RENDICONTI
*del*
SEMINARIO MATEMATICO
*della*
UNIVERSITÀ DI PADOVA

STEFANO TESTA

# Costruzione di un universo di dispositivi ciclicamente monotoni massimali

*Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova*, tome 58 (1977), p. 101-116

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1977__58__101_0>

REND. SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol. 58 (1977)

# Costruzione di un universo di dispositivi ciclicamente monotoni massimali.

STEFANO TESTA (*)

## 1. – Prefazione.

In un suo lavoro G. Darbo [1], prendendo lo spunto euristico della teoria delle reti di dispositivi elettrici, ha dato una formalizzazione assiomatica, del concetto di « universo di dispositivi ».

Nello stesso lavoro vengono altresì definiti gli « universi di dispositivi lineari ».

Tra questi, particolare interesse hanno gli « universi lineari su un corpo commutativo $K$ ». Basti ricordare che qui i dispositivi su un insieme finito $\alpha$ di terminali hanno come grafico (che costituisce l'insieme dei « funzionamenti » di tali dispositivi) i sottospazi lineari dello spazio vettoriale $K^{\alpha} \times K_{\alpha}$ su $K$. Gli universi lineari su un corpo trovano interessanti applicazioni. Infatti se $K = \mathbb{R}$ (corpo dei numeri reali), si ha l'ambiente adatto per trattare, ad esempio, dispositivi elettrici in cui le tensioni e le correnti sui singoli terminali sono costanti nel tempo; se $K = \mathbb{C}$ (corpo dei numeri complessi), si ha un ampliamento dell'universo precedente, e qui è possibile trattare dispositivi elettrici i cui segnali di tensione e corrente sui terminali variano nel tempo con legge sinusoidale di frequenza fissata; più in generale, se $K = \mathbb{R}(D)$, corpo degli operatori differenziali razionali fratti, si ha l'universo dei dispositivi lineari a costanti concentrate.

(*) Indirizzo dell'A.: Ist. Matematico Via L. B. Alberti, 4 - Università di Genova.

Tra i dispositivi di tali universi lineari su un corpo ci interessano in particolar modo, quelli che godono di una ulteriore proprietà: la passività. Per un generico corpo $K$ di caratteristica zero, le nozioni di passività « elementari » che si possono dare per i dispositivi lineari su $K$ sono in corrispondenza biunivoca con le strutture paracomplesse su $K$ stesso. Non ci soffermiamo sulla definizione di struttura paracomplessa, rimandando a [1], ci basta osservare che $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ hanno un'unica struttura paracomplessa, ed unico è pure quindi il tipo di passività dei dispositivi lineari su tali corpi: in particolare se $M$ è un dispositivo lineare su $\mathbb{R}$, su un insieme $a$ di terminali, di modo che il suo grafico è un sottospazio lineare di $\mathbb{R}^\alpha \times \mathbb{R}_\alpha$, $M$ si dirà passivo se per ogni suo funzionamento $(x, y)$ si ha $\langle x, y \rangle \geq 0$, dove $\langle -, - \rangle$ è l'usuale prodotto interno di $R^\alpha$.

È da osservare che, in generale, la composizione in rete di dispositivi passivi dà ancora un dispositivo passivo: cioè, i dispositivi lineari passivi costituiscono un sottouniverso dell'universo dei lineari su $K$. Se si considerano i dispositivi passivi « fisicamente realizzabili », si osserva che essi godono di una ulteriore proprietà: la dimensione dello spazio vettoriale che costituisce l'insieme dei loro funzionamenti è uguale al numero dei terminali dei dispositivi stessi. Tale proprietà (che ho chiamata in una mia precedente nota [6], « normalità » ) di cui sembrano godere tutti i dispositivi lineari su un corpo, fisicamente realizzabili, accoppiata alla passività, fa assumere ai dispositivi che godono di entrambe il carattere di « dispositivi lineari passivi massimali », nel senso che ora precisiamo: un dispositivo si dirà passivo massimale se è passivo ed inoltre se il suo grafico non è contenuto propriamente nel grafico di nessun altro dispositivo passivo.

Orbene i dispositivi lineari su un corpo passivi massimali sono tutti e soli i dispositivi lineari passivi normali. È da rilevare che anche questi dispositivi passivi massimali costituiscono un sottouniverso.

In realtà, e già appare dalle poche considerazioni finora svolte, che ci serviranno a chiarire il tipo di problema che intendiamo affrontare, i risultati nella teoria degli universi lineari sono molteplici e di carattere assai generale. Interesserebbe pure considerare, nello stesso ordine di idee, i dispositivi non lineari. Qui però la teoria è ai suoi inizi e i risultati sono parziali e frammentari. Il primo problema è quello di costruire degli esempi significativi di universi non lineari.

Una proprietà sulla quale si è incominciato a lavorare è quella chiamata nella letteratura degli spazi vettoriali su $\mathbb{R}$, monotonia: essa sembra infatti estendere, nel modo più naturale, al caso non lineare, la passività. F. Parodi in un suo lavoro di recente pubblicazione [3], ha costruito un universo di dispositivi monotoni, che estende quello dei lineari passivi. Tale universo è un primo esempio significativo, tuttavia, per certi versi, non è del tutto soddisfacente: infatti per le applicazioni fisiche è talora opportuno considerare dispositivi monotoni massimali, questi però non costituiscono un sottouniverso dell'universo di Parodi: cioè, in tale ambiente, la composizione in rete di dispositivi monotoni massimali dà luogo a dispositivi monotoni, in generale non massimali.

