

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

GIOVANNA IDONE

Sul problema di Cauchy-Dirichlet per una classe di operatori parabolici a coefficienti discontinui

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 57 (1977), p. 285-297

[<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1977__57__285_0>](http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1977__57__285_0)

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1977, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Sul problema di Cauchy-Dirichlet per una classe di operatori parabolici a coefficienti discontinui.

GIOVANNA IDONE (*)

Sia Q il cilindro $\Omega \times]0, T[$ ($0 < T < \infty$) con Ω insieme aperto, convesso, limitato di R^n , $n \geq 2$, di classe $A^{(2,\lambda)}$ ⁽¹⁾.

Detto $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ il punto generico di R^n , consideriamo il problema di CAUCHY-DIRICHLET:

$$(0.1) \quad \sum_{i,j}^n a_{ij}(x, t) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial u}{\partial t} = f(x, t) \quad \text{in } Q,$$

$$u(x, 0) = 0 \quad \text{in } \Omega,$$

$$(0.2) \quad u(x, t) = 0 \quad \text{su } \partial\Omega \times]0, T[.$$

In questa Nota, supposto $f(x, t) \in L^2(Q)$, dimostriamo un teorema di esistenza ed unicità per la soluzione di classe $W_0^{2,1}(Q)$ (per la definizione di $W_0^{2,1}(Q)$ e della relativa norma cfr [1] pp. 154-155) di tale problema nelle seguenti ipotesi:

(*) Indirizzo dell'A.: Istituto di Matematica via C. Battisti 98100 Messina.

Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività dell'Istituto Matematico dell'Università di Messina.

⁽¹⁾ Vedi [2] pag. 3.

i) i coefficienti a_{ij} ($a_{ij} = a_{ji}$ $i, j = 1, 2, \dots, n$) sono misurabili e limitati in Q ed esiste un $\nu > 0$ tale che :

$$\sum_1^n a_{ij} \lambda_i \lambda_j \geq \nu |\lambda|^2 \quad \forall \lambda \in R^n \text{ e q.o. in } Q;$$

ii) denotata con $x_i = \pi_i(x)$ la proiezione $R^n \rightarrow R$ ⁽²⁾, esistono n funzioni $a_1(\xi), a_2(\xi), \dots, a_n(\xi)$ misurabili e limitate rispettivamente in $\pi_1(\Omega), \pi_2(\Omega), \dots, \pi_n(\Omega)$, strettamente positive

$$0 < m_0 \leq a_i(\xi) \leq m_1 \quad i = 1, 2, \dots, n \quad m_0, m_1 \in R^+$$

ed una costante $K \in]0, \overline{K}[$ tali che :

$$(0.3) \quad \frac{\left(\sum_1^n a_i(x_i) a_{ii}(x, t) \right)^2}{\sum_1^n a_{ij}^2(x, t)} \geq \sum_1^n a_i^2(x_i) - K^2 \quad \text{q.o. in } Q$$

$$\text{dove} \quad \overline{K} = \frac{1}{2} \left\{ \left(M + \frac{m_0^{n+1}}{m_1^{n-1}} \frac{A}{B} \right) - \sqrt{\left(M + \frac{m_0^{n+1}}{m_1^{n-1}} \frac{A}{B} \right)^2 - 4 \frac{m_0^{n+1}}{m_1^{n-1}} \frac{A_m}{B}} \right\}^{\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

$$M = \sup_{\Omega} \sum_1^n a_i^2(x_i), \quad m = \inf_{\Omega} \sum_1^n a_i^2(x_i), \quad B = \sup_Q \sum_1^n a_i(x_i) a_{ii}(x, t),$$

$$A = \inf_Q \sum_1^n a_i(x_i) a_{ii}(x, t) \quad (2)$$

ed inoltre l'espressione :

$$(0.4) \quad \frac{\sum_1^n a_i^2(x_i) - K^2}{\sum_1^n a_i(x_i) a_{ii}(x, t)}$$

è funzione della sola t .

⁽²⁾ $\pi_i: x \rightarrow x_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$). Nel seguito scriveremo brevemente $a_i(x_i)$ in luogo di $a_i(\pi_i(x))$ e col simbolo $\sup$ ($\inf$) denoteremo lo pseudo-estremo superiore (inferiore).

Queste ipotesi non implicano la continuità dei coefficienti ed esprimono una « vicinanza » dell'operatore $\sum_{i,j}^n a_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial}{\partial t}$ all'operatore $\sum_i^n a_i(x_i) \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} - h(t) \frac{\partial}{\partial t}$. Tale « vicinanza » è tanto maggiore quanto minore è K .

