RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

EMILIA SANSONE

Deduzione della teoria dei fluidi maxwelliani dalla termodinamica dei sistemi continui

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 57 (1977), p. 39-52

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1977__57__39_0>

Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, Vol. 57 (1977)

Deduzione della teoria dei fluidi maxwelliani dalla termodinamica dei sistemi continui

Emilia Sansone (*)

Introduzione.

In uno studio sui gas rarefatti ([1]) J. C. Maxwell, applicando i metodi della meccanica statistica ad un modello molecolare più accurato di quello adottato per i gas perfetti, pervenne ad un'equazione costitutiva per il tensore degli sforzi $\underline{T}$ in cui figuravano, linearmente, il gradiente di velocità e le derivate seconde spaziali del campo di temperatura θ. Fu appunto la dipendenza dalle derivate di θ a consentire a J. C. Maxwell l'interpretazione teorica di alcuni effetti sperimentali rilevati da W. Crookes, Kundt e Warburg per i gas rarefatti (cfr.[2]) e da H. L. M. Helmholtz e Piotrowski per i liquidi (cfr. [3]). Un'ulteriore conferma di tali risultati fu data poi da O. Reynolds (cfr.[4]).

C. Truesdell, in [5] (cfr. anche [6], [7], [8], [9]) ha ripreso lo studio dei suddetti effetti nell'ambito della teoria dei continui, nell'intento di eliminare le ipotesi restrittive proprie della teoria cinetica. Tale Autore, infatti, considera una classe di fluidi, detti maxwelliani, per i quali le equazioni costitutive del tensore degli sforzi $\underline{T}$ e del vettore corrente di calore $\underline{h}$ dipendono analiticamente dai seguenti argomenti:

$$(\mathrm{grad})^p \varrho\,,\ (\mathrm{grad})^q \overset{(n)}{\theta}\,,\ (\mathrm{grad})\ \overset{s(r+1)}{\underline{x}}\,,\ (p\,,q\,,r\,,s\,,n=0,1,2\,,\dots m)\ \text{dove}$$

ϱ è la densità del fluido, θ il campo di temperatura, $\underline{x}$ il vettore di posizione della generica particella e gli indici (n) ed $(r+1)$ indi-

(*) Indirizzo dell'A.: Istituto Matematico dell'Università di Napoli, Via Mezzocannone 8.

Lavoro eseguito nell'ambito delle attività del Gruppo Nazionale per la Fisica Matematica del C.N.R.

cano derivazioni temporali. Soddisfatto così il principio di equipresenza, viene imposto anche quello di oggettività; inoltre, introdotti i coefficienti di confronto μ_0 e χ_0 di viscosità e conduzione rispettivamente, si sviluppano in serie di potenza di μ_0 le equazioni costitutive per $\underline{T}$ ed $\underline{h}$, adimensionalizzate. Tali serie, arrestate ai termini del 2^0 ordine in μ_0 consentono di ritrovare, oltre ai risultati di J. C. Maxwell, ulteriori previsioni teoriche tra cui l'effetto Brillouin (dipendenza di $\underline{h}$ dal grad ϱ al 1^0 ordine).

C. Truesdell, però (cfr. ad es. [9]), non ricerca le restrizioni su $\underline{T}$ ed $\underline{h}$ derivanti dall'imporre il principio di dissipazione ridotta. La termodinamica dei fluidi maxwelliani è invece l'oggetto di un recente lavoro di M. Carrassi ed A. Morro [11], anche se la classe dei materiali da Essi considerata è più ristretta di quella analizzata da Truesdell, poichè viene esclusa la dipendenza di $\underline{T}$ ed $\underline{h}$ da $(\text{grad})^q\,\theta^{(n+1)}$, $(\text{grad})^s\,\underline{x}^{(r+2)}$. Tali Autori, dedotte le restrizioni termodinamiche imposte dalla diseguaglianza di Clausius-Duhem e dal principio di oggettività alle equazioni costitutive di $\underline{T}$ ed $\underline{h}$, ne eseguono uno sviluppo in serie di potenze di μ_0 e confrontano i risultati così ottenuti con quelli determinati da C. Truesdell (cfr. ad es. [8] o [9]). Dal confronto appare che il principio di dissipazione rende impossibile la presenza, nello sviluppo di $\underline{T}$ ed $\underline{h}$, di alcuni termini. Così, ad esempio, in $\underline{T}$ non figura grad grad θ (al 2^0 ordine in μ_0) mentre $\underline{h}$ è indipendente da grad ϱ (al 1^0 ordine in μ_0). In [11] si conclude che la teoria dei continui è incompatibile con la fenomenologia dei fluidi maxwelliani che possono, pertanto, studiarsi soltanto con metodi statistici.

Nel presente lavoro si mostra che tale incompatibilità non sussiste. Infatti, per riottenere i risultati di C. Truesdell è sufficiente sostituire la diseguaglianza di Clausius-Duhem con quella più generale proposta in [12] da I. Müller (1), nella quale il flusso di entropia non è $\underline{h}/\theta$ (come nella diseguaglianza di Clausius-Duhem) bensì risulta dato da $\dfrac{\underline{h}}{\theta} + \underline{s}$, dove $\underline{s}$ è un extraflusso di cui occorre assegnare l'equazione costitutiva (2).

(1) Tale diseguaglianza è stata applicata dallo stesso I. Müller nello studio delle miscele in [13] e da A. Romano per la termodinamica dei dielettrici ([15]) e delle sostanze ferromagnetiche ([16]).

(2) Si noti che già nella teoria cinetica l'espressione del flusso di entropia differisce da $\underline{h}/\theta$ (cfr. [12]).

