RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

MARCO MANGOLINI
LUIGI PAGANONI

Teoremi di regolarità per una classe di equazioni funzionali

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 57 (1977), p. 93-105

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1977__57__93_0>

REND. SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol. 57 (1977)

Teoremi di regolarità per una classe di equazioni funzionali

di MARCO MANGOLINI e LUIGI PAGANONI (*)

SUMMARY - In this paper we consider the functional equation $K(f(x), g(y)\,;\,x\,,y) = h(T(x\,,y))$ and we give some conditions under which the boundedness of f implies the continuity of g.

1. – Siano X, Y, Z e H spazi topologici, $\mathbb{R}$ l'asse reale, Ω un sottoinsieme di $\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times X\times Y$ e $T: X\times Y\to Z$, $K: \Omega\to H$ funzioni assegnate.

Si consideri la seguente equazione funzionale

$$(^\circ)\qquad K\big(f(x), g(y)\,;\,x,y\big) = h\big(T(x, y)\big)$$

e sia (f, g, h) una soluzione di tale equazione, cioè una terna di funzioni $f: X\to\mathbb{R}$, $g: Y\to\mathbb{R}$, $h: Z\to H$ che, sostituite nella equazione $(^\circ)$, la rendono identicamente soddisfatta.

In questa Nota si dimostrano dei teoremi di regolarità per le soluzioni di $(^\circ)$ che generalizzano altri già noti $\big([1], [2], [3]\big)$.

Precisamente si mostra come, sotto opportune ipotesi per le funzioni T e K, la limitatezza, anche solo unilaterale, di f nell'intorno di un certo insieme di punti X_0 implica la continuità di g.

È interessante notare che X_0 può in certi casi ridursi ad un numero finito di punti o addirittura ad un sol punto e di conseguenza i vincoli su f diventano ovviamente assai deboli.

(*) Indirizzo degli AA.: Istituto di Matematica F. Enriques - Università degli Studi di Milano - Via C. Saldini, 50 - 20133 Milano.

Lavoro eseguito nell'ambito del Gruppo Nazionale per l'Analisi Funzionale e le sue Applicazioni.

Il paragrafo 2 è dedicato alle notazioni ed alle definizioni. Nel paragrafo 3 sono dimostrati alcuni teoremi di regolarità e nel paragrafo 4 sono presentate delle classi di funzioni K che soddisfano ipotesi del tipo richiesto in detti teoremi.

2. – Se $x \in X$ e $y \in Y$, $\mathcal{U}(x)$ e $\mathcal{V}(y)$ denotano rispettivamente la famiglia degli intorni di x e di y. Se A è un sottoinsieme di uno spazio topologico, A^o è l'interno di A.

T_x e T^y sono rispettivamente le x-sezioni e le y-sezioni di T, cioè le funzioni così definite:

$$T_x : Y \to Z \quad , \quad T_x(y) = T(x, y)$$
$$T^y : X \to Z \quad , \quad T^y(x) = T(x, y) .$$

È necessario ora introdurre alcune definizioni.

Sia $(x_0, y_0) \in X \times Y$. Si considerino le seguenti proprietà relative all'applicazione $T : X \times Y \to Z$:

a) esiste $U \in \mathcal{U}(x_0)$ tale che, per ogni $x \in U$, T_x è continua;

b$_1$) per ogni $U \in \mathcal{U}(x_0)$, $(T^{y_0}(U))^o \neq \varnothing$;

b$_2$) per ogni $U \in \mathcal{U}(x_0)$ esiste $C \subset U$, $C \neq \varnothing$, tale che

i) $T^{y_0}(C)$ è aperto,

ii) per ogni $z \in T^{y_0}(C)$ esiste $V \in \mathcal{V}(y_0)$ tale che, per ogni $t \in V$, $z \in T^t(C)$;

b$_3$) come la b$_2$) con l'aggiunta della richiesta $x_0 \in C$.

DEFINIZIONE 1. Si dice che l'applicazione T *gode della proprietá* $\mathfrak{S}_i(x_0, y_0)$ $(i = 1, 2, 3)$ se essa soddisfa a) e b$_i$).

È evidente che $\mathfrak{S}_3(x_0, y_0) \Rightarrow \mathfrak{S}_2(x_0, y_0) \Rightarrow \mathfrak{S}_1(x_0, y_0)$.

Sono note (cfr., con ovvie varianti, [3]) alcune semplici condizioni nelle quali T gode delle proprietà $\mathfrak{S}_2(x_0, y_0)$ e $\mathfrak{S}_3(x_0, y_0)$.

PROPOSIZIONE 1. *Si supponga che*:

α) valga la proprietà a);

β) T^{y_0} *sia una mappa aperta in* x_0;

γ) per ogni $z \in Z$, *l'equazione* $z = T(x, y)$ *sia soddisfatta da* $x = G_z(y)$ *con* G_z *funzione continua definita su un aperto di* Y.

Allora T *soddisfa la proprietà* $\mathfrak{S}_3(x_0, y_0)$.