L'ipotesi (0.3) è più generale delle ipotesi $b)$ e $c)$ di S. CAMPANATO (cfr. osservazione I)), mentre l'ipotesi che la (0.4) sia funzione della sola t è una condizione in più.

Per acquisire il teorema di esistenza ed unicità prendiamo le mosse dal lavoro di C. MIRANDA [3] sulle equazioni ellittiche (che, tra l'altro, estendiamo alle equazioni paraboliche) ed utilizziamo successivamente una tecnica analoga a quella di [1].

1. - Osservazioni.

I) Sia $h(t)$ una funzione misurabile e limitata in $]0, T[$ tale che $0 < A = \inf_{]0, T[} h(t) < B = \sup_{]0, T[} h(t)$ e diciamo K un numero tale che

$$\frac{2A}{A+B} < K < \sqrt{\frac{A}{B}}.$$

Allora ogni operatore $\sum_{i,j}^n a_{ij}(x,t) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial}{\partial t}$ che con i suoi coefficienti verifica l'ipotesi i) ed è tale che

$$\sum_i^n a_{ii}(x,t) = h(t) \text{ e } \frac{\left(\sum_i^n a_{ii}\right)^2}{\sum_{i,j}^n a_{ij}^2} \geq n - K^2 \quad q.o. \text{ in } Q,$$

soddisfa pure le ipotesi ii) per $a_i(x_i) = 1$ ($i = 1, 2, \dots, n$), ma non verifica la seconda delle (2.2) di [1].

II) Ci sarà utile osservare per il seguito che, se $K \in]O, \bar{K}[$ risultano verificate le seguenti disuguaglianze:

$$(1.1) \quad \sqrt{\frac{M - K^2}{m - K^2}} K < \frac{m_0^{\frac{n+1}{2}}}{m_1^{\frac{n-1}{2}}} \sqrt{\frac{A}{B}}, \quad O < K < \sqrt{m}$$

e viceversa dalle (I.I) segue $K \in]O, \bar{K}[$.

Inoltre risulta pure:

$$(1.2) \quad \frac{1}{M - K^2} < \frac{m_1^{\frac{n-2}{2}}}{m_0^{\frac{n+2}{2}}}$$

III) Siano $a_1(\xi), a_2(\xi), \dots, a_n(\xi)$ n funzioni misurabili e limitate rispettivamente in $\pi_1(\Omega), \pi_2(\Omega), \dots, \pi_n(\Omega)$ e tali che

$$O < m_0 \leq a_i(\xi) \leq m_1 \quad m_0, m_1 \in R^+$$

e sia $h(t)$ una funzione misurabile e limitata in $]O, T[$ tale che

$$O < A^* = \inf_{]O, T[} h(t) < \sup_{]O, T[} h(t) = B^*$$

Sia K un numero dell'intervallo $]O, \sqrt{m}[$ tale che:

$$(1.3) \quad \frac{M - K^2}{m - K^2} K < \frac{m_0^{\frac{n+1}{2}}}{m_1^{\frac{n-1}{2}}} \sqrt{\frac{A^*}{B^*}}$$

avendo al solito denotato con M ed m il $\sup_{\Omega} \sum_1^n a_i^2(x_i)$ e l'inf $\sum_1^n a_i^2(x_i)$ ⁽³⁾.

⁽³⁾ Per un siffatto valore di K risulta $K < m_0$.

Allora ogni operatore $\sum_{i,j}^n a_{ij}(x, t) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial}{\partial t}$ i cui coefficienti soddisfano l'ipotesi i) e verificano quasi ovunque in Q le condizioni :

$$(1.4) \quad a_{ii}(x, t) = \left(a_i(x_i) - \frac{K^2}{n a_i(x_i)} \right) h(t) \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$(1.5) \quad |a_{ij}(x, t)| \leq \frac{K h(t)}{\sqrt{n^2 - n}} \left(1 - \frac{K^2}{n^2} \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i^2(x_i)} \right)^{1/2} \quad i \neq j$$

soddisfa le ipotesi ii) pur di prendere come funzioni $a_i(\xi)$ le stesse funzioni che figurano nelle $a_{ii}^{(4)}$.