Il problema di trovare un universo di dispositivi monotoni massimali, nella sua formulazione più ampia, è tuttora aperto. Il presente lavoro ne dà una soluzione parziale.

Per chiarire il punto di vista da cui si è affrontato il problema, ritorniamo ai dispositivi lineari su un corpo commutativo $K$.

Sia $\tau$ un automorfismo involutorio (tale cioè che $\tau^2 = \mathrm{id}$) di $K$. È possibile considerare il sottouniverso dei dispositivi $\tau$-reciproci (Per inciso, osserviamo che molti dei dispositivi lineari fisicamente realizzabili, godono di una qualche proprietà di $\tau$-reciprocità; esistono, peraltro, dispositivi lineari non reciproci fisicamente realizzabili). Se $K = \mathbb{R}$ e $\tau$ è l'identità (che è il caso che a noi interessa) tali dispositivi, sono così caratterizzati: sono normali, inoltre per ogni coppia $(x, y)$ e $(\xi, \eta)$ di funzionamenti di un tale dispositivo, vale la relazione: $\langle x, \eta \rangle = \langle \xi, y \rangle$. Orbene, si consideri il sottouniverso dei dispositivi lineari su $\mathbb{R}$ che sono monotoni massimali e reciproci. Si ha che il grafico di tali dispositivi su un insieme $\alpha$ di terminali, è un insieme ciclicamente monotono massimale ed è quindi subgradiente di quelle particolari funzioni convesse di $\mathbb{R}^\alpha$ in $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ che sono le forme quadratiche semidefinite positive, aventi dominio effettivo un sottospazio lineare di $\mathbb{R}^\alpha$. Per ampliare questo universo, in modo da prendere in considerazione dispositivi non lineari, si è pensato di utilizzare le funzioni convesse semicontinue inferiormente su $\mathbb{R}^\alpha$ (di modo che i loro subgradienti siano mappe (ciclicamente) monotone massimali), soggette ad opportuni assiomi; e su queste definire la composizione in rete in modo da generalizzare quella del corrispondente universo lineare. Per questa via si ottiene un universo di dispositivi.

È infine da notare che i subgradienti delle funzioni convesse da noi considerate, non costituiscono un sottouniverso dell'universo totale su $\mathbb{R}$ definito in [3].

## 2. – Richiami e notazioni.

2a) Un universo di dispositivi (cfr. [1]) è dato dall'assegnazione di una coppia $(\mathfrak{D}, \sigma)$; dove $\mathfrak{D}$ è un funtore covariante tra la categoria $\mathfrak{T}$ dei trasduttori elementari su insiemi finiti e la categoria $\mathfrak{S}$ degli insiemi; $\sigma$ è una trasformazione naturale

$$\sigma_{\alpha,\beta}: \mathfrak{D}_\alpha \times \mathfrak{D}_\beta \to \mathfrak{D}_{\alpha,\beta} \qquad \alpha, \beta \text{ insiemi finiti};$$

la coppia $(\mathfrak{D}, \sigma)$, inoltre, soddisfa ai seguenti assiomi;

1) Commutatività del diagramma:

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{D}_\alpha \times \mathfrak{D}_\beta \arrow[r, "\sigma_{\alpha,\beta}"] \arrow[dr, "\pi_\alpha"'] & \mathfrak{D}_{\alpha+\beta} \arrow[d, "\mathfrak{D}(\tilde{i}_\alpha)"] \\
 & \mathfrak{D}_\alpha
\end{tikzcd}$$

essendo $\pi_\alpha$ proiezione canonica, $\mathfrak{D}(\tilde{i}_\alpha)$ applicazione indotta dal trasduttore $\tilde{i}_\alpha: \alpha + \beta \to \alpha$, reciproco dell'inclusione.

2) Commutatività del diagramma

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{D}_\alpha \times \mathfrak{D}_\beta \arrow[r, "\sigma_{\alpha,\beta}"] \arrow[d, "\wr"] & \mathfrak{D}_{\alpha+\beta} \arrow[d, "\wr"] \\
\mathfrak{D}_\beta \times \mathfrak{D}_\alpha \arrow[r, "\sigma_{\beta,\alpha}"'] & \mathfrak{D}_{\beta+\alpha}
\end{tikzcd}$$

dove gli isomorfismi verticali sono rispettivamente l'isomorfismo di scambio dei fattori nel prodotto cartesiano e l'isomorfismo indotto (mediante $\mathfrak{D}$) da quello di scambio degli addendi nella somma diretta.