PROPOSIZIONE 2. *Sia* $T : X \times Y \to \mathbf{R}$. *Si supponga che*:

α') X *sia connesso e localmente connesso*;

β') *valga la proprietá* a);

γ') T^{y_0} *sia continua e non sia costante in alcun intorno di* x_0.
Allora T *soddisfa la proprietà* $\mathfrak{S}_2(x_0, y_0)$.

DEFINIZIONE 2. Siano $(x_0, y_0) \in X \times Y$, D ed E sottoinsiemi di $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ e $K : \Omega \to H$. Si supponga che esista un numero reale m con la seguente proprietà:

per ogni $\varepsilon > 0$ esistono $U_\varepsilon \in \mathfrak{U}(x_0)$ e $V_\varepsilon \in \mathfrak{V}(y_0)$ tali che per ogni $x_1, x_2 \in U_\varepsilon$, $y_1, y_2 \in V_\varepsilon$ e per ogni $(u_1, u_2) \in D$, $(v_1, v_2) \in E$

$K(u_1, v_1; x_1, y_1) = K(u_2, v_2; x_2, y_2)$ (1) implichi

$$v_1 - v_2 = A \cdot (u_1 - u_2) + B$$

con $|B| < \varepsilon$ e $A \in [0,m]$ oppure $A \in [m, 0]$ a seconda del segno di m.

In tal caso si dice che K *gode della proprietà* $L(D, E|x_0, y_0)$.

Inoltre, se $\mathfrak{D}$ ed $\mathfrak{E}$ sono due classi di sottoinsiemi di $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ e K soddisfa $L(D, E|x_0, y_0)$ per ogni $D \in \mathfrak{D}$ ed $E \in \mathfrak{E}$, si dice brevemente che K *soddisfa la proprietà* $\mathfrak{L}(\mathfrak{D}, \mathfrak{E}|x_0, y_0)$.

Nel seguito si utilizzeranno queste notazioni per indicare particolari sottoinsiemi o classi di sottoinsiemi di $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$:

$D_1(\alpha, \beta) = [\alpha, \beta] \times [\alpha, \beta]$ $\qquad \mathfrak{D}_1 \equiv \{D_1(\alpha, \beta) : \alpha, \beta \in \mathbf{R}\}$

$D_2(\beta) = (-\infty, \beta] \times (-\infty, \beta]$ $\qquad \mathfrak{D}_2 \equiv \{D_2(\beta) : \beta \in \mathbf{R}\}$

$D_3(\alpha, \beta) = (-\infty, \beta] \times [\alpha, \beta] \cup [\alpha, \beta] \times (-\infty, \beta]$ $\qquad \mathfrak{D}_3 \equiv \{D_3(\alpha, \beta) : \alpha, \beta \in \mathbf{R}\}$

$E(\Sigma, v_0) = \Sigma \times \{v_0\}$ dove $\Sigma \subset \mathbf{R}$ e $v_0 \in \Sigma$ $\qquad \mathfrak{E}(\Sigma) \equiv \{E(\Sigma, v) : v \in \Sigma\}$

(se $\Sigma = \mathbf{R}$ si scriverà brevemente $E(v_0)$ ed $\mathfrak{E}$ al posto di $E(\mathbf{R}, v_0)$ ed $\mathfrak{E}(\mathbf{R})$).

---

(1) È ovvio che, affinchè l'uguaglianza possa aver luogo, è preliminarmente indispensabile che $(u_1, v_1; x_1, y_1)$, $(u_2, v_2; x_2, y_2) \in \Omega$.

Si noti che, se $D_1 \subset D$ ed $E_1 \subset E$, $L(D, E|x_0, y_0) \Rightarrow L(D_1, E_1| x_0, y_0)$; di conseguenza $\mathfrak{L}(\mathfrak{D}_2, \mathcal{E}|x_0, y_0) \Rightarrow \mathfrak{L}(\mathfrak{D}_3, \mathcal{E}|x_0, y_0) \Rightarrow \mathfrak{L}(\mathfrak{D}_1, \mathcal{E}|x_0, y_0)$.

3. – TEOREMA 1. *Si consideri l'equazione* (°) *e si supponga che esista una funzione* $\varphi: Y \to X$ *tale che per ogni* $y \in Y$:

1) T *goda della proprietà* $\mathfrak{S}_i(\varphi(y), y)$,

2) K *goda della proprietà* $\mathfrak{L}(\mathfrak{D}_i, \mathcal{E}|\varphi(y), y)$,

dove $i = 2$ *oppure* $i = 3$.

Allora, posto $X_0 = \varphi(Y)$, *se* f *è superiormente limitata nell'intorno di ogni punto di* X_0, g *è continua su* Y.

OSSERVAZIONE 1. – Sulla funzione φ non si fa alcuna richiesta di carattere topologico; perciò X_0 può essere un generico sottoinsieme di X, anche costituito da un numero finito di punti o addirittura da un sol punto. In quest'ultimo caso è evidente che le ipotesi su f sono molto deboli e ciò nonostante bastano ad assicurare la continuità di g su tutto Y.