IV) Avendosi :

$$\left(\sum_1^n a_i a_{ii} \right)^2 \leq \left(\sum_1^n a_i^2 \right) \left(\sum_1^n a_{ii}^2 \right) \leq \left(\sum_1^n a_i^2 \right) \left(\sum_1^n a_{ij}^2 \right)$$

risulta :

$$\sum_1^n a_i^2 \geq \frac{\left(\sum_1^n a_i a_{ii} \right)^2}{\sum_1^n a_{ij}^2}.$$

(4) Risultando $\sum_1^n a_i a_{ii} = \left(\sum_1^n a_i^2 - K^2 \right) h(t)$ si ha :

$$A = \inf_Q \sum_1^n a_i(x_i) a_{ii}(x, t) \geq (m - K^2) A^*$$

$$B = \sup_Q \sum_1^n a_i(x_i) a_{ii}(x, t) \leq (M - K^2) B^*$$

Allora dalla (1.3) segue :

$$\sqrt{\frac{M - K^2}{m - K^2}} K < \frac{m_0^{\frac{n+1}{2}}}{m_1^{\frac{n-1}{2}}} \frac{\sqrt{A^*(m - K^2)}}{\sqrt{B^*(M - K^2)}} \leq \frac{m_0^{\frac{n+1}{2}}}{m_1^{\frac{n-1}{2}}} \frac{A}{B}.$$

Posto poi :

$$\beta(x, t) = \frac{\left(\sum_1^n a_i(x_i) a_{it}(x, t) \right)^2}{\sum_1^n a_{ij}^2(x, t)},$$

$$\gamma(x, t) = \sum_1^n a_i(x_i) a_{it}(x, t), \quad \alpha(x, t) = \frac{\beta(x, t)}{\gamma(x, t)}$$

per le ipotesi i), ii) le funzioni $\alpha, \beta, \gamma \in L^\infty(Q)$ e sono strettamente positive.

2. - Un risultato preliminare.

Dimostriamo il seguente

TEOREMA 2.1. *Siano date n funzioni $a_1(\xi), a_2(\xi), \dots, a_n(\xi)$ definite quasi ovunque rispettivamente in $\pi_1(\Omega), \pi_2(\Omega), \dots, \pi_n(\Omega)$, ivi misurabili e limitate e tali che :*

$$0 < m_0 \leq a_i(\xi) \leq m_1 \quad \text{q.o. in } \pi_i(\Omega) \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad m_0, m_1 \in \mathbb{R}^+$$

e sia data pure una funzione $h(t)$ definita quasi ovunque nell'intervallo $]0, T[$, ivi misurabile e limitata e tale che :

$$0 < \bar{A} \leq h(t) \leq \bar{B} \quad \text{q.o. in } [0, T] \quad \bar{A}, \bar{B} \in \mathbb{R}^+.$$

Allora per ogni $f \in L^2(Q)$ esiste una ed una sola soluzione $u \in W_0^{2,1}(Q)$ dell'equazione :

$$(2.1) \quad \sum_1^n a_i(x_i) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} - h(t) \frac{\partial u}{\partial t} = f(x, t)$$

e si ha la maggiorazione

$$(2.2) \quad \|u\|_{\left(\sqrt{\frac{\bar{A}\bar{B}}{m_0 m_1}}\right)} \leq \frac{m_1^{\frac{n-1}{2}}}{m_0^{\frac{n+1}{2}}} \sqrt{\frac{\bar{B}}{\bar{A}}} \|f\|_{L^2(a)}$$

Come è noto basta acquisire la maggiorazione (2.2) per eventuali soluzioni di classe $W_0^{2,1}(Q)$ dell'equazione (2.1) per garantire l'esistenza e l'unicità di tale soluzione, in quanto sarà possibile approssimare la (2.1) con una successione a coefficienti « regolari ».

Cominciamo a dimostrare che la (2.2) sussiste per ogni eventuale soluzione della (2.1) « regolare » in Q nulla per $t = 0$ e su $\partial \Omega_\times] 0, T[$.