3) Commutatività del diagramma:

$$\begin{tikzcd}
(\mathfrak{D}_\alpha \times \mathfrak{D}_\beta) \times \mathfrak{D}_\gamma \arrow[r, "\sigma_{\alpha,\beta} \times \mathrm{id}_\gamma"] \arrow[d, "\wr"] & \mathfrak{D}_{\alpha+\beta} \times \mathfrak{D}_\gamma \arrow[r, "\sigma_{(\alpha+\beta)\cdot\gamma}"] & \mathfrak{D}_{(\alpha+\beta)+\gamma} \arrow[d, "\wr"] \\
\mathfrak{D}_\alpha \times (\mathfrak{D}_\beta \times \mathfrak{D}_\gamma) \arrow[r, "\mathrm{id}_\alpha \times \sigma_{\beta,\gamma}"'] & \mathfrak{D}_\alpha \times \mathfrak{D}_{\beta+\gamma} \arrow[r, "\sigma_{\alpha\cdot(\beta+\gamma)}"'] & \mathfrak{D}_{\alpha+(\beta+\gamma)}
\end{tikzcd}$$

dove gli isomorfismi verticali sono rispettivamente quello di associatività del prodotto cartesiano e quello indotto (mediante $\mathfrak{D}$) dall'isomorfismo di associatività della somma diretta.

4) $\mathfrak{D}_\varnothing = \{1\}$, cioè esiste uno ed un solo elemento in $\mathfrak{D}_\varnothing$.

2*b*) In seguito, faremo uso, per la costruzione di un universo di dispositivi, di due funtori tra la categoria degli insiemi finiti e quella degli spazi vettoriali su $\mathbb{R}$. Poniamo per ogni insieme finito $\alpha$

$$\mathbb{R}^\alpha = \bigoplus_{i \in \alpha} \mathbb{R}$$

l'usuale spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ di dimensione card $\alpha$.

Sia poi $\varphi : \alpha \to \beta$ una applicazione tra insiemi finiti; definiamo l'applicazione lineare

$$\varphi^{\cdot} : \mathbb{R}^\beta \to \mathbb{R}^\alpha$$

ponendo

$$\varphi^{\cdot} = \sum_{j = \varphi(i)} \varepsilon_i \, \pi_j \qquad (i \in \alpha\,,\ j \in \beta)\,,$$

essendo le applicazioni lineari

$$\mathbb{R}^\beta \xrightarrow{\ \pi_j\ } \mathbb{R} \xrightarrow{\ \varepsilon_i\ } \mathbb{R}^\alpha$$

rispettivamente proiezioni e iniezioni canoniche. Ciò posto $(-)^{\cdot}$, risulta essere un funtore controvariante.

Definiamo ora il funtore covariante $(-)_{.}$, ponendo per ogni insieme finito $\alpha$, nuovamente

$$\mathbb{R}_\alpha = \bigoplus_{i \in \alpha} \mathbb{R}$$

e per ogni applicazione $\varphi : \alpha \to \beta$

$$\varphi_{.} : \mathbb{R}_\alpha \to \mathbb{R}_\beta$$

dove

$$\varphi_{.} = \sum_{j = \varphi(i)} \varepsilon_j \pi_i \qquad (i \in \alpha\,,\ j \in \beta)\,.$$

essendo le applicazioni lineari

$$\mathbb{R}_\alpha \xrightarrow{\pi_i} \mathbb{R} \xrightarrow{\varepsilon_j} \mathbb{R}_\beta$$

rispettivamente proiezioni e iniezioni canoniche.

Considereremo gli spazi $\mathbb{R}^\alpha$ e $\mathbb{R}_\alpha$, dianzi definiti, uno duale dell'altro, sottointendendo le identificazioni

$$(\mathbb{R}^\alpha)^* = \mathbb{R}_\alpha \quad \text{e} \quad (\mathbb{R}_\alpha)^* = \mathbb{R}^\alpha$$

ottenute dagli usuali isomorfismi indotti dalla base canonica.

Indicheremo con

$$\langle - , - \rangle : \mathbb{R}^\alpha \times \mathbb{R}_\alpha \to \mathbb{R}$$

l'usuale forma bilineare indotta da tale abbinamento duale.

È utile rilevare allora che le applicazioni lineari $\varphi^{\cdot}$ e $\varphi_{.}$, indotte (mediante i funtori in precedenza definiti) da un'applicazione $\varphi : \alpha \to \beta$, sono una aggiunta dell'altra.

2*c*) Avremo pure bisogno di considerare delle funzioni di $\mathbb{R}^\alpha$ a valori in $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Per una tale funzione $f$, chiameremo dominio effettivo di $f$ ed indicheremo dom $f$ l'insieme degli $x \in \mathbb{R}^\alpha$ tali che $f(x) \in \mathbb{R}$.

Ci servirà anche un'operazione di coniugio.

Sia quindi $f : \mathbb{R}^\alpha \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ una funzione convessa semicontinua inferiormente rispetto alla topologia euclidea (s.c.i. d'ora in poi), di dominio effettivo non vuoto, allora indicheremo con $f^*$ la funzione su $\mathbb{R}_\alpha$, coniugata di $f$ secondo Fenchel, così definita :

$$f^*(y) = \sup_{x \in \mathbb{R}^\alpha} \{ \langle x , y \rangle - f(x) \} , \qquad y \in \mathbb{R}_\alpha$$

Naturalmente vale una analoga definizione (ed uguale notazione) per la coniugata di una funzione definita su $\mathbb{R}_\alpha$.

La funzione $f^*$ è ancora una funzione convessa s.c.i. a valori in $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, di dominio effettivo non vuoto ed è noto che $f^{**} = f$. (cfr. [4] Teorema 12.2).