OSSERVAZIONE 2. – Se sono note informazioni sul coinsieme della funzione g e precisamente che $g(Y) \subset \Sigma$, allora è sufficiente supporre, in luogo della 2), la

2′) K goda della proprietà $\mathfrak{L}(\mathfrak{D}_i, \mathcal{E}(\Sigma)|\varphi(y), y)$.

OSSERVAZIONE 3. – Se f, anzichè superiormente, è inferiormente limitata, vale un analogo teorema pur di sostituire le classi $\mathfrak{D}_i$ $(i = 2{,}3)$ con le seguenti $\mathfrak{D}'_i$:

$$D'_2(a) = [a, +\infty) \times [a, +\infty) \qquad \mathfrak{D}'_2 \equiv \{D'_2(a) : a \in \mathbb{R}\}$$

$$D'_3(a,\beta) = [a, +\infty) \times [a,\beta] \cup [a,\beta] \times [a, +\infty) \qquad \mathfrak{D}'_3 \equiv \{D'_3(a,\beta) : a,\beta \in \mathbb{R}\}.$$

Basta infatti osservare che, ponendo $f_1 = -f$ e $K_1(u, v\,;\, x, y) = K(-u, v\,;\, x, y)$, l'equazione (°) diventa $K_1(f_1(x), g(y)\,;\, x, y) = h(T(x, y))$, riconducendosi così alle ipotesi del Teorema 1.

OSSERVAZIONE 4. – I seguenti controesempi mostrano come le richieste relative ad A, quali compaiono nell'enunciato della proprietà $\mathfrak{L}$, siano essenziali per la validità del precedente teorema.

ESEMPIO 1. – Siano $X \equiv Y \equiv Z \equiv H \equiv \mathbb{R}$, $K(u, v\ ;\ x, y) = v + \log(-u)$ (qui $\Omega = \mathbb{R}^- \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$) e $T(x, y) = x + y$. In tal caso, detta φ una generica funzione additiva e discontinua, l'equazione funzionale (°) ammette come soluzione la terna di funzioni così definita: $f(x) = -\exp[\varphi(x)]$, $g(y) = \varphi(y)$, $h(z) = \varphi(z)$.

Si osservi che, pur essendo f superiormente limitata, g è discontinua; questo non è in contrasto con il precedente teorema poichè non è soddisfatta la proprietà $\mathfrak{L}$(infatti $K(u_1, v_1\ ;\ x_1, y_1) = K(u_2, v_2\ ;\ x_2, y_2)$ implica $v_1 - v_2 = A \cdot (u_1 - u_2)$ con A funzione di u_1, u_2, v_1, v_2 di segno costante (negativo) ma non limitata).

ESEMPIO 2. – Siano $X \equiv Y \equiv Z \equiv H \equiv \mathbb{R}$, $K(u, v\ ;\ x, y) = v + u \cdot \sin \log |u|$ $\big($qui $\Omega = (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}\big)$ e $T(x, y) = x + y$.

In tal caso, detta φ una generica funzione additiva e discontinua, l'equazione funzionale (°) ammette come soluzione la terna di funzioni così definita: $f(x)$ una arbitraria soluzione negativa dell'equazione $f(x) \cdot \sin \log |f(x)| = \varphi(x)$, $g(y) = \varphi(y)$ e $h(z) = \varphi(z)$. Anche in questo caso f è superiormente limitata mentre g è discontinua; questo non è in contrasto con il precedente teorema poichè non è soddisfatta la proprietà $\mathfrak{L}$ $\big($infatti in tal caso $K(u_1, v_1\ ;\ x_1, y_1) = K(u_2, v_2\ ;\ x_2, y_2)$ implica $v_1 - v_2 = A \cdot (u_1 - u_2)$ con A funzione di u_1, u_2, v_1, v_2 limitata ma non di segno costante$\big)$.

OSSERVAZIONE 5. – Il Teorema 1 generalizza i Teoremi 2 e 3 di [3], come si verifica facilmente osservando che la funzione $K(u, v\ ;\ x, y) = a(x, y) \cdot u + b(x, y) \cdot v$, che compare in detti teoremi, soddisfa la proprietà $\mathfrak{L}(\mathfrak{D}_2, \mathcal{E} | x, y)$ o $\mathfrak{L}(\mathfrak{D}_3, \mathcal{E} | x, y)$ a seconda che $a(x, y)$ sia costante o meno.

Il Teorema 1 discende immediatamente dal seguente

LEMMA 1. *Siano* $(x_0, y_0) \in X \times Y$ e $v_0 \in \mathbb{R}$ *e si supponga che*:

1) *T soddisfi la proprietà* $\mathfrak{S}_2(x_0, y_0)$ $[\mathfrak{S}_3(x_0, y_0)]$;

2) *esistano* $\beta \in \mathbb{R}$ e $\Sigma \subset \mathbb{R}$ *tali che K soddisfi la proprietà* $L\big(D_2(\beta), E(\Sigma, v_0) | x_0, y_0\big)$ $\big[L\big(D_3(\alpha, \beta), E(\Sigma, v_0) | x_0, y_0\big)$ *con* $\alpha < f(x_0)\big]$.