Dalla (2.1) elevando al quadrato ambo i membri e dividendo per $\mathcal{A}(x) = \prod_{i=1}^n a_i(x_i)$ e per $h(t)$ si ha ⁽⁵⁾ :

$$(2.3) \quad \sum_{i,j}^n \frac{a_i a_j}{\mathcal{A} h} p_{ij}^2 + \frac{h}{\mathcal{A}} u_i^2 = \frac{f^2}{\mathcal{A} h} + 2u_i \sum_{i,j}^n \frac{a_i}{\mathcal{A}} p_{ij} + \\ + \sum_{i,j}^n \frac{a_i a_j}{\mathcal{A} h} (p_{ij}^2 - p_{ii} p_{jj})$$

Ora si ha (cfr. [3] pag. 211) :

$$(2.4) \quad \int_0^T \frac{dt}{h} \int_{\Omega} \sum_{i,j}^n \frac{a_i a_j}{\mathcal{A}} (p_{ij}^2 - p_{ii} p_{jj}) dx = \\ = \int_0^T \frac{dt}{h} \int_{\Omega} \sum_{i,j}^n \frac{a_i a_j}{\mathcal{A}} (X_i p_j p_{ij} - X_j p_j p_{ii}) d\sigma = \\ = - \int_0^T \frac{dt}{h} \int_{\partial \Omega} \left(\sum_{i,j}^n p_i X_i \right)^2 \Phi \mathcal{A}^{-1} d\sigma$$

dove le X_i sono i coseni direttori della normale esterna a $\partial \Omega$ e Φ è una funzione definita su $\partial \Omega$ che dipende solo da m_0, m_1 e $\partial \Omega$. Essendo Ω convesso, risulta $\Phi \geq 0$ e quindi l'ultimo membro della (2.4) risulta non positivo.

(⁵) Per comodità di scrittura usiamo le notazioni :

$$p_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}, \quad p_{ij} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}, \quad u_i = \frac{\partial u}{\partial t}.$$

Resta così provato che :

$$\int_Q \sum_{i,j}^n \frac{a_i a_j}{\mathcal{A} h} (p_{ij}^2 - P_{ii} P_{jj}) dx dt \leq 0.$$

Si ha pure :

$$\begin{aligned} \int_0^T dt \int_{\Omega} \sum_{i,j}^n \frac{a_i}{\mathcal{A}} p_{ii} u_i dx &= \int_0^T dt \int_{\partial\Omega} \sum_{i,j}^n \frac{a_i}{\mathcal{A}} p_i X_i u_i d\sigma - \\ &- \int_0^T dt \int_{\Omega} \sum_{i,j}^n \frac{a_i}{\mathcal{A}} p_i \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial t} dx = - \frac{1}{2} \int_{\Omega} dx \int_0^T \frac{\partial}{\partial t} \left(\sum_{i,j}^n \frac{a_i}{\mathcal{A}} p_i^2 \right) dt = \\ &= - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sum_{i,j}^n \frac{a_i}{\mathcal{A}} p_i^2(x, T) dx \leq 0. \end{aligned}$$

Allora si ricava da (2.3) :

$$\int_Q \sum_{i,j}^n \frac{a_i a_j}{\mathcal{A} h} p_{ij}^2 dx dt + \int_Q \frac{h}{\mathcal{A}} u_i^2 dx dt \leq \int_Q \frac{f^2}{\mathcal{A} h} dx dt$$

e quindi :

$$(2.5) \quad \frac{m_0}{m_1^{n-1} \bar{B}} \int_Q \sum_{i,j}^n p_{ij}^2 dx dt + \frac{\bar{A}}{m_1^n} \int_Q u_i^2 dx dt \leq \frac{1}{m_0^n \bar{A}} \int_Q f^2 dx dt.$$

Da (2.5) segue la (2.2). È poi ovvio che la validità della (2.2) si estende subito al caso $u \in W_0^{2,1}(Q)$ con un procedimento di approssimazione.

3. - Teorema di esistenza e di unicità.

Premettiamo il seguente lemma che estende il lemma (2.1) di [1].

LEMMA. 3.1. *Se valgono le ipotesi i) e ii) risulta :*

$$(3.1) \quad \sup_Q \left\{ \frac{\sum_i^n a_i^2 - \beta}{m_0 m_1} + \frac{(K^2 - (\sum_i^n a_i^2 - \beta))^2}{(M - K^2)(m - K^2)} \frac{B}{A} \right\}^{1/2} \leq \frac{K}{\sqrt{m_0 m_1}}.$$

Per le ipotesi fatte si ha :

$$0 \leq \sum_1^n a_i^2(x_i) - \beta(x, t) \leq K^2 \quad \text{q. o. in } Q.$$

Allora, posto $\eta = \sum_1^n a_i^2 - \beta$, $F(\eta) = \frac{\eta}{m_0 m_1} + \frac{(K^2 - \eta)^2}{(M - K^2)(m - K^2)} \frac{B}{A}$, $F(\eta)$ è una funzione convessa di η e quindi :

$$(3.2) \quad \sup_Q \sqrt{F(\eta)} \leq \max \left\{ \sqrt{F(0)}, \sqrt{F(K^2)} \right\} = \\ = \max \left\{ \frac{K^2}{\sqrt{M - K^2} \sqrt{m - K^2}} \sqrt{\frac{A}{B}}, \frac{K}{\sqrt{m_0 m_1}} \right\}.$$