## 3. – Costruzione dell'universo $\mathcal{M}$.

Sia $a$ un insieme finito, consideriamo l'insieme, che indicheremo $\mathfrak{D}_\alpha$, delle funzioni

$$f : \mathbb{R}^\alpha \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

convesse s.c.i. e tali che

1) $\qquad f(0) = 0$

2) $\qquad f(x) \geq 0 \qquad$ per ogni $x \in \mathbb{R}^\alpha$

3) $\qquad 0 \in$ ri dom $f$

dove ri dom $f$ è la parte interna di dom $f$ rispetto al sottospazio lineare di $\mathbf{R}^\alpha$ generato da dom $f$.

Osservazioni : Sia $f \in \mathfrak{D}_\alpha$

*a*) $f$ è una funzione convessa s.c.i. : ciò implica che il subgradiente $\partial f$ è un insieme ciclicamente monotono massimale di $\mathbb{R}^\alpha \times \mathbb{R}_\alpha$.

*b*) $f(0) = 0$ : tale assioma ha il significato di fissare un punto di riferimento per la funzione potenziale $f$, in modo che vi sia una corrispondenza biunivoca tra le funzioni di $\mathfrak{D}_\alpha$ e i loro subgradienti (potendosi quindi, considerare questi ultimi come dispotivi su $a$ dell'universo che stiamo costruendo).

*c*) $f(x) \geq 0 = f(0)$ per ogni $x \in \mathbb{R}^\alpha$ ; ciò implica che il funzionamento nullo $(0, 0)$ appartiene a $\partial f$.

*d*) infine $0 \in$ ri dom $f$ : faremo vedere in seguito, con un esempio, che i restanti assiomi non bastano a rendere $\mathfrak{D}$ (che ci apprestiamo a definire) un funtore.

PROPOSIZIONE 1. Siano $\varphi : \alpha \to \gamma$ e $\psi : \beta \to \gamma$ applicazioni tra insiemi finiti. Sia $f \in \mathfrak{D}_\alpha$ ; la funzione

$$((f\varphi^\cdot)^*\psi.)^*$$

è un elemento di $\mathfrak{D}_\beta$ .

PROPOSIZIONE 2. Sia $\Gamma : \alpha \to \beta$ un trasduttore. Sia

$$\alpha \xrightarrow{\varphi} \gamma \xleftarrow{\psi} \beta$$

una coppia di applicazioni che individua $\Gamma$ , tale, cioè, che $\Gamma = \tilde{\psi}\,\varphi$(1).
Sia $f \in \mathfrak{D}_\alpha$ ; la funzione

$$((f\,\varphi^\cdot)^*\,\psi.)^*$$

non dipende dalla fattorizzazione $\tilde{\psi}\,\varphi$ scelta per $\Gamma$ .

Daremo la dimostrazione di tali proposizioni al successivo n. 5*a*).
Sia allora $\Gamma : \alpha \to \beta$ un trasduttore, risulta pertanto legittimo far corrispondere a $\Gamma$ una applicazione tra insiemi, che indicheremo

$$\mathfrak{D}(\Gamma) = \mathfrak{D}_\alpha \to \mathfrak{D}_\beta$$

ponendo per ogni $f \in \mathfrak{D}_\alpha$

$$\mathfrak{D}(\Gamma)\,f = ((f\varphi^\cdot)^*\,\psi.)^*$$

essendo

$$\alpha \xrightarrow{\varphi} \gamma \xleftarrow{\psi} \beta$$

una coppia di applicazioni che individua $\Gamma$ .
Risulta, dalla definizione, che se $1_\alpha : \alpha \to \alpha$ è il trasduttore identico, $\mathfrak{D}(1_\alpha)$ è l'applicaziione identica (2), in quanto per ogni $f \in \mathfrak{D}_\alpha$ , $\mathfrak{D}(1_\alpha)\,f = f^{**} = f$ .

---

(1) Cfr. [2] Teorema 2.2.
(2) Tuttavia si osservi che se gli elementi di $\mathfrak{D}_\alpha$ non fossero funzioni convesse s.c.i. la proprietà sopra enunciata non sarebbe verificata.

Inoltre vale la seguente:

Proposizione 3. Siano $\Gamma_1 : \alpha \to \beta$, $\Gamma_2 : \beta \to \delta$ trasduttori, allora

$$\mathfrak{D}(\Gamma_2 \Gamma_1) = \mathfrak{D}(\Gamma_2)\, \mathfrak{D}(\Gamma_1)\,.$$

Daremo la dimostrazione al successivo n. 5*a*).

Pertanto, $\mathfrak{D}$ risulta essere un funtore covariante tra la categoria dei trasduttori e quella degli insiemi.

Siano $f \in \mathfrak{D}_\alpha$ e $g \in \mathfrak{D}_\beta$; consideriamo la funzione $f \oplus g$ che ad un generico punto $(x, y) \in \mathbb{R}^\alpha \oplus \mathbb{R}^\beta$ associa il valore $f(x) + g(y)$. Con semplici considerazioni e utilizzando risultati noti sulle funzioni convesse s.c.i. (cfr. [4], Teorema 9.3) si prova che $f \oplus g \in \mathfrak{D}_{\alpha+\beta}$.