Allora, se $f(x) \in (-\infty, \beta]$ *per ogni x di un opportuno intorno di* x_0, $g(Y) \subset \Sigma$ e $g(y_0) = v_0$, *g è continua in* y_0.

DIMOSTRAZIONE. *Caso indice* 2. Si scelga $\tilde{U} \in \mathfrak{U}(x_0)$ in modo che, per ogni $x \in \tilde{U}$, $f(x) \in (-\infty, \beta]$ e le sezioni T_x siano continue (questo è possibile per la 1)). Per la 2) ad ogni $\varepsilon > 0$ si possono coordinare due intorni $U_\varepsilon \in \mathfrak{U}(x_0)$ e $V_\varepsilon \in \mathfrak{V}(y_0)$ con le proprietà di cui alla Definizione 2. Sia $U = \tilde{U} \cap U_\varepsilon$; per la 1) esiste $C \subset U$ $(C \neq \varnothing)$ tale che $W = T^{y_0}(C)$ è aperto in Z.

Si consideri ora un punto $x_1 \in C$ tale che, per ogni $x \in C$, $f(x_1) > \operatorname*{Sup}_{x \in C} f(x) - \varepsilon \geq f(x) - \varepsilon$. Per la 1) e la definizione di W, $V = V_\varepsilon \cap T_{x_1}^{-1}(W)$ è un intorno di y_0; inoltre per ogni $y \in V$ esiste $x \in C$ $\big(x = x(y)\big)$ tale che $T(x_1, y) = T(x, y_0)$.

L'equazione funzionale (°) implica allora

$$K\big(f(x_1)\,,\ g(y)\ ;\ x_1\,,\ y\big) = K\big(f(x)\,, g(y_0)\,; x, y_0\big)$$

e poichè $x_1\,,\ x_2 \in U_\varepsilon\,,\ y, y_0 \in V_\varepsilon\,,\ \big(f(x_1)\,, f(x)\big) \in D_2(\beta)$ e $\big(g(y)\,, g(y_0)\big) \in E\,(\Sigma, v_0)$ se ne deduce

$$g(y) - g(y_0) = A\cdot\big(f(x_1) - f(x)\big) + B \tag{1}$$

dove A e B hanno le proprietà di cui alla Definizione 2.

La (1) è equivalente a

$$A\cdot\big(f(x_1) - f(x)\big) - \varepsilon < g(y) - g(y_0) < A\cdot\big(f(x_1) - f(x)\big) + \varepsilon$$

e da quest'ultima si ricava:

$$\text{se } m \geq 0 \quad g(y) - g(y_0) > -(1+m)\cdot\varepsilon \quad , \quad y \in V\,, \tag{2}$$

$$\text{se } m < 0 \quad g(y) - g(y_0) < (1-m)\cdot\varepsilon \quad , \quad y \in V\,. \tag{3}$$

Sempre per l'ipotesi 1) esiste $V' \in \mathfrak{V}\,(y_0)$ tale che, per ogni $y \in V'$, $T(x_1\,,\ y_0) \in T^y\,(C)$, cioè a dire, per ogni $y \in V'$, esiste $x \in C$ $\big(x = x(y)\big)$ tale che $T(x, y) = T(x_1\,,\ y_0)$.

Dall'equazione funzionale (°) segue ora

$$K\big(f(x)\,,\ g(y)\ ;\ x, y\big) = K\big(f(x_1),\ g(y_0)\ ;\ x_1\,,\ y_0\big)$$

e quindi, come sopra,

$$g(y) - g(y_0) = A\cdot\big(f(x) - f(x_1)\big) + B\,. \tag{4}$$

Dalla (4) discende ora :

(5) $\quad$ se $m \geqq 0 \quad g(y) - g(y_0) < (1+m)\cdot\varepsilon \quad , \quad y \in V'$,

(6) $\quad$ se $m < 0 \quad g(y) - g(y_0) > -(1-m)\cdot\varepsilon \quad , \quad y \in V'$.

Dalle (2), (3), (5) e (6) si ricava che, per ogni $y \in V \cap V'$,

$$|g(y) - g(y_0)| < (1+|m|)\cdot\varepsilon$$

e poichè m è indipendente da ε ne segue l'asserto

Caso indice 3. Si segue la stessa traccia di dimostrazione. Tuttavia, poichè ora la $\mathfrak{S}_3(x_0, y_0)$ assicura che $x_0 \in C$, si può dare una limitazione anche dal di sotto per $f(x_1)$; precisamente, per ogni $\varepsilon > 0$, si ha $f(x_0) - \varepsilon < f(x_1) \leqq \beta$ e, assumendo senza perdita di generalità $\varepsilon < f(x_0) - \alpha$, si ricava $\alpha < f(x_0) - \varepsilon < f(x_1) \leqq \beta$, con α e β indipendenti da ε. Se ne deduce quindi che, per la validità della dimostrazione precedente, è sufficiente supporre che K soddisfi $L\big(D_3(\alpha, \beta), E(\Sigma, v_0) | x_0, y_0\big)$ per ogni $\alpha < \beta$.