Al n. 1 si considera un materiale differenziale del 2° ordine completo, cioè con equazioni costitutive dipendenti dal gradiente di deformazione $\underline{F}$, dal campo di temperatura θ e da *tutte* le loro derivate prime e seconde, temporali e spaziali e si deducono le restrizioni imposte a dette equazioni dalla nuova diseguaglianza di dissipazione ridotta (ottenuta utilizzando il 2° principio della termodinamica di I. Müller), dal principio d'oggettività e dall'isotropia (n. 3). Sviluppando poi in serie di potenze di μ_0 le funzioni $\underline{T}$ ed $\underline{h}$ (n. 4), si perviene alle seguenti conclusioni (n. 5):

1) La presenza di un extraflusso $\underline{s} \neq \underline{o}$ garantisce la compatibilità con la termodinamica delle equazioni costitutive a cui perviene C. Truesdell; il 2° principio precisa soltanto la natura dei coefficienti figuranti in dette equazioni. Inoltre, detta compatibilità sussiste anche quando si assumano le equazioni costitutive di M. Carrassi ed A. Morro. Infine, sempre nel caso $\underline{s} \neq \underline{o}$, eliminando in $\underline{T}$ ed $\underline{h}$ la dipendenza da $\dot{\underline{F}}$, $\ddot{\underline{F}}$ e grad $\dot{\underline{F}}$, ma mantenendo la dipendenza da $\dot{\theta}$, $\ddot{\theta}$, grad $\dot{\theta}$, il tensore degli sforzi continua a dipendere da grad grad θ ed il vettore corrente di calore da grad ϱ, in accordo con la considerazione che, *nel caso di un gas rarefatto, tale dipendenza non può essere connessa alla presenza di viscosità.*

2) Se $\underline{s} = \underline{o}$ le espressioni di $\underline{T}$ ed $\underline{h}$ differiscono dalle analoghe di Truesdell e, come è ovvio, nel caso in cui si elimini la dipendenza di $\underline{T}$ ed $\underline{h}$ da $\dot{\theta}$, $\ddot{\theta}$, grad $\dot{\theta}$, $\dot{\underline{F}}$ si ritrova la teoria esposta in [11].

1. - Principi della termodinamica ed equazioni costitutive.

Siano C_* e C le configurazioni di riferimento ed attuale di un sistema continuo S. Durante tutto il moto di S si postula la validità delle equazioni del bilancio dell'impulso, del momento angolare e dell'energia che, in coordinate materiali, localmente, si scrivono [3]:

$$
(1)\quad \begin{cases} \varrho_* \ddot{\underline{x}} = \operatorname{Div} \underline{T}_* + \varrho_* \underline{b}\,, \\ \underline{T}_* \underline{F}^T = \underline{F}\, \underline{T}^T\,, \\ \varrho_* \dot{\varepsilon} = \underline{T}_* : \dot{\underline{F}} - \operatorname{Div} \underline{h}_* + \varrho_* r \qquad , \qquad (\underline{T}_* : \dot{\underline{F}} = T_{*i}^{\,L} \dot{F}^i_L) \end{cases}
$$

[3] Con $\underline{A}^T$ si denota la trasposta di una matrice $\underline{A}$.

nelle (1) $\underline{x}(\underline{X}, t)$ rappresenta il vettore di posizione, ϱ_* la densità materiale, $\underline{T}_*$ il tensore di Piola-*Kirchhoff*, $\underline{b}$ la densità di forza, ε la densità di energia interna, $\underline{F}$ il gradiente di deformazione, $\underline{h}_*$ il vettore (materiale) corrente di calore ed r la densità di calore irradiato dall'esterno; inoltre gli operatori Div e Grad comportano derivazioni rispetto alle coordinate materiali. Per il continuo S viene poi postulato il 2^0 principio della termodinamica nella forma proposta da I. Müller (4):

$$\varrho_* \dot{\eta} \geq \operatorname{Div} \underline{\Phi}_* + \varrho_* \frac{r}{\theta}, \tag{2}$$

dove η denota l'entropia specifica, $\underline{\Phi}_* = \dfrac{\underline{h}_*}{\theta} + \underline{s}_*$ rappresenta il flusso di entropia, dato dalla somma di $\dfrac{\underline{h}_*}{\theta}$ e di un extraflusso $\underline{s}_*$ (5), infine $\dfrac{r}{\theta}$ denota la densità del flusso radiativo di entropia.

Si supponga ora che il sistema S sia un materiale differenziale del 2^0 ordine completo, cioè di equazioni costitutive:

$$\left\{\begin{array}{ll} \psi & = \tilde{\psi}\,(\underline{F}\,, \nabla\underline{F}\,, \nabla^2\underline{F}\,, \dot{\underline{F}}\,, \nabla\dot{\underline{F}}\,, \theta\,, \underline{G}\,, \nabla\underline{G}\,, \dot{\theta}\,, \dot{\underline{G}}\,, \ddot{\theta}\,, \ddot{\underline{F}}) \\ \eta & = \tilde{\eta}\,(\quad » \quad » \quad » \quad) \\ \underline{T}_* & = \tilde{\underline{T}}_*\,(\quad » \quad » \quad » \quad) \\ \underline{h}_* & = \tilde{\underline{h}}_*\,(\quad » \quad » \quad » \quad) \\ \underline{s}_* & = \tilde{\underline{s}}_*\,(\quad » \quad » \quad » \quad) \end{array}\right. \tag{3}$$

con $\psi = \varepsilon - \theta\,\eta$ potenziale termodinamico, $\underline{G} = \operatorname{Grad}\theta$ e $\nabla\underline{F} = \operatorname{Grad}\underline{F}$.

Alle (3), che già soddisfano i principi dell'equipresenza, dell'azione locale e del determinismo, si richiede inoltre di soddisfare il principio di oggettività nonchè quello di dissipazione ridotta. Questo ultimo comporta che le (3) verifichino, in ogni processo termocinetico $\{\underline{x}(\underline{X}, t), \theta(\underline{X}, t)\}$, la diseguaglianza di dissipazione ridotta ottenuta dalla $(1)_3$ e dalla (2) eliminando $\operatorname{Div}\underline{h}_* + \varrho_* r$:

$$-\varrho_*(\dot{\psi} + \eta\,\dot{\theta}) + \underline{T}_* : \dot{\underline{F}} - \frac{\underline{h}_* \cdot \underline{G}}{\theta} + \theta \operatorname{Div} \underline{s}_* \geq 0. \tag{4}$$

(4) Cfr. [12].

(5) Si noti che per i materiali semplici si pone $\underline{s}_* = \underline{0}$.