Consideriamo allora l'applicazione

$$\sigma_{\alpha,\beta} : \mathfrak{D}_\alpha \times \mathfrak{D}_\beta \to \mathfrak{D}_{\alpha+\beta}$$

definita ponendo

$$\sigma_{\alpha,\beta}(f, g) = f \oplus g\,.$$

Proveremo al n. 5*b*) che $\sigma$ è una trasformazione naturale e che essa verifica gli assiomi degli universi di dispositivi. La coppia $(\mathfrak{D}, \sigma)$ costituisce quindi un universo di funzioni convesse s.c.i., ovvero (se si preferisce considerare i subgradienti di queste) un universo di dispositivi ciclicamente monotoni massimali, che indicheremo con $\mathcal{M}$.

A questo punto è bene osservare che, come si è già accennato nella prefazione, per quanto i dispositivi di $\mathcal{M}$, come insiemi ciclicamente monotoni massimali, si possano ritrovare nell'universo di insiemi monotoni considerato in [3], tuttavia in $\mathcal{M}$ l'applicazione $\mathfrak{D}_\alpha \to \mathfrak{D}_\beta$, indotta da un trasduttore differisce in modo essenziale da quella definita in [3], tanto che, ivi, i dispositivi di $\mathcal{M}$ non costituiscono un sottouniverso, come dimostra il seguente esempio.

Si consideri nel piano $\mathbb{R}_{\}1,2\{}$ il cerchio $C$:

$$x_1^2 + (x_2 - 1)^2 \le 1\,.$$

Sia $\chi_C$ la funzione caratteristica di $C$ così definita:

$$\chi_C(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in C \\ +\infty & \text{se } x \notin C\,. \end{cases}$$

La funzione $\chi_C^*$ è un dispositivo di $\mathfrak{M}$ sull'insieme di terminali $\{1, 2\}$; il sub-gradiente $\partial\chi_C^*$ è quindi un insieme ciclicamente monotono massimale. Consideriamo l'operazione di soppressione del terminale 2 cioè il trasduttore $\tilde{i}: \{1, 2\} \to \{1\}$, reciproco dell'inclusione. Nell'universo definito in [3], $\mathfrak{D}(\tilde{i})\ (\partial\chi_C^*)$ è il sottoinsieme di $\mathbb{R}^{\}1\{} \times \mathbb{R}_{\}1\{}$ costituito dal solo punto $(0, 0)$, e non è quindi un insieme ciclicamente monotono massimale.

In $\mathfrak{M}$, invece, il subgradiente di $\mathfrak{D}(\tilde{i})\,\chi_C^*$, che è la funzione identicamente nulla in $\mathbb{R}^{\}1\{}$, è ciclicamente monotono massimale.

## 4. – Ancora sugli assiomi di $\mathfrak{D}_\alpha$.

Al n. 3, tra gli assiomi cui soddisfano le funzioni costituenti $\mathfrak{D}_\alpha$ abbiamo posto che l'interno relativo del dominio di tali funzioni contenga l'origine.

Ci pare interessante far vedere che i rimanenti assiomi su $\mathfrak{D}_\alpha$ non bastano a rendere $\mathfrak{D}$ un funtore; infatti, per quanto anche in questa nuova situazione, le proposizioni 1. e 2. del n. 3 continuino a valere ed abbia quindi senso considerare l'applicazione

$\mathfrak{D}(\Gamma): \mathfrak{D}_\alpha \to \mathfrak{D}_\beta$ indotta dal trasduttore $\Gamma: \alpha \to \beta$, definita al paragrafo precedente: tuttavia, ora, tale applicazione non preserva la composizione. A tal scopo si considerino i trasduttori seguenti:

| | |
|---|---|
| $\tilde{i}\ : \{1, 2, 3\} \to \{1, 2\}$ | reciproco dell'inclusione |
| $\varphi\ : \{1, 2\} \to \{1\}$ | applicazione |
| $\psi\ : \{1, 2, 3\} \to \{1, 3\}$ | l'applicazione $\psi(1) = \psi(2) = 1$, $\psi(3) = 3$ |
| $\tilde{j}\ : \{1, 3\} \to \{1\}$ | reciproco dell'inclusione. |

Orbene $\varphi\tilde{i} = \tilde{j}\psi$, mentre $\mathfrak{D}(\varphi)\,\mathfrak{D}(\tilde{i}) \neq \mathfrak{D}(\tilde{j})\,\mathfrak{D}(\psi)$.

Per verificarlo si consideri nello spazio $\mathbb{R}^{\}1,2\{}$ il cerchio $C$:

$$\left(x_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(x_2 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \leq 1$$

e la funzione $p_C: \mathbb{R}^{\}1,2\{} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ definita da:

$$p_C(x) = \inf\{\varrho \mid \varrho > 0,\quad x \in \varrho C\}$$

(ovviamente: $\inf \varnothing = +\infty$).

$p_C$ è convessa, inoltre essendo $C$ chiuso, è anche s.c.i. (cfr. [5], § 2, prop. 23), cioè il suo epigrafo $\hat{C}$ considerato nello spazio $\mathbb{R}^{\}1,2,3\{}$ è un insieme convesso e chiuso. Ci interessa considerare la funzione caratteristica di $\hat{C}$, cioè la funzione $\chi_{\hat{C}}$ così definita:

$$\chi_{\hat{C}}(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in \hat{C} \\ +\infty & \text{se } x \notin \hat{C} \end{cases}$$

$\chi_{\hat{C}}$ è convessa s.c.i. $\chi_{\hat{C}}(0) = 0$, $\chi_{\hat{C}}(x) \geq 0$, mentre $0 \notin \operatorname{ri} \operatorname{dom} \chi_{\hat{C}}$.