Moltiplicando ora membro a membro la prima delle (1.1) con la (1.2) ed entrambi i membri della disuguaglianza ottenuta per $K \sqrt{\frac{B}{A}}$, si ha :

$$\frac{K^2}{\sqrt{M - K^2} \sqrt{m - K^2}} \sqrt{\frac{B}{A}} \leq \frac{K}{\sqrt{m_0 m_1}}$$

da cui segue

$$(3.3) \quad \max \left\{ \frac{K^2}{\sqrt{M - K^2} \sqrt{m - K^2}} \sqrt{\frac{B}{A}}, \frac{K}{\sqrt{m_0 m_1}} \right\} = \frac{K^2}{\sqrt{m_0 m_1}}.$$

La (3.1) è ovvia conseguenza delle (3.2) e (3.3).

Siamo ora in grado di dimostrare il

TEOREMA 3.1. *Se valgono le ipotesi i) e ii), allora per ogni $f \in L^2(Q)$ il problema di CAUCHY-DIRICHLET*

$$(3.4) \quad \begin{cases} \sum_1^n a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial u}{\partial t} = f \\ u \in W_{0^1}^{2,1}(Q) \end{cases}$$

ammette una ed una sola soluzione u e si ha la maggiorazione :

$$(3.5) \quad \|u\|_{\left(\sqrt{\frac{\bar{A}\bar{B}}{m_0 m_1}}\right)} \leq \\ \leq \frac{m_1^{\frac{n+1}{2}} \sqrt{M - K^2} \sqrt{\bar{B}}}{m_0^{\frac{n+1}{2}} \sqrt{m - K^2} \sqrt{\bar{A}} - m_1^{\frac{n-1}{2}} \sqrt{M - K^2} \sqrt{\bar{B}} K} \frac{1}{\nu} \|f\|_{L^2(Q)}$$

dove $\bar{A} = \frac{m - K^2}{A}$, $\bar{B} = \frac{M - K^2}{B}$.

Se u è soluzione del problema (3.4) allora

$$\sum_1^n a_i(x_i) \frac{\partial_u^2}{\partial x_i^2} - \frac{\sum_1^n a_i^2(x_i) - K^2}{\gamma} \frac{\partial u}{\partial t} = \alpha f(x, t) + \\ + \sum_1^n a_i(x_i) \frac{\partial_u^2}{\partial x_i^2} - \alpha \sum_{ij}^n a_{ij} \frac{\partial_u^2}{\partial x_i \partial x_j} + \left(\alpha - \frac{\sum_1^n a_i^2(x_i) - K^2}{\gamma} \right) \frac{\partial u}{\partial t}$$

e quindi :

$$u = \left(\sum_1^n a_i(x_i) \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} - \frac{\sum_1^n a_i^2(x_i) - K^2}{\gamma} \frac{\partial}{\partial t} \right)^{-1} (\alpha f) + \left(\sum_1^n a_i(x_i) \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} - \right. \\ \left. - \frac{\sum_1^n a_i^2(x_i) - K^2}{\gamma} \frac{\partial}{\partial t} \right)^{-1} \left[\sum_1^n a_i(x_i) \frac{\partial_u^2}{\partial x_i^2} - \alpha \sum_{ij}^n a_{ij} \frac{\partial_u^2}{\partial x_i \partial x_j} + \right. \\ \left. + \frac{\beta - \left(\sum_1^n a_i^2(x_i) - K^2 \right)}{\gamma} \frac{\partial u}{\partial t} \right] = \varphi(u).$$

φ è una applicazione da $W_0^{2,1}(Q)$ in $W_0^{2,1}(Q)$, in quanto

$$\left(\sum_1^n a_i(x_i) \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} - \frac{\sum_1^n a_i^2(x_i) - K^2}{\gamma} \frac{\partial}{\partial t} \right)^{-1}$$