Dal Teorema 1 discende immediatamente il seguente :

COROLLARIO 1. *Sia* $X \equiv Y$ *e siano soddisfatte le ipotesi* 1) *e* 2) *del Teorema* 1. *Se* (ψ, ψ, h) *è una soluzione dell'equazione funzionale* (°) *e* ψ *è superiormente limitata nell'intorno di ogni punto di* X_0 , *allora* ψ *è continua.*

Il Teorema 1 prevede per f solo ipotesi di limitatezza unilaterale ; se invece f è limitata bilateralmente si può dimostrare un analogo teorema indebolendo le ipotesi su T e K.

TEOREMA 2. *Si consideri l'equazione* (°) *e si supponga che esista una funzione* $\varphi : Y \to X$ *tale che, per ogni* $y \in Y$:

1) T *goda della proprietà* $\mathfrak{S}_1\big(\varphi(y), y\big)$;

2) K *goda della proprietà* $\mathfrak{L}\big(\mathfrak{D}_1, \mathfrak{E} | \varphi(y), y\big)$.

Allora, posto $X_0 = \varphi(Y)$, *se* f *è limitata nell'intorno di ogni punto di* X_0, g *è continua su* Y.

Osservazione 6. – Valgono considerazioni analoghe a quelle contenute nell'Osservazione 1. Inoltre, anche per questo teorema, se $g(Y) \subset \Sigma$, si può sostituire l'ipotesi 2) con la

$$2') \ K \text{ goda della proprietà } \mathfrak{L}\big(\mathfrak{D}_1\, , \mathcal{E}(\Sigma) \,|\, \varphi(y), y\big) .$$

Osservazione 7. — I seguenti controesempi evidenziano che, per la validità del Teorema 2, sono essenziali le richieste relative ad A, quali compaiono nell'enunciato della proprietà $\mathfrak{L}$.

Esempio 3. – Siano $X \equiv Y \equiv Z \equiv H \equiv \mathbb{R}$, $K(u, v\,;\ x, y) = v + \operatorname{tg} u$ (qui $\Omega = (-\pi/2, \pi/2) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$) e $T(x, y) = x + y$. In tal caso, detta φ una generica funzione additiva e discontinua, l'equazione funzionale (°) ammette come soluzione la terna di funzioni così definita: $f(x) = \operatorname{artg} \varphi(x)$, $g(y) = \varphi(y)$, $h(z) = \varphi(z)$.

Si osservi che, pur essendo f limitata, g è discontinua; questo non è in contrasto con il precedente teorema poichè non è soddisfatta la proprietà $\mathfrak{L}$ (infatti $K(u_1\, , v_1\,;\, x_1\, , y_1) = K(u_2\, , v_2\,;\, x_2\, , y_2)$ implica $v_1 - v_2 = A \cdot (u_1 - u_2)$ con A funzione di $u_1\, , u_2\, , v_1\, , v_2$ di segno negativo ma non limitata).

Esempio 4. — Siano $X \equiv \mathbb{R}$ con la topologia «indiscreta», $Z \equiv \mathbb{R}$ con la topologia costituita dagli insiemi che nella topologia usuale di $\mathbb{R}$ sono aperti e simmetrici rispetto all'origine e $Y \equiv \mathbb{R} - \{0\}$ con la topologia indotta da quella di Z. Sia $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da $\varphi(t) = \exp(-t) - t$ e $\psi = \varphi^{-1}$. Si considerino le seguenti funzioni:

$$K(u, v\,;\, x, y) = \frac{\psi(v)}{u} \text{ definita in } \Omega \equiv \{(-2, -1) \cup (1,2)\} \times (-10,10) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R},$$

$$T(x, y) = \frac{\operatorname{artg} y}{\eta(x)} \text{ dove } \eta : X \to \mathbb{R} \text{ è una funzione tale che } \eta(X) = (-2, -1) \cup (1,2) .$$

In tal caso l'equazione funzionale (°) ammette come soluzioni la seguente terna di funzioni: $f(x) = \eta(x)$, $g(y) = \exp(-\operatorname{artg} y) - \operatorname{artg} y$, $h(z) = z$.

Ancora f è limitata mentre g è discontinua; ciò non è in contrasto con il precedente teorema poichè, pur essendo soddisfatte le ipotesi su T, viene a cadere la proprietà $\mathfrak{L}$ (infatti $K(u_1\, , v_1\,;\, x_1\, , y_1) = K(u_2\, , v_2\,;\, x_2\, , y_2)$ implica $v_1 - v_2 = A \cdot (u_1 - u_2)$ con A funzione di $u_1\, , u_2\, , v_1\, , v_2$ limitata ma non di segno costante).