Ora $\mathfrak{D}(\tilde{i})\chi_{\hat{C}}$ è la funzione caratteristica del semipiano $x_2 \geq x_1$ di $\mathbb{R}^{\}1,2\{}$ e quindi $\mathfrak{D}(\varphi)\mathfrak{D}(\tilde{i})\chi_{\hat{C}}$ è la funzione identicamente nulla in $\mathbb{R}^{\}1\{}$; mentre $\mathfrak{D}(\psi)\chi_{\hat{C}}$ è la funzione caratteristica dell'insieme di punti di $\mathbb{R}^{\}1,3\{}$ soddisfacenti alle condizioni $x_1 = 0$ e $x^3 \geq 0$ e quindi $\mathfrak{D}(\tilde{j})\,\mathfrak{D}(\psi)\,\chi_{\hat{C}}$ è la funzione che vale zero nell'origine e $+\infty$ negli altri punti di $\mathbb{R}^{\}1\{}$.

## 5. – Dimostrazioni.

5*a*) Per alcune delle dimostrazioni, ci serviremo dei seguenti due lemmi.

LEMMA 1. Sia $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ un'applicazione lineare. Valgono i seguenti fatti:

*a*) Se $C \subset \mathbb{R}^n$ è un insieme convesso allora $\operatorname{ri} A(C) = A(\operatorname{ri} C)$

*b*) Se $K \mathbb{R} \subset {}^m$ è un insieme convesso e $A^{-1}(\operatorname{ri} K) \neq \varnothing$, allora $\operatorname{ri} A^{-1}(K) = A^{-1}(\operatorname{ri} K)$.

Per la dimostrazione di questo lemma si veda, ad esempio [4] Teor. 6.6 e Teor. 6.7.

LEMMA 2. Sia $\varphi : \alpha \to \beta$ una applicazione tra insiemi finiti; sia $f \in \mathfrak{D}_\beta$: definiamo per ogni $z \in \mathbb{R}^\alpha$

$$\bar{f}(z) = \inf_y f(y) \qquad (y \in \mathbb{R}^\beta,\ \varphi^{\cdot}(y) = z)$$

(ovviamente: se $z \notin \varphi^{\cdot}(\mathbb{R}^\beta)$, allora $\bar{f}(z) = +\infty$).

Valgono i seguenti fatti:

*a*) $(f^* \varphi_\cdot)^* = \bar{f}^{**}$

*b*) $\varphi^\cdot$ (ri dom $f$) $=$ ri dom $\bar{f}^{**} =$ ri dom $\bar{f}$

*c*) $\bar{f}^{**}(x) = \bar{f}(x)$ per ogni $x \in$ ri dom $\bar{f}$.

Dimostrazione: Come è noto $\bar{f}$ è una funzione convessa in generale non s.c.i., quindi $\bar{f}^{**}$ è la regolarizzata s.c.i. di $\bar{f}$ (cfr. [4] Teorema 12.2).

*a*) Sia $x \in \mathbb{R}^\alpha$; $f^*\varphi_\cdot(x) = \sup\limits_{y \in \mathbb{R}^\beta} \{\langle \varphi_\cdot(x), y\rangle - f(y)\} =$

$$= \sup_{y \in \mathbb{R}^\beta} \{\langle x, \varphi^\cdot(y)\rangle - f(y)\} = \sup_{z \in \varphi^\cdot(\mathbb{R}^\beta)} \Big[\sup_{\varphi^\cdot(y) = z} \{\langle x, \varphi^\cdot(y)\rangle - f(y)\}\Big] =$$

$$= \sup_{z \in \varphi^\cdot(\mathbb{R}^\beta)} \{\langle x, z\rangle - \bar{f}(z)\} = \sup_{z \in \mathbb{R}^\alpha} \{\langle x, z\rangle - \bar{f}(z)\}.$$

l'ultima uguaglianza seguendo dal fatto che: se $z \in \mathbb{R}^\alpha$, $z \notin \varphi^\cdot(\mathbb{R}^\beta)$, allora $\bar{f}(z) = +\infty$; quindi $f^*\varphi_\cdot = \bar{f}^*$, cioè $(f^*\varphi_\cdot)^* = \bar{f}^{**}$

*b*) ri dom $\bar{f} =$ ri dom $\bar{f}^{**}$ (cfr. [4] Corollario 7.4.1), inoltre dalla definizione di $\bar{f}$ si ha $\varphi^\cdot$(dom $f$) $=$ dom $\bar{f}$.

Applicando il lemma 1.*a*) si ha:

$$\varphi^\cdot(\text{ri dom } f) = \text{ri } \varphi^\cdot(\text{dom } f) = \text{ri dom } \bar{f}$$

*c*) Cfr. [4] Teorema 7.4.

Dimostrazione della proposizione 1.

