primzahlen p mit $m_p = 0$, $n_p = \infty$ gilt:

$$\pi'_p = \frac{c + a\pi_p}{d + b\pi_p}. \tag{10}$$

Nach Satz 9 läßt sich die Existenz solcher Zahlen $a, b, c, d \in \mathbf{Q}$ entweder ausschließen oder sie lassen sich bis auf einen gemeinsamen Faktor berechnen. Dieser gemeinsame Faktor muß so festgelegt werden, daß A eine Basistransformation wird, *d. h.* $A \in GL(\mathrm{M})$. Seien $a, b, c, d \in \mathbf{Q}$ Zahlen, die (10) für alle Primzahlen p mit $m_p \neq n_p$ erfüllen; dann gilt ad $- bc \neq 0$. Sei

$$g := \prod_{p \in \mathbf{P}} p^{\gamma_p}$$

eine rationale Zahl mit

$$\gamma_p := \begin{cases} \Theta_p\left(\dfrac{d + b\pi_p}{ad - bc}\right) & \text{für } m_p \neq n_p, \\ 0 & \text{für } m_p = n_p. \end{cases}$$

Es gilt $\Theta_p\left(\dfrac{d + b\pi_p}{ad - bc}\right) = \Theta_p\left(\dfrac{c + a\pi_p}{ad - bc}\right)$, weil $\pi'_p \in \mathbf{Q}^*_p$

Einheit ist. Also ist $g^{-1} A \in GL(\mathrm{M})$ nach [6, Lemma 2] eine Basistransformation von G bzgl. M wegen

$$\Theta_p\left(\frac{gd + gb\pi_p}{g^2(ad - bc)}\right) = \Theta_p\left(\frac{d + b\pi_p}{ad - bc}\right) - \gamma_p.$$

Damit ist Satz 12 bewiesen.

Bemerkung 13. Der Beweis von Satz 12 stellt eine Methode dar einen eventuellen Isomorphismus zwischen zwei algebraisch strukturierten Minimaxgruppen tatsächlich zu berechnen.

Darüber hinaus muß erwähnt werden, daß das angegebene Verfahren zur Feststellung der Isomorphie zweier Gruppen auf Grund des Zeitbedarfs nur von theoretischem Interesse ist. Es gibt schnellere Verfahren [2], [4] die insbesondere darauf verzichten stets mit dem Minimalpolynom für algebraische Zahlen zu arbeiten und statt dessen mit einem definierenden (nicht notwendig irreduziblen) Polynom auskommen. Teile des hierzu notwendigen Computerprogramms sind schon erstellt, z. B. die Bestimmung des Polynoms $\mu = f(\pi)$ in (7) [4 : Algorithm 2 und 3].

Satz 14. Folgende Probleme sind in der Klasse der algebraisch strukturierten Minimaxgruppen lösbar:

(i) G ist direkt zerlegbar.

(ii) H ist zu einer Untergruppe von G isomorph.

(iii) F tritt als Faktorgruppe von G auf.

(iv) Berechnung der Typenmenge von G.

Beweis. Man spezialisiert die betreffenden Sätze auf algebraisch strukturierte Minimaxgruppen. Nämlich [8 ; Satz 1] bzw. [9 ; Satz 6.1] für (i) ; [7 ; Satz 1] bzw. [9 ; Satz 7.6] für (ii) ; [7 ; Satz 5] bzw. [9 ; Satz 9.4] für (iii) zuzüglich der bekannten Eigenschaften der Minimaxgruppen [1], daß nämlich Untergruppen und Faktoren wieder Minimaxgruppen sind und die Torsionsuntergruppe stets direkter Summand ; [7 ; Lemma 3] bzw. [9 ; Korollar 13.5] für (iv). Stets erhält man rechnerisch nachprüfbare Sachverhalte und Satz 14 ist bewiesen.

Immer dann, wenn das betrachtete Strukturproblem Beziehungen zu rationalen Gruppen herstellt, wie in Satz 14, vereinfachen sich die einschlägigen Sätze sehr stark, da rationale Minimaxgruppen eine außerordentlich einfache Struktur besitzen. Verläßt man jedoch die Klasse der Minimaxgruppen, so stößt man bald auf das typische zahlentheoretische Problem, beschrieben in [6 ; § 1].

LITERATURVERZEICHNIS

[1] R. BAER, *Polyminimaxgruppen*, Math. Ann., 175 (1968), 1-43.
[2] G. E. COLLINS, *Computer algebra of polynomials and rational functions*, Amer. Math. Monthly, 80 (1973), 725-755.
[3] L. FUCHS, *Infinite abelian groups*, Academic Press, New York (1970, 1973).
[4] R. LOOS, *A constructive approach to algebraic numbers*,
[5] L. J. MORDELL, *Diophantine equations*, Academic Press London and New York (1969).
[6] O. MUTZBAUER, *Klassifizierung torsionsfreier abelscher Gruppen des Ranges* 2, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, 55 (1976), 195-208.
[7] O. MUTZBAUER, *Untergruppen und Faktoren torsionsfreier abelscher Gruppen des Ranges* 2, Publ. Math. Debrecen (1979).
[8] O. MUTZBAUER, *Zerlegbarkeitskriterien für Invarianten torsionsfreier abelscher Gruppen des Ranges* 2, eingereicht.
[9] O. MUTZBAUER, *Torsionsfreie abelsche Gruppen des Ranges* 2, Habilitationsschrift (1977).
[10] J. M. ORTEGA and W. C. RHEINBOLDT, *Iterative solution of nonlinear equations in several variables*, Academic Press, New York and London (1970).
[11] B. L. VAN DER WAERDEN, *Algebra I*, Springerverlag, Berlin-Heidelberg (1966).
[12] O. ZARISKI AND F. SAMUEL, *Commutative algebra I*, D. van Nostrand Company, INC, New York (1965).

Manoscritto pervenuto in redazione il 4 luglio 1977.