2. - Restrizioni imposte dalla diseguaglianza di dissipazione ridotta.

La diseguaglianza (4), tenuto conto delle $(3)_{1,4,}$ si scrive:

$$
(5)\quad \begin{cases}
\left(-\varrho_*\dfrac{\partial\psi}{\partial F^i_L}+T^L_{*i}\right)\dot{F}^i_L+\left(-\varrho_*\dfrac{\partial\psi}{\partial F^i_{L,M}}+\theta\dfrac{\partial s^M_*}{\partial\dot{F}^i_L}\right)\dot{F}^i_{L,M}+\left(-\varrho_*\dfrac{\partial\psi}{\partial F^i_{L,MN}}+\right. \\
\left.+\theta\dfrac{\partial s^N_*}{\partial\dot{F}^i_{L,M}}\right)\dot{F}^i_{L,MN}-\varrho_*\dfrac{\partial\psi}{\partial\dot{F}^i_L}\ddot{F}^i_L+\left(-\varrho_*\dfrac{\partial\psi}{\partial\dot{F}^i_{L,M}}+\theta\dfrac{\partial s^M_*}{\partial\ddot{F}^i_L}\right)\ddot{F}^i_{L,M}+ \\
-\varrho_*\left(\dfrac{\partial\psi}{\partial\theta}+\eta\right)\dot{\theta}-\varrho_*\dfrac{\partial\psi}{\partial\ddot{F}^i_L}\dddot{F}^i_L+\left(-\varrho_*\dfrac{\partial\psi}{\partial\theta_{,M}}+\theta\dfrac{\partial s^M_*}{\partial\dot{\theta}}\right)\dot{\theta}_{,M}+ \\
\left(-\varrho_*\dfrac{\partial\psi}{\partial\theta_{,LM}}+\theta\dfrac{\partial s^M_*}{\partial\dot{\theta}_{,L}}\right)\dot{\theta}_{,LM}-\varrho_*\dfrac{\partial\psi}{\partial\dot{\theta}}\ddot{\theta}+\left(-\varrho_*\dfrac{\partial\psi}{\partial\dot{\theta}_{,M}}+\theta\dfrac{\partial s^M_*}{\partial\ddot{\theta}}\right)\ddot{\theta}_{,M} \\
-\varrho_*\dfrac{\partial\psi}{\partial\ddot{\theta}}\dddot{\theta}+\left(-\dfrac{h^M_*}{\theta}+\theta\dfrac{\partial s^M_*}{\partial\theta}\right)\theta_{,M}+\theta\dfrac{\partial s^M_*}{\partial F^i_L}F^i_{L,M}+ \\
+\theta\dfrac{\partial s^N_*}{\partial F^i_{L,M}}F^i_{L,MN}+\theta\dfrac{\partial s^N_*}{\partial F^i_{L,MH}}F^i_{L,MHN}+\theta\dfrac{\partial s^M_*}{\partial\theta_{,L}}\theta_{,LM}+ \\
+\theta\dfrac{\partial s^M_*}{\partial\theta_{,LN}}\theta_{,LNM}\geq 0\,, \qquad\qquad \left(\theta_{,M}=\dfrac{\partial\theta}{\partial X_M}\dots\right).
\end{cases}
$$

Poichè ogni processo termocinetico è soluzione delle (1), purchè si scelgano opportunamente le sorgenti a secondo membro, la (5) deve risultare verificata per ogni scelta delle derivate $\underline{\dot{F}}$, $\nabla\underline{\dot{F}}$, $\nabla^2\underline{\dot{F}}$, $\underline{\ddot{F}}$, $\nabla\underline{\ddot{F}}$, $\dot{\theta}$, $\underline{\dddot{F}}$, $\underline{\dot{G}}$, $\nabla^2\dot{\theta}$, $\ddot{\theta}$, $\underline{\ddot{G}}$, $\dddot{\theta}$, $\underline{G}$, $\nabla\underline{F}$, $\nabla^2\underline{F}$, $\nabla^3\underline{F}$, $\nabla\underline{G}$, $\nabla^2\underline{G}$. Con un noto procedimento si ottiene (6):

$$
(6)\quad \begin{cases}
\dfrac{\partial\psi}{\partial\ddot{F}^i_L}=0\,,\ \dfrac{\partial\psi}{\partial\ddot{\theta}}=0\,,\left(\dfrac{\partial s^N_*}{\partial\dot{F}^i_{L,M}}+\dfrac{\partial s^M_*}{\partial\dot{F}^i_{L,N}}+\dfrac{\partial s^L_*}{\partial\dot{F}^i_{N,M}}\right)=\dfrac{3}{\theta}\varrho_*\dfrac{\partial\psi}{\partial F^i_{L,MN}}\,, \\
\dfrac{\partial s^{(M}_*}{\partial\ddot{F}^i_{L)}}=\dfrac{2}{\theta}\varrho_*\dfrac{\partial\psi}{\partial\dot{F}^i_{L,M}}\,,\ \dfrac{\partial s^{(M}_*}{\partial\dot{\theta}_{,L)}}=\dfrac{2}{\theta}\varrho_*\dfrac{\partial\psi}{\partial\theta_{,ML}}\,,\ \dfrac{\partial s^M_*}{\partial\ddot{\theta}}=\dfrac{\varrho_*}{\theta}\dfrac{\partial\psi}{\partial\dot{\theta}_{,M}}\,, \\
\dfrac{\partial s^M_*}{\partial\theta_{,LN}}+\dfrac{\partial s^L_*}{\partial\theta_{,MN}}+\dfrac{\partial s^N_*}{\partial\theta_{,LM}}=0\,,\ \dfrac{\partial s^M_*}{\partial F^i_{L,HK}}+\dfrac{\partial s^L_*}{\partial F^i_{H,KM}}+\dfrac{\partial s^H_*}{\partial F^i_{K,ML}}+ \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad +\dfrac{\partial s^K_*}{\partial F^i_{M,LH}}=0
\end{cases}
$$

$(i=1,\ 2,\ 3)$

---

(6) Cfr. [12].