La funzione, su $\mathbb{R}^\gamma$, $f\varphi^\cdot$ è convessa s.c.i. in quanto $\varphi^\cdot$ è lineare ed $f$ è convessa s.c.i. inoltre vale zero nell'origine ed assume valori in $0 \vdash\!\dashv +\infty$ quindi anche la sua coniugata è convessa s.c.i. ed un semplice calcolo diretto mostra che pure essa vale zero nell'origine di $\mathbb{R}_\gamma$ ed assume valori in $0 \vdash\!\dashv +\infty$. Un analogo ragionamento per mette di affermare che $\big((f\varphi^\cdot)^*\psi_\cdot\big)^*$ definita su $\mathbb{R}^\beta$ è una funzione convessa s.c.i. che vale zero nell'origine ed assume valori in $0 \vdash\!\dashv +\infty$.

Resta da provare che $0 \in$ ri dom $\big((f\varphi^\cdot)^* \psi_\cdot\big)^*$.

Intanto $0 \in$ ri dom $f\varphi^\cdot$, infatti dom $f\varphi^\cdot = \varphi^{\cdot -1}$ (dom $f$) e $\varphi^{\cdot -1}$(ri dom $f$) $\neq \varnothing$, in quanto $0 \in$ ri dom $f$: e si ha la tesi applicando lemma 1.*b*). Infine, per lemma 2.*b*) $\psi^\cdot$(ri dom $f\varphi^\cdot$) $=$ ri dom$(f\varphi^\cdot)^*\psi_\cdot)^*$.

DIMOSTRAZIONE DELLA PROPOSIZIONE 2.

Sia $$\alpha \xrightarrow{\varrho} \gamma' \xleftarrow{\tau} \beta$$

la coppia minima di $\Gamma$ (cfr. [2] pag. 226 e seg.) allora esiste $\mu$ applicazione iniettiva tale che commuta il diagramma

$$\begin{tikzcd} \alpha \arrow[r, "\varrho"] \arrow[dr, "\varphi"'] & \gamma' \arrow[d, "\mu"] & \beta \arrow[l, "\tau"'] \arrow[dl, "\psi"] \\ & \gamma & \end{tikzcd}$$

Si ha $((f\varphi^\cdot)^*\psi.)^* = ((f\varrho^\cdot\, \mu^\cdot)^*\mu.\tau.)^*$.

Poniamo $f\varrho^\cdot = g$, e facciamo vedere che $(g\,\mu^\cdot)^*\mu. = g^*$

$$(g\mu^\cdot)^*\mu.(u) = \sup_{x\in \mathrm{IR}^\gamma} \{\langle x\, , \mu.(u)\rangle - g\mu^\cdot(x)\} = \sup_{x\in \mathrm{IR}^\gamma} \{\langle \mu^\cdot(x)\, , u\rangle - g\mu^\cdot(x)\} =$$

$$= \sup_{v\in \mathrm{IR}^{\gamma'}} \{\langle v\, , u\rangle - g(v)\} = g^*(u)\, ;$$

la penultima uguaglianza valendo, in quanto $\mu^\cdot$ è surgettiva; e quindi $((f\varphi^\cdot)^*\psi.)^* = ((f\varrho^\cdot)^*\tau.)^*$.

DIMOSTRAZIONE DELLA PROPOSIZIONE 3.

Sia $\Gamma_1 : \alpha \xrightarrow{\varphi_1} \gamma_1 \xleftarrow{\psi_1} \beta$ ; $\Gamma_2 : \beta \xrightarrow{\varphi_2} \gamma_2 \xleftarrow{\psi_2} \delta$

con $\varphi_1$, $\psi_1$, $\varphi_2$, $\psi_2$ applicazioni tra insiemi finiti.

Si consideri il push-out

(1) $$\begin{tikzcd} & \beta \arrow[dl, "\psi_1"'] \arrow[dr, "\varphi_2"] & \\ \gamma_1 \arrow[dr, "\varrho"'] & & \gamma_2 \arrow[dl, "\tau"] \\ & \gamma_3 & \end{tikzcd}$$

allora $\Gamma_2 \cdot \Gamma_1 : \alpha \xrightarrow{\varphi_1} \gamma_1 \xrightarrow{\varrho} \gamma_3 \xleftarrow{\tau} \gamma_2 \xleftarrow{\psi_2} \delta$, quindi la proposizione sarà dimostrata facendo vedere che se $f \in \mathfrak{D}_{\gamma_1}$ allora

$$(f^*\,\psi_1.)^*\,\varphi_2^{\cdot} = ((f\,\varrho^\cdot)^*\,\tau.)^*\,.$$

Sia per ogni $x \in \mathbb{R}^{\gamma_2}$

$$\overline{f\varrho^{\cdot}}(x) = \inf_y f\varrho^{\cdot}(y) \qquad (y \in \mathbb{R}^{\gamma_3},\ \tau^{\cdot}(y) = x)$$

quindi per il lemma 2.$a$)

$$\big((f\varrho^{\cdot})^* \tau.\big)^* = \overline{f\varrho^{\cdot}}^{**}$$

Sia per ogni $z \in \mathbb{R}^{\beta}$

$$\bar{f}(z) = \inf_y f(y) \qquad (y \in \mathbb{R}^{\gamma_1},\ \psi_1^{\cdot}(y) = z)$$

quindi per il lemma 2.$a$)

$$(f^* \psi_1.)^* \varphi_2^{\cdot} = \bar{f}^{**} \varphi_2^{\cdot} .$$

Dimostriamo che $\overline{f\varrho^{\cdot}} = \bar{f}\,\varphi_2^{\cdot}$ ; infatti essendo il quadrato (1) un push-out è esatta la seguenza