OSSERVAZIONE 8. – Il Teorema 2 include il Teorema 1 di [3], come si verifica facilmente osservando che la funzione $K(u, v\,; x, y) = a(x\,, y)\cdot u + b(x\,, y)\cdot v$ che in esso compare soddisfa la proprietà $\mathfrak{L}(\mathfrak{D}_1\,, \mathcal{E}\,|\,x, y)$.

Il Teorema 2 discende immediatamente dal seguente:

LEMMA 2. *Si consideri l'equazione* (°) *e si supponga che*:

1) T *soddisfi la proprietà* $\mathfrak{S}_1\,(x_0\,, y_0)$;

2) K *soddisfi la proprietà* $L\big(D_1(\alpha, \beta), E(\Sigma, v_0)\,|\,x_0\,, y_0\big)$.

Allora, se $f(x) \in [\alpha, \beta]$ *per ogni* x *di un opportuno intorno di* x_0, $g(Y) \subset \Sigma$, *e* $g(y_0) = v_0$, g *è continua in* y_0.

DIMOSTRAZIONE. Si procede come nella prima parte della dimostrazione del Lemma 1 con ovvie modifiche di notazione e scegliendo $C = \{(T^{y_0})^{-1}\big[\big(T^{y_0}(U)\big)^{\circ}\big]\} \cap U$: si giunge in tal modo alle (2) e (3). Successivamente, posto $q = \operatorname*{Inf}_{x\in C} f(x)$, si determina $x_2 \in C$ tale che

$$f(x_2) < q + \varepsilon \leqq f(x) + \varepsilon \quad \text{per ogni } x \in C\,. \tag{7}$$

Considerato l'intorno di y_0, $V'' = V\varepsilon \cap (T_{x_2})^{-1}(W)$, per ogni $y \in V''$ esiste $x \in C$ $\big(x = x(y)\big)$ tale che $T(x_2\,, y) = T(x, y_0)$.

Di qui, attraverso i passaggi usuali si ottiene

$$A\cdot\big(f(x_2) - f(x)\big) - \varepsilon < g(y) - g(y_0) < A\cdot\big(f(x_2) - f(x)\big) + \varepsilon$$

e, per la (7), si ricavano le maggiorazioni (5) e (6) con $y \in V''$. Come nella dimostrazione del Lemma 1 segue ora la continuità di g in y_0.

Dal Teorema 2 discende immediatamente il seguente

COROLLARIO 2. *Sia* $X \equiv Y$ *e siano soddisfatte le ipotesi* 1) *e* 2) *del Teorema 2. Se* (φ, φ, h) *è una soluzione dell'equazione funzionale* (°) *e* φ *è limitata nell'intorno di ogni punto di* X_0, *allora* φ *è continua.*

4. – In questo paragrafo sono presentati due esempi di classi di funzioni K che soddisfano ipotesi del tipo richiesto nei teoremi del paragrafo precedente ([2]).

Si osservi preventivamente che la validità della proprietà $\mathfrak{L}(\mathfrak{D}_i, \mathcal{E}|x_0, y_0)$ $(i = 1, 2, 3)$ implica una certa regolarità per gli insiemi di livello di $K(u, v; x_0, y_0)$. Si consideri infatti l'insieme di livello $L_{x_0y_0}(c_0) = \{(u, v) : K(u, v; x_0, y_0) = c_0\}$ e sia $(u_0, v_0) \in L_{x_0y_0}(c_0)$. Si scelga $D_i \in \mathfrak{D}_i$ in modo che $(u_0, u_0) \in \mathfrak{D}_i{}^0$; poichè vale $L(D_i, E(v_0)|x_0, y_0)$, per la Definizione 2, esiste $m \in \mathbb{R}$ tale che per ogni $(u, v) \in L_{x_0y_0}(c_0)$, dal fatto che $(u, u_0) \in D_i$ segue:

$$(8) \qquad v - v_0 = A\cdot(u - u_0) \quad \text{con } A \in [0, m] \text{ o } A \in [m, 0]$$

a seconda del segno di m([3]).

Questo significa che, per ogni u_0, esiste al più un solo v per cui $(u_0, v) \in L_{x_0y_0}(c_0)$ e quindi $K(u, v; x_0, y_0) = c_0$ è equivalente a $v = \varphi_{c_0}(u)$. Inoltre la funzione φ_{c_0} risulta, per la (8), continua (anzi localmente lipschitziana !). Per l'arbitrarietà di c_0 ne segue l'asserto.

Tuttavia la validità della proprietà $\mathfrak{L}(\mathfrak{D}_i, \mathcal{E}|x_0, y_0)$ non è sufficiente ad assicurare la continuità di $K(u, v; x_0, y_0)$; basta pensare infatti al seguente

ESEMPIO 5. – Sia $K: \mathbb{R}\times\mathbb{R}\times X\times Y \to \mathbb{R}$ così definita:

$$K(u, v; x, y) = \begin{cases} u + v & \text{se } u + v \geq 0 \\ u + v - 1 & \text{se } u + v < 0 . \end{cases}$$

In tal caso K non è continua e tuttavia soddisfa la proprietà $L(D, E|x_0, y_0)$ per ogni $(x_0, y_0) \in X \times Y$ e per ogni $D, E \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ (infatti l'uguaglianza $K(u_1, v_1; x_1, y_1) = K(u_2, v_2; x_2, y_2)$ implica $v_1 - v_2 = u_2 - u_1$).