e la restante parte della (5) si scrive :

$$
(7)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\left(-\varrho_* \frac{\partial\psi}{\partial F^i_L} + T^L_{*i}\right)\dot F^i_L + \left(-\varrho_* \frac{\partial \psi}{\partial F^i_{L,M}} + \theta \frac{\partial s^M_*}{\partial \dot F^i_L}\right)\dot F^i_{L,M}\\
&-\varrho_*\frac{\partial\psi}{\partial\dot F^i_L}\ddot F^i_L - \varrho_*\left(\frac{\partial\psi}{\partial\theta}+\eta\right)\dot\theta + \left(-\varrho_*\frac{\partial\psi}{\partial\theta_{,M}} + \theta\frac{\partial s^M_*}{\partial\dot\theta}\right)\dot\theta_{,M}\\
&-\varrho_*\frac{\partial\psi}{\partial\dot\theta}\ddot\theta + \left(-\frac{h^M_*}{\theta}+\theta\frac{\partial s^M_*}{\partial\theta}\right)\theta_{,M} + \theta\frac{\partial s^M_*}{\partial F^i_L}F^i_{L,M}\\
&+\theta\frac{\partial s^N_*}{\partial F^i_{L,M}}F^i_{L,MN} + \theta\frac{\partial s^M_*}{\partial G_L}\theta_{,ML}\ge 0\,.
\end{aligned}
\right.
$$

Le (6) comportano l'indipendenza di ψ da $\ddot{\underline{F}}$ e $\ddot\theta$. Inoltre la più generale espressione per l'extraflusso $\underline{s}_*$ è [7] :

$$
(8)\quad \left\{
\begin{aligned}
&s^L_* = (1 + V^L\ddot\theta)\,(1 + W^L_{(AB)}\,\theta_{,AB})\,(\Omega^L + \sum_1^3{}_i\, \Omega^L_{i(HKM)}\, F^i_{H,KM}\\
&+\sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^3 \Omega^L_{ij(HKM)(NOP)}\, F^i_{H,KM}\, F^j_{N,OP}\\
&+\sum_{\substack{i,j,h=1\\ i<j<h}}^3 \Omega^L_{ijh(HKM)(NOP)(QRS)}\, F^i_{H,KM}\, F^j_{N,OP}\, F^h_{Q,RS})\,.
\end{aligned}
\right.
$$

Nella (8) i tensori $\underline{\Omega}$, $\underline{W}$, $\underline{V}$, indipendenti da $\ddot\theta$, $\nabla^2\underline{F}$, $\nabla^2\theta$, risultano simmetrici rispetto agli indici in parentesi ed inoltre verificano le identità :

$$
\left\{
\begin{aligned}
&\Omega^i_{L(HKM)} + \Omega^i_{H(KLM)} + \Omega^i_{K(MLH)} + \Omega^i_{M(LHK)} = 0\,,\ (i = 1,2,3)\\
&W^L_{(AB)} + W^A_{(BL)} + W^B_{(LA)} = 0\,.
\end{aligned}
\right.
$$

---

[7] La presenza nella (7) dei termini in Grad $\underline{F}$ e Grad Grad $\underline{F}$ è giustificata dall'effetto Brillouin che prevede, in un fluido, conduzione di calore dovuta ad un gradiente di densità anche in assenza di $\underline{G}$. Tale effetto è riconosciuto anche da C. Truesdell che, in [6], suggerisce alcuni esperimenti che dovrebbero confermarne l'esistenza. Una teoria dei continui che non preveda l'effetto Brillouin è ottenibile dalla teoria qui trattata se si suppone $\underline{s}^*$ identicamente nullo all'equilibrio (dove ora Grad $\underline{F}$ e Grad Grad $\underline{F}$ possono essere non nulli) (cfr. [14]).

Si osservi che in conseguenza della (8), non vale la diseguaglianza di Fourier, analogamente a quanto accade nella teoria cinetica in cui tale diseguaglianza sussiste solo in 1ª approssimazione.

La (7), che può scriversi in forma sintetica

$$\varphi(\underline{F}, \theta, \nabla\underline{F}, \nabla^2\underline{F}, \dot{\underline{F}}, \nabla\dot{\underline{F}}, \dot{\theta}, \underline{G}, \nabla\underline{G}, \dot{\underline{G}}, \ddot{\theta}, \ddot{\underline{F}}) \geq 0\,, \tag{9}$$

implica che φ, nulla per $\nabla\underline{F} = \nabla^2\underline{F} = \dot{\underline{F}} = \nabla\dot{\underline{F}} = \dot{\theta} = \underline{G} = \nabla\underline{G} = \dot{\underline{G}} = \ddot{\theta} = \ddot{\underline{F}} = 0$, ammette un minimo in tale punto; pertanto tutte le derivate parziali prime di φ, valutate in $(\underline{F}, \theta, \underline{o})$ sono nulle, in particolare:

$$\left\{\begin{aligned} &\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\dot{\underline{F}}}\right)_{\underline{o}} = \left(-\,\varrho_*\,\frac{\partial\psi}{\partial\underline{F}} + \underline{T}_*\right)(\underline{F}, \theta, 0, \dots 0) = 0\ ,\ \forall\underline{F}, \theta \\ &\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\underline{G}}\right)_{\underline{o}} = \left(-\,\frac{\underline{h}_*}{\theta} + \theta\,\frac{\partial\underline{s}_*}{\partial\theta}\right)(\underline{F}, \theta, 0, \dots 0) = 0\ ,\ \forall\underline{F}, \theta\,. \end{aligned}\right. \tag{10}$$

Dalle (10) si ricavano le seguenti restrizioni per $\underline{T}_*$ ed $\underline{h}_*$:

$$\left\{\begin{aligned} &\underline{T}_*\,(\underline{F}, \theta, \dots, 0) = \varrho_*\,\frac{\partial\psi}{\partial\underline{F}}\,(\underline{F}, \theta\ 0, \dots, 0)\,, \\ &\underline{h}_*\,(\underline{F}, \theta, \dots, 0) = \theta^2\,\frac{\partial\underline{s}_*}{\partial\theta}\,(\underline{F}, \theta, 0, \dots, 0)\,; \end{aligned}\right. \tag{11}$$

le (11) (diversamente dalle relazioni ottenute da M. Carrassi ed A. Morro in [11]) non comportano l'annullarsi delle derivate:

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial\underline{T}_*}{\partial\nabla\underline{G}}\,(\underline{F}, \theta, 0, \dots, 0)\ ,\quad \frac{\partial\underline{T}_*}{\partial\nabla^2\underline{F}}\,(\underline{F}, \theta, 0, \dots 0)\,; \\ &\frac{\partial\underline{h}_*}{\partial\nabla\underline{F}}\,(\underline{F}, \theta, 0, \dots, 0)\ ,\quad \frac{\partial\underline{h}_*}{\partial\nabla\dot{\underline{F}}}\,(\underline{F}, \theta, 0, \dots, 0)\,. \end{aligned}\right. \tag{12}$$

Pertanto si può prevedere che in uno sviluppo in serie di $\underline{T}$ ed $\underline{h}$, compatibile con le (11), figureranno anche termini assenti negli analoghi sviluppi ottenuti in [11].

3. - Il principio di oggettività per un fluido isotropo.

Alle equazioni costitutive (3) deve ancora imporsi il principio di oggettività, in conseguenza di un cambiamento rigido, arbitrario, di riferimento $\underline{x}' = \underline{Q}\,\underline{x} + \underline{c}$; $\underline{Q} = \underline{Q}^T$. Affinchè le (3) soddisfino tale principio, tenuto conto della (4), deve aversi:

$$\tag{13}\left\{\begin{array}{lll} \psi & = \tilde{\psi} & (\underline{C}, {}_2\underline{A}, {}_3\underline{A}, \theta, \underline{G}, \nabla\underline{G}, \dot{\theta}, \dot{\underline{G}}, \underline{A}_1, {}_2\underline{A}_1 \quad\quad) \\ \eta & = \tilde{\eta} & (\underline{C}, {}_2\underline{A}, {}_3\underline{A}, \theta, \underline{G}, \nabla\underline{G}, \dot{\theta}, \dot{\underline{G}}, \underline{A}_1, {}_2\underline{A}_1, \ddot{\theta}, \underline{A}_2 \quad) \\ \underline{T}_* & = \underline{R}\tilde{\underline{T}}_* & (\quad » \quad\quad » \quad\quad » \quad) \\ \underline{h}_* & = \tilde{\underline{h}}_* & (\quad » \quad\quad » \quad\quad » \quad) \\ \underline{s}_* & = \tilde{\underline{s}}_* & (\quad » \quad\quad » \quad\quad » \quad) \end{array}\right.$$

dove $\underline{C} = \underline{F}\,\underline{F}^T$ è il tensore destro di Cauchy-Green ed ${}_i\underline{A}_j = {}_i\overset{(j)}{\underline{C}}$ sono i tensori di Rivlin-Ericksen.

Infatti, in relazione al cambiamento di riferimento $\underline{x} \to \underline{x}'$, si ha: $\underline{F} \to \underline{Q}\,\underline{F}$, $\dot{\underline{F}} \to (\underline{Q}\,\dot{\underline{F}} + \dot{\underline{Q}}\,\underline{F})$, $\ddot{\underline{F}} \to \frac{d}{dt}(\underline{Q}\,\dot{\underline{F}} + \dot{\underline{Q}}\,\underline{F})$, $\theta \to \theta$, $\dot{\theta} \to \dot{\theta}$, $\ddot{\theta} \to \ddot{\theta}$ e tutti i gradienti materiali restano invariati. Deve essere poi: $\psi' = \psi$, $\eta' = \eta$, $\underline{T}'_* = \underline{Q}\,\underline{T}_*$, $\underline{h}'_* = \underline{h}_*$, $\underline{s}'_* = \underline{s}_*$ e, per l'oggettività:

$$\hat{\zeta}\,(\underline{F}, \nabla\,\underline{F}, \dots, \theta, \underline{G}, \dots) = \hat{\zeta}\,(\underline{Q}\,\underline{F}, \underline{Q}\,\nabla\,\underline{F}, \dots, \theta, \underline{G}, \dots)$$

($\hat{\zeta}$ generica funzione costitutiva). Ricordando che $\underline{F} = \underline{R}\,\underline{U}$ e posto $\underline{Q} = \underline{R}^T$, mediante facili calcoli si ottengono le (13).

Se il sistema S considerato è un fluido isotropo, ricordando che:

$$\underline{T}_* = J\,\underline{T}\,(\underline{F}^{-1})^T\ ,\quad \underline{h}_* = J\,\underline{F}^{-1}\,\underline{h}\ ,\quad \underline{s}_* = J\,\underline{F}^{-1}\,\underline{s}\ ,\quad (J = \det\,\underline{F})$$

si ha, in coordinate euleriane:

$$(14)\quad \left\{\begin{array}{l} \psi = \bar{\psi}\,(\varrho,\ \mathrm{grad}\ \varrho,\ \mathrm{gradgrad}\ \varrho,\ \theta,\ \underline{g},\ \mathrm{grad}\ \underline{g},\ \dot{\theta},\ \mathrm{grad}\ \dot{\theta},\ \underline{A}_1,\ \mathrm{grad}\ \underline{A}_1) \\ \eta = \bar{\eta}(\varrho,\ \mathrm{grad}\ \varrho,\ \mathrm{gradgrad}\ \varrho,\ \theta,\ \underline{g},\ \mathrm{grad}\ \underline{g},\ \dot{\theta},\ \mathrm{grad}\ \dot{\theta},\ \underline{A}_1,\ \mathrm{grad}\ \underline{A}_1,\ \ddot{\theta},\ \underline{A}_2) \\ \underline{T} = \bar{\underline{T}}\,(\quad \text{»} \quad \text{»} \quad \text{»} \quad) \\ \underline{h} = \bar{\underline{h}}\,(\quad \text{»} \quad \text{»} \quad \text{»} \quad) \\ \underline{s} = \bar{\underline{s}}\,(\quad \text{»} \quad \text{»} \quad \text{»} \quad) \end{array}\right.$$

$$(\underline{g} = \mathrm{grad}\ \theta)\ ;$$

infatti la dipendenza delle equazioni costitutive da $\underline{C}$, ${}_2\underline{A}$, ${}_3\underline{A}$, per un fluido isotropo deve intendersi specializzata (8) in una dipendenza da ϱ, grad ϱ, grad grad ϱ. Inoltre, in conseguenza del principio di oggettività, ψ, η, $\underline{T}$, $\underline{h}$, $\underline{s}$ devono risultare funzioni *isotrope* (9) dei loro argomenti; in particolare $\underline{T}$ deve essere funzione pari dei gradienti di ordine dispari e $\underline{h}$ ed $\underline{s}$ funzioni dispari di tali gradienti.