$$\mathbb{R}^{\gamma_3} \xrightarrow{\begin{bmatrix} \varrho^{\cdot} \\ \tau^{\cdot} \end{bmatrix}} \mathbb{R}^{\gamma_1} \oplus \mathbb{R}^{\gamma_2} \xrightarrow{[\psi_1^{\cdot},\ -\varphi_2^{\cdot}]} \mathbb{R}^{\beta}$$

perciò per ogni $x \in \mathbb{R}^{\gamma_2}$ si ha

$$\varrho^{\cdot}\big(\tau^{\cdot -1}(x)\big) = \psi_1^{\cdot -1}\big(\varphi_2^{\cdot}(x)\big)$$

pertanto

$$\overline{f\varrho^{\cdot}}(x) = \inf_{\tau^{\cdot}(y) = x} f\varrho^{\cdot}(y) = \inf_{\psi_1^{\cdot}(y) = \varphi_2^{\cdot}(x)} f(y) = \bar{f}\,\varphi_2^{\cdot}(x) .$$

Ora, per il lemma 2.$b$)

$$\text{ri dom}\big((f\varrho^{\cdot})^* \tau.\big)^* = \text{ri dom}\,\overline{f\varrho^{\cdot}}$$

ed ivi, per il lemma 2.$c$) tali funzioni coincidono ; è immediato inoltre, che :

$$\text{dom } (f^* \psi_1.)^* \varphi_2^{\cdot} = \varphi_2^{\cdot -1} \text{ dom } (f^* \psi_1^{\cdot})^* \ ; \ \varphi_2^{\cdot -1} \text{dom } \bar{f} = \text{dom } \bar{f} \varphi_2^{\cdot}$$

ed anche $0 \in \varphi_2^{\cdot -1}\big(\text{ri dom } (f^* \psi_1\cdot)^*\big)$ quindi, applicando ove necessario il lemma 1.$b$) e il lemma 2.$b$), si ha la sequenza di uguaglianze:

$$\text{ri dom } (f^*\psi_1\cdot)^*\varphi_2^{\cdot} = \text{ri}\big(\varphi_2^{\cdot -1} \text{ dom } (f^*\psi_1\cdot)^*\big) = \varphi_2^{\cdot -1}\big(\text{ri dom } (f^* \psi_1\cdot)^*\big) =$$
$$= \varphi_2^{\cdot -1}(\text{ri dom } \bar{f}) = \text{ri } (\varphi_2^{\cdot -1} \text{ dom } \bar{f}) = \text{ri dom } \bar{f}\varphi_2^{\cdot}$$

ed ivi le funzioni $(f^* \psi_1\cdot)^* \varphi_2^{\cdot}$ e $\bar{f}\varphi_2^{\cdot}$ coincidono, in quanto per il lemma 2.$c$) in ri dom $\bar{f}$, $(f^*\psi_1\cdot)^*$ e $\bar{f}$ coincidono.

Pertanto le funzioni

$$\big((f\varrho^{\cdot})^*\tau\cdot\big)^* \quad \text{e} \quad (f^* \psi_1\cdot)^*\varphi_2^{\cdot}$$

convesse e s.c.i., sono tali che l'interno relativo del loro dominio è lo stesso per entrambe ed ivi esse coincidono, ma allora, come ben noto (vedasi 4 Corollario 7.3.4.) coincidono ovunque.

5$b$) Per quanto riguarda $\sigma$, definita al n. 3, essa è una trasformazione naturale. Basta verificare la commutatività del seguente diagramma:

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{D}_\alpha \times \mathfrak{D}_\beta \arrow[r, "\sigma_{\alpha,\beta}"] \arrow[d, "\mathfrak{D}(\Gamma_1)\times\mathfrak{D}(\Gamma_2)"'] & \mathfrak{D}_{\alpha+\beta} \arrow[d, "\mathfrak{D}(\Gamma_1+\Gamma_2)"] \\ \mathfrak{D}_\delta \times \mathfrak{D}_\gamma \arrow[r, "\sigma_{\delta,\gamma}"'] & \mathfrak{D}_{\delta+\gamma} \end{tikzcd}$$

ove $\Gamma_1 : a \to \delta$, $\Gamma_2 : \beta \to \gamma$ sono trasduttori.

Basterà fare le verifiche con $\Gamma_1$ identità, e $\Gamma_2$, di volta in volta, applicazione e reciproco di applicazione e viceversa scambiando $\Gamma_1$ e $\Gamma_2$.

$a$) Sia $\Gamma_1 = \text{id}$ e $\Gamma_2 = \varphi$ applicazione, allora:

$$\mathfrak{D}\,(\text{id} + \varphi)\, \sigma_{\alpha,\beta}(f, g) = \mathfrak{D}\,(\text{id} + \varphi)\,(f \oplus g) = (f \oplus g)\,(\text{id} + \varphi)^{\cdot} =$$
$$= f \oplus (g\varphi^{\cdot}) = \sigma_{\alpha,\gamma}(f, g\varphi^{\cdot}) = \sigma_{\alpha,\gamma}\big(\mathfrak{D}\,(\text{id}) \times \mathfrak{D}\,(\varphi)\big)(f, g)\,.$$