([2]) L'attenzione viene fissata esclusivamente sulla funzione K e la proprietà $\mathfrak{L}$ ad essa connessa poichè, per quanto riguarda le proprietà richieste alla funzione T, esse sono assicurate da alcune semplici condizioni contenute nelle Proposizioni 1 e 2.

([3]) La Definizione 2 garantisce che, per ogni $\varepsilon > 0$, $v - v_0 = A\cdot(u - u_0) + B$ con $|B| < \varepsilon$; poichè questo deve valere per ogni ε, ne segue $B = 0$.

a). Sia $(x_0, y_0) \in X \times Y$. Si supponga che esistano un intervallo aperto $I \subset \mathbb{R}$ e due intorni $U \in \mathfrak{U}(x_0)$, $V \in \mathfrak{V}(y_0)$ tali che:

i) $\Omega \supset I \times \mathbb{R} \times U \times V$ e, posto $C = K(I \times \mathbb{R} \times U \times V)$, esista una funzione $\Phi : I \times C \times U \times V \to \mathbb{R}$, continua rispetto ad (x, y) nel punto (x_0, y_0), uniformemente rispetto a $(u, c) \in I \times C$;

ii) per ogni $(u, v; x, y) \in I \times \mathbb{R} \times U \times V$ e per ogni $c \in C$, $K(u, v; x, y) = c$ sia equivalente a $v = \Phi(u, c; x, y)$;

iii) Φ sia derivabile rispetto ad u e Φ'_u sia limitata e di segno costante in $I \times C \times U \times V$.

Allora K soddisfa la proprietà $L(D, E | x_0, y_0)$ per ogni $D \subset I \times I$ ed $E \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Basta infatti osservare che da $K(u_1, v_1; x_1, y_1) = K(u_2, v_2; x_2, y_2)$ si deduce:

$$\begin{aligned} v_1 - v_2 &= \Phi(u_1, c; x_1, y_1) - \Phi(u_2, c; x_2, y_2) = \\ &= \{\Phi(u_1, c; x_1, y_1) - \Phi(u_2, c; x_1, y_1)\} + \{\Phi(u_2, c; x_1; y_1) - \\ &- \Phi(u_2, c; x_2, y_2)\} = \Phi'_u(\bar{u}, c; x_1, y_1) \cdot (u_1 - u_2) + \\ &+ \{\Phi(u_2, c; x_1, y_1) - \Phi(u_2, c; x_2, y_2)\} = A \cdot (u_1 - u_2) + B . \end{aligned}$$

Dalle i) e iii) segue ora l'asserto.

Esempio 6. - Sia $K : (-1, 1) \times \mathbb{R} \times X \times Y \to \mathbb{R}$ così definita:

$$K(u, v; x, y) = v - \operatorname{sgn}(u) \cdot u^2.$$

Scegliendo $I = (-1, 1)$ e $\Phi = c + \operatorname{sgn}(u) \cdot u^2$, $c \in \mathbb{R}$, $u \in I$ è immediato controllare la validità di *i) ii)* e *iii)*.

b). Siano $H \equiv \mathbb{R}$ e $(x_0, y_0) \in X \times Y$ e si supponga che esistano $U \in \mathfrak{U}(x_0)$, $V \in \mathfrak{V}(y_0)$ e due numeri positivi R e R' (eventualmente $+\infty$) tali che:

i) per ogni $(u, v; x, y) \in (-R, R) \times (-R', R') \times U \times V$

$$K(u, v; x, y) = \sum_{n,m=0}^{+\infty} a_{nm}(x, y) \cdot u^n \cdot v^m$$

essendo la serie uniformemente convergente rispetto ad $(x,y) \in U \times V$;

ii) per ogni $n, m \geq 0$ $a_{nm}(x, y)$ siano continue in (x_0, y_0) ;

iii) per ogni $n \geq 1$ $a_{no}(x, y)$ siano di segno concorde in $U \times V$;

iv) per tutte le coppie (n, m) con $m > 0$, salvo un'unica coppia (n_0, m_0), si abbia $a_{nm}(x_0, y_0) = 0$;

v) se $n_0 \neq 0$, il segno di $a_{n_0 m_0}(x_0, y_0)$ sia concorde col segno di $a_{no}(x_0, y_0)$ [discorde col segno di $a_{no}(x_0, y_0)$ solo se m_0 è dispari].

Allora, se $0 < \sigma < \varrho < R$, $0 < \sigma' < \varrho' < R'$, K soddisfa la proprietà $L(D_1(\sigma, \varrho), E(\Sigma, \eta) | x_0, y_0)$ per ogni $\eta \in \Sigma$, dove $\Sigma = [-\varrho', -\sigma']$ o $\Sigma = [\sigma', \varrho']$ se m_0 è pari, $\Sigma = [\sigma', \varrho']$ se m_0 è dispari $[\Sigma = [-\varrho', -\sigma']]$.