Dalla (8) si ricava immediatamente che, per un fluido isotropo, l'extraflusso $\underline{s}$ è indipendente da $\ddot{\theta}$, grad $\underline{g}$, grad grad ϱ, cioè:

$$\underline{s} = \underline{s}\,(\varrho\,,\ \mathrm{grad}\ \varrho\,,\ \theta\,,\ \underline{g}\,,\ \dot{\theta}\,,\ \mathrm{grad}\ \dot{\theta},\ \underline{A}_1,\ \mathrm{grad}\ \underline{A}_1,\ \underline{A}_2).$$

Ulteriori limitazioni su $\underline{T}$ ed $\underline{h}$ verranno dedotte al n. seguente, esaminando uno sviluppo in serie di tali funzioni.

4. Espressioni del tensore degli sforzi e del vettore corrente di calore per un fluido maxwelliano.

Si consideri ora un fluido maxwelliano le cui funzioni costitutive, per definizione, dipendono da μ_0 ed R (coefficiente di viscosità e costante dei gas) da ϱ, θ e da tutti i vettori e tensori figuranti in (14), in modo *analitico*.

Limitandosi allo studio delle funzioni $\underline{T}$ ed $\underline{h}$, se ne consideri uno sviluppo in serie di Taylor, di punto iniziale $(\varrho\,,\ \theta\,,\ 0\,, \ldots,\ 0)$, trascurando i termini che, secondo l'analisi delle dimensioni fatta in [9],

---

(8) Cfr. [9].

(9) Ad es. $\underline{Q}\cdot\tilde{\underline{h}}\ (\varrho,\ \mathrm{grad}\ \varrho,\ \mathrm{grad\ grad}\ \varrho,\ldots) = h\,(\varrho,\ \underline{Q}\cdot\mathrm{grad}\ \varrho,\ \underline{Q}\cdot\mathrm{grad\ grad}\ \varrho\cdot\underline{Q}^T,\ldots)$.

risultano di ordine superiore al 2^0 in μ_0 (10). Tenuto conto dell'isotropia, si ottengono le seguenti espressioni:

$$
(15)\quad \left\{
\begin{aligned}
\underline{T} = & - p(\varrho, \theta)\,\underline{I} + \mu_0 (a_1 \underline{A}_1 + a_2\, tr\, \underline{A}_1 \underline{I}) + \frac{\mu_0}{\theta} a_3 \dot{\theta}\, \underline{I} \\
& + \frac{\mu_0^2}{\varrho^2} (\beta_1 \operatorname{grad}\operatorname{grad}\varrho + \beta_2 \operatorname{tr}\operatorname{grad}\operatorname{grad}\varrho\, \underline{I}) + \frac{\mu_0^2}{\varrho\theta} (\beta_3 \operatorname{grad} \underline{g} + \\
& \qquad + \beta_4 \operatorname{tr}\operatorname{grad} \underline{g}\, \underline{I}) \\
& + \frac{\mu_0^2}{\varrho R \theta^2} (\beta_5 \ddot{\theta}\, \underline{I} + \beta_6 \dot{\theta}\, \underline{A}_1 + \beta_7 \dot{\theta}\, (\operatorname{tr} \underline{A}_1)\, \underline{I}) + \frac{\mu_0^2}{R\varrho\theta} (\beta_8 \underline{A}_2 + \\
& \qquad + \beta_9 (\operatorname{tr} \underline{A}_2)\, \underline{I}) \\
& + \frac{\mu_0^2}{\varrho^3} (\beta_{10} \operatorname{grad}\varrho \otimes \operatorname{grad}\varrho + \beta_{11} \operatorname{grad}\varrho \cdot \operatorname{grad}\varrho\, \underline{I}) + \\
& \qquad + \frac{\mu_0^2}{\varrho\theta^2} (\beta_{12}\, \underline{g} \otimes \underline{g} + \beta_{13}\, \underline{g} \cdot \underline{g}\, \underline{I} \\
& + \frac{\mu_0^2}{R\varrho\theta^3} \beta_{14} \dot{\theta}^2 \underline{I} + \frac{\mu_0^2}{\varrho R \theta} (\beta_{15} \underline{A}_1 \cdot \underline{A}_1 + \beta_{16} \operatorname{tr} (\underline{A}_1 \cdot \underline{A}_1) + \\
& \qquad + \beta_{17} (\operatorname{tr} \underline{A}_1)^2 \\
& + \beta_{18} (\operatorname{tr} \underline{A}_1)\, \underline{A}_1) + \frac{\mu_0^2}{\varrho^2\theta} [\beta_{19} (\operatorname{grad}\varrho \otimes \underline{g} + \underline{g} \otimes \operatorname{grad}\varrho) + \\
& \qquad + \beta_{20} \operatorname{grad}\varrho \cdot \underline{g}\, \underline{I}
\end{aligned}
\right.
$$

(con $\operatorname{tr} \underline{A}_1 = A_1^{11} + A_2^{22} + A_3^{33}$);

$$
(16)\quad \left\{
\begin{aligned}
\underline{h} = & \mu_0 \frac{R\theta}{a} \gamma_1 \operatorname{grad}\varrho + \mu_0 R \gamma_2 \underline{g} + \frac{\mu_0^2}{\varrho\theta} \delta_1 \operatorname{grad} \dot{\theta} + \\
& \qquad + \frac{\mu_0^2}{\varrho} (\delta_2 \underline{a}_1 + \delta_3 \underline{a}_2 + \delta_4 \underline{a}) \\
& + \frac{\mu_0^2}{\varrho^2} (\delta_5 \underline{A}_1 \operatorname{grad}\varrho + \delta_6 (\operatorname{tr} \underline{A}_1) \operatorname{grad}\varrho) + \frac{\mu_0^2}{\varrho\theta} (\delta_7 \underline{A}_1 \cdot \underline{g} + \delta_8 (\operatorname{tr} \underline{A}_1)\, \underline{g}) \\
& + \frac{\mu_0^2}{\varrho\theta} \delta_9 \dot{\theta}\, \underline{g} + \frac{\mu_0^2}{\varrho^2\theta} \delta_{10} \dot{\theta} \operatorname{grad}\varrho\,,
\end{aligned}
\right.
$$

dove: $a_{1k} = {}_2A^m_{1km}$, $a_{2k} = {}_2A^m_{1\ km}$, $a_{3k} = {}_2A^m_{1\ mk}$.

(10) Si esamina, cioè, il comportamento asintotico di $\underline{T}$ ed $\underline{h}$ quando $\mu_0 \to 0$ (cfr. [7]).

Nelle espressioni ottenute i coefficienti $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \dots, \beta_{20}, \gamma_1, \gamma_2, \delta_1, \dots, \delta_{10}$ sono collegati ad alcune delle derivate parziali 1^0 e 2^0 di $\underline{T}$ ed $\underline{h}$, rispetto alle variabili grad ϱ, $\underline{g}$, grad grad ϱ, grad $\underline{g}$, $\underline{A}_1$, grad $\underline{A}_1$, $\underline{A}_2$, $\dot{\theta}$, grad $\dot{\theta}$, $\ddot{\theta}$, valutate nel punto $(\varrho, \theta, 0, \dots, 0)$ e rese adimensionali (cfr. anche [11]).

Le (15) e (16) mostrano che le espressioni ottenute da Truesdell in [9], per $\underline{T}$ ed $\underline{h}$, sono compatibili con la termodinamica.

Si noti, infine, che l'annullarsi del termine h^0, nella (16), è dovuto essenzialmente al principio di oggettività.

5. - Confronto con i risultati esposti in [9] e [11]. Caso di un gas rarefatto.

Si sostituiscano le (3) con le equazioni costitutive proposte da M. Carrassi ed A. Morro in [11], cioè con equazioni del tipo:

$$(17)\qquad \begin{cases} \psi = \tilde{\psi}\,(\underline{F}, \nabla\underline{F}, \nabla^2\underline{F}, \dot{\underline{F}}, \nabla\dot{\underline{F}}, \theta, \underline{G}, \nabla\underline{G}) \\ \eta = \tilde{\eta}\,(\quad » \quad » \quad » \quad) \\ \underline{T}_* = \tilde{\underline{T}}_*\,(\quad » \quad » \quad » \quad) \\ \underline{h}_* = \tilde{\underline{h}}_*\,(\quad » \quad » \quad » \quad). \end{cases}$$

Se nella (4) è ancora $\underline{s}_* \neq \underline{0}$, ma si suppone

$$\underline{s}_* = \tilde{\underline{s}}_*\,(\underline{F}, \nabla\underline{F}, \nabla^2\underline{F}, \dot{\underline{F}}, \nabla\dot{\underline{F}}, \theta, \underline{G}, \nabla\underline{G}),$$

procedendo come al n. 2 si ricava:

$$\psi = \tilde{\psi}\,(\underline{F}, \theta, \nabla\underline{F}, \nabla^2\underline{F}),$$

$$\eta = \tilde{\eta}\,(\ » \qquad » \quad) = -\frac{\partial\psi}{\partial\theta}$$

e la (7) è sostituita da:

$$(18)\begin{cases}\left(-\varrho_* \dfrac{\partial\psi}{\partial F^i_L} + T^L_{*i}\right)\dot F^i_L + \left(-\varrho_* \dfrac{\partial\psi}{\partial F^i_{L,M}} + \dfrac{\partial s^M_*}{\partial \dot F^i_L}\right)\dot F^i_{L,M} + \\ \qquad\qquad\qquad\qquad + \left(-\dfrac{h^M_*}{\theta} + \theta\dfrac{\partial s^M_*}{\partial\theta}\right) G_M \\ + \theta \dfrac{\partial s^M_*}{\partial F^i_L} F^i_{L,M} + \theta \dfrac{\partial s^M_*}{\partial F^i_{L,H}} F^i_{L,MH} + \theta \dfrac{\partial s^M_*}{\partial G_L} G_{L,M} \geq 0\,;\end{cases}$$

l'extraflusso $\underline{s}_*$ risulta poi lineare in ogni componente di $\nabla^2 F$ e $\nabla^2\theta$.

Procedendo inoltre come ai n. 3 e 4, è immediato verificare che la (18) consente di ritrovare in uno sviluppo in serie di $\underline{T}$ ed $\underline{h}$ per un fluido maxwelliano tutti i termini previsti dalla teoria di Truesdell, ristretta al caso in cui le equazioni costitutive non dipendono da $\dot\theta$, $\dot G$, $\ddot\theta$, $\ddot F$. Pertanto, in tali ipotesi le equazioni costitutive proposte in [11] sono adatte allo studio dei fluidi maxwelliani *purchè* si scriva il 2° principio nella forma proposta in [12].

Se, invece, $\underline{s}_* = \underline{o}$ nella (4) e si assumono le equazioni costitutive (3), si ha:

$$\psi = \tilde\psi\,(\underline{F}\,,\nabla\underline{F}\,,\theta\,,\underline{G}\,,\dot{\underline{F}}\,,\dot\theta)$$

e la (7) si modifica in:

$$(19)\begin{cases}\left(-\varrho_* \dfrac{\partial\psi}{\partial F^i_L} + T^L_{*i}\right)\dot F^i_L - \varrho_* \dfrac{\partial\psi}{\partial F^i_{L,M}} \dot F^i_{L,M} - \varrho_* \dfrac{\partial\psi}{\partial \dot F^i_L} \ddot F^i_L - \\ -\varrho_*\left(\dfrac{\partial\psi}{\partial\theta} + \eta\right)\dot\theta + \dfrac{\partial\psi}{\partial G_L}\dot G_L + \dfrac{\partial\psi}{\partial\dot\theta}\ddot\theta - (h^M_* G_M)\dfrac{1}{\theta} \geq 0.\end{cases}$$

La (19) comporta che, nel caso di un fluido maxwelliano, il tensore $\underline{T}$ non contiene, al 2° ordine in μ_0 i termini in gradgrad ϱ, gradgrad θ ed $\underline{h}$ non contiene, al 1° ordine in μ_0, il termine in grad ϱ.