Inoltre, se $m_0 = 1$ si può assumere $\Sigma = [-\varrho', \varrho']$ e se $n_0 = 0$ si può assumere anche $\sigma = 0$.

Infatti $K(u_1, v_1; x_1, y_1) = K(u_2, v_2; x_2, y_2)$ implica (4)

$$a^{(1)}_{n_0 m_0} \cdot u_1^{n_0} v_1^{m_0} - a^{(2)}_{n_0 m_0} \cdot u_2^{n_0} v_2^{m_0} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a^{(2)}_{no} u_2^n - a^{(1)}_{no} u_1^n\right) + \\ + a^{(2)}_{oo} - a^{(1)}_{oo} + \sum_{\substack{(n, m) \neq (n_0, m_0) \\ m > o}} \left(a^{(2)}_{nm} u_2^n v_2^m - a^{(1)}_{nm} u_1^n v_1^m\right)$$

e di qui, attraverso passaggi elementari, si giunge a scrivere $v_1 - v_2 = A \cdot (u_1 - u_2) + B$, dove

$$A = -\left(a^{(1)}_{n_0 m_0} u_1^{n_0} \cdot \sum_{k=0}^{m_0 - 1} v_1^k v_2^{m_0 - 1 - k}\right)^{-1} \cdot \left\{ v_2^{m_0} a^{(1)}_{n_0 m_0} \cdot \sum_{k=o}^{n_0 - 1} u_1^k u_2^{n_0 - 1 - k} + \right. \\ \left. + \sum_{n=1}^{\infty} a^{(2)}_{no} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} u_1^k u_2^{n-1-k} \right\},$$

$$B = \left(a^{(1)}_{n_0 m_0} u_1^{n_0} \sum_{k=0}^{m_0 - 1} v_1^k v_2^{m_0 - 1 - k}\right)^{-1} \left\{ v_2^{m_0} u_2^{n_0} \cdot \Delta a_{n_0 m_0} + \Delta a_{oo} + \right. \\ \left. + \sum_{n=1}^{\infty} u_1^n \cdot \Delta a_{no} + \sum_{\substack{(n, m) \neq (n_0, m_0) \\ m > 0}} \left(a^{(2)}_{nm} u_2^n v_2^m - a^{(1)}_{nm} u_1^n v_1^m\right) \right\}.$$

(4) Per brevità si pone $a^{(i)}_{nm} = a_{nm}(x_i, y_i)$ $(i = 1, 2)$ e $\Delta a_{nm} = a^{(2)}_{nm} - a^{(1)}_{nm}$.

Ora A è di segno costante in virtù delle iii) e v) e limitata perchè $\sum_{n=1}^{\infty} | a_{no}^{(2)} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} u_1^k u_2^{n-1-k} |$ è maggiorata dalla serie $\sum_{n=1}^{\infty} | a_{no}^{(2)} | n \cdot \varrho^{n-1}$ che, per la i), risulta convergente.

Per quanto riguarda B si osservi che, per ogni $\varepsilon > 0$, si possono scegliere gli intorni di x_0 e y_0 in modo che gli addendi dentro parentesi graffa siano minori di ε. Per i primi due questo segue dalla *ii*) ; per il terzo è conseguenza del fatto che la somma della serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_{no}(x, y)\ u_1^n$ è, per la *i*) e la *ii*), continua in (x_0, y_0). Per l'ultimo termine segue da *i*) e *iv*).

Esempio 7. – Siano $(x_0, y_0) \in X \times Y$ e $K : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times X \times Y \to \mathbb{R}$ così definita :

$$K(u, v ; x, y) = \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{\sin^2 (\psi_{nm}(x, y))}{n\,!\ m\,!}\ u^n v^m ,$$

dove le ψ_{nm} sono funzioni continue in (x_0, y_0) e i valori $\psi_{nm}(x_0, y_0)$ sono multipli di π per tutte le coppie (n, m) con $m > 0$ salvo una, (n_0, m_0) .

In questo caso la serie converge in $\mathbb{R}^2$ uniformemente rispetto a $(x, y) \in X \times Y$ e sono perciò soddisfatte tutte le condizioni *i*) — *v*) .

BIBLIOGRAFIA

[1] J. Aczél, *Lectures on functional equations and their applications*, Academic Press, New York, 1966.

[2] C. T. Ng, *Local boundedness and continuity for a functional equation on topological spaces*, Proc. Am. Math. Soc., **39** (1973), pp. 525-529.

[3] S. Paganoni Marzegalli, *Limitatezza e continuità delle soluzioni di una classe di equazioni funzionali*, Rend. Ist. di Matem. Univ. Trieste, vol. VIII fasc. I (1976).

Manoscritto pervenuto in redazione l'1 febbraio 1977.