È evidente che, se $\underline{s}_* = \underline{o}$ e le equazioni costitutive sono indipendenti da $\dot\theta$, $\ddot\theta$, $\dot G$, $\ddot F$, si ottiene la teoria proposta in [11].

Si elimini ora la dipendenza da $\dot{\underline{F}}$, $\nabla \dot{\underline{F}}$, $\ddot{\underline{F}}$ nelle (3) (il che equivale a considerare un gas rarefatto), la diseguaglianza (4) comporta allora :

$$(20)\left\{\begin{array}{ll} \psi &= \tilde{\psi}(\underline{F}, \theta, \underline{G}, \nabla\underline{G}, \dot{\theta}, \dot{\underline{G}}) \\ \underline{T}_* &= \tilde{\underline{T}}_* (\quad » \quad » \quad » \quad » \quad) \,, \quad T^L_{*i} = \varrho_* \dfrac{\varrho\psi}{\varrho F^i_L} \\ \eta &= \tilde{\eta}(\underline{F}, \theta, \nabla\underline{F}, \underline{G}, \nabla^2\underline{F}, \nabla^2\theta, \dot{\theta}, \dot{\underline{G}}, \ddot{\theta}) \end{array}\right.$$

e :

$$(21)\left\{\begin{array}{l} -\varrho_*\left(\dfrac{\partial\psi}{\partial\theta} + \eta\right)\dot{\theta} + \left(-\varrho_*\dfrac{\partial\psi}{\partial G_L} + \theta\dfrac{\partial s^L_*}{\partial\dot{\theta}}\right)\dot{G}_L + \dfrac{\partial\psi}{\partial\dot{\theta}}\ddot{\theta} \\ + \left(-\dfrac{h^L_*}{\theta} + \theta\dfrac{\partial s^L_*}{\partial\theta}\right)G_L + \theta\dfrac{\partial s^M_*}{\partial F^i_L}F^i_{L,M} + \theta\dfrac{\partial s^M_*}{\partial F^i_{L,H}}F^i_{L,MH} \\ + \theta\dfrac{\partial s^M_*}{\partial G_L}\theta_{,LM} \geq 0 \end{array}\right.$$

inoltre $\underline{s}_*$ è lineare in $\ddot{\theta}$ ed in ogni componente di $\nabla^2\theta$ e $\nabla^2\underline{F}$.

Dalla $(20)_2$ appare che, in un gas rarefatto, $\underline{T}$ continua a dipendere da (11) grad grad θ, come è naturale, ma risulta indipendente da grad grad ϱ, grad ϱ e $\ddot{\theta}$; la (21), invece, non impedisce di ritrovare, per $\underline{h}$, un'espressione analoga a (16).

Quanto detto per $\underline{T}$ sussiste, però, soltanto se il comportamento del gas è descritto mediante equazioni costitutive contenenti le derivate temporali del campo di temperatura $\dot{\theta}$, $\ddot{\theta}$, $\dot{\underline{G}}$.

BIBLIOGRAFIA

[1] J. C. Maxwell, *On stresses in rarefied gases,* Phil. Trans. Rov. Soc. London (1876) p. 170.
[2] Kundt-Warburg, *Pogg. Ann. clv.* (1875) p. 337.
[3] Helmholtz-Piotrowski, *Wiener Sitzb. XL* (1860) p. 607.
[4] O. Reynolds, *On certain dimensional properties of matter in the gaseous state,* Phil. Trans. Roy. Soc. London (1879) sect. VI-VII.

(11) Nella teoria proposta in [11], anche tenendo conto dei termini di ordine superiore al 2° in μ_0, $\underline{T}$ dipende dal gradiente secondo della temperatura solo in presenza di viscosità.

[5] C. Truesdell, *A new definition of a fluid*, U. S. Naval Ord. Lab. Mem. 9487 (125), (1948).
[6] C. Truesdell, *A new definition of a fluid II - The maxwellian fluid*, U. S. Naval Res. Lab. Rep. No P 355 (1949), (96, 119, 125).
[7] C. Truesdell, *A new definition of a fluid - The maxwellian fluid*, Journal de Math. Pures Appl., 30 (1951) p. 111-158.
[8] C. Truesdell, *The mechanical foundations of elasticity and fluid dynamics*, J. Rat. Mech. An., 1, p. 125-300 (1952).
[9] C. Truesdell - W. Noll, *The non linear field theories of mechanics - Encyclopedia of Physics*, Springer-Verlag-Berlin (1965), vol. III/3
[10] C. Truesdell, *Rational Thermodynamics*, Mc. Hill (1969).
[11] M. Carrassi - A. Morro, *The thermodynamic theory of the maxwellian fluid*, Boll. U M I, 9 (1974) p. 297-335.
[12] I. Müller, *On the entropy inequality*, Arch. Rat. Mech. An. 26 (1967) p. 118.
[13] I. Müller, *A thermodynamic theory of mixtures of fluids*, Arch. Rat. Mech. An. 28 (1968), p. 1.
[14] M. Brillouin, *Théorie moleculaire des gaz - Diffusion du mouvement et de l'energie* - Ann. de Chimie (7) t. 20 p. 440-485 (1900)
[15] A. Romano, *Influenza di un extraflusso di energia sulla termodinamica di un dielettrico elastico dispersivo*, Rend. Ac. Sci. Fis. e Mat., XLI (1974).
[16] A. Romano, *On deformable and magnetizable continua*, Ricerche di Matematica XXIII, 2 (1974) p. 255-272.

Manoscritto pervenuto in redazione il 12 ottobre 1976.