è un isomorfismo di $L^2(Q)$ su $W_0^{2,1}(Q)$ in virtù del teorema 2.1. Dimostrare che il problema (3.4) ammette una soluzione, equivale a dimostrare che $\varphi(u)$ ha un punto unito. A tale scopo dimostriamo che φ è una contrazione qualora si assuma come norma in $W_0^{2,1}(Q)$ la seguente:

$$\|u\| \left(\sqrt{\frac{\bar{A} \bar{B}}{m_0 m_1}} \right) \text{ con } \bar{A} = \frac{m - K^2}{B}, \bar{B} = \frac{M - K^2}{A}.$$

Essendo:

$$0 < \frac{m - K^2}{B} \leq \frac{\sum_1^n Q_i^2(x_i) - K^2}{\gamma} \leq \frac{M - K^2}{A}$$

in base alla (2.2) si ha per ogni $v, w \in W_0^{2,1}(Q)$

$$\begin{aligned} \|\varphi(v) - \varphi(w)\| \left(\sqrt{\frac{\bar{A} \bar{B}}{m_0 m_1}} \right) &\leq \frac{m_1^{\frac{n-1}{2}}}{m_0^{\frac{n+1}{2}}} \sqrt{\frac{M - K^2}{m - K^2}} \sqrt{\frac{\bar{B}}{A}} \left\| \left(\sum_1^n a_i(x_i) \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \alpha \sum_{ij}^n a_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \right) (v - w) + \frac{\beta - \left(\sum_1^n a_i^2 - K^2 \right)}{\gamma} \frac{\partial(v - w)}{\partial t} \right\|_{L^2(Q)} = \\ &= \frac{m_1^{\frac{n-1}{2}}}{m_0^{\frac{n+1}{2}}} \sqrt{\frac{M - K^2}{m - K^2}} \sqrt{\frac{\bar{B}}{A}} \left\{ \int_Q \left[\sum_{ij}^n \frac{(a_i \delta_{ij} - \alpha a_{ij})}{\sqrt{m_0 m_1}} \sqrt{m_0 m_1} \frac{\partial^2(v - w)}{\partial x_i \partial x_j} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{\beta - \left(\sum_1^n a_i^2 - K^2 \right)}{\sqrt{\bar{A} \bar{B}} \gamma} \sqrt{\bar{A} \bar{B}} \frac{\partial(v - w)}{\partial t} \right]^2 dx dt \right\}^{1/2} \leq \\ &\leq \frac{m_1^{\frac{n-1}{2}}}{m_0^{\frac{n+1}{2}}} \sqrt{\frac{M - K^2}{m - K^2}} \sqrt{\frac{\bar{B}}{A}} \left\{ \int_Q \left[\frac{\sum_{ij}^n (a_i \delta_{ij} - \alpha a_{ij})^2}{m_0 m_1} + \right. \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\left(\beta - \left(\sum_1^n a_i^2 - K^2\right)\right)^2}{\bar{A} \bar{B} \gamma^2} \Bigg] \cdot \left[m_0 m_1 \sum_1^n \left(\frac{\partial^2 (v-w)}{\partial x_i \partial x_j} \right) + \right. \\
& \quad \left. + \bar{A} \bar{B} \left(\frac{\partial (v-w)}{\partial t} \right)^2 \right] dx dt \Bigg\}^{1/2} \leq \\
& \leq \frac{m_1^{\frac{n-1}{2}}}{m_0^{\frac{n+1}{2}}} \sqrt{\frac{M-K^2}{m-K^2}} \sqrt{\frac{B}{A}} \left\{ \int_Q F(\eta) \left[m_0 m_1 \sum_1^n \left(\frac{\partial^2 (v-w)}{\partial x_i \partial x_j} \right)^2 + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \bar{A} \bar{B} \left(\frac{\partial (v-w)}{\partial t} \right)^2 \right] dx dt \right\}^{1/2} \leq \\
& \leq \frac{m_1^{n/2}}{m_0^{n/2}} \sqrt{\frac{M-K^2}{m-K^2}} \sqrt{\frac{B}{A}} \sup_Q \sqrt{F(\eta)} \left\| v-w \right\| \left(\sqrt{\frac{\bar{A} \bar{B}}{m_0 m_1}} \right)
\end{aligned}$$

Per il lemma (3.1) e per le ipotesi i) ii) risulta

$$\frac{m_1^{n/2}}{m_0^{n/2}} \sqrt{\frac{M-K^2}{m-K^2}} \sqrt{\frac{B}{A}} \sup_Q \sqrt{F(\eta)} \leq \frac{m_1^{n/2}}{m_0^{n/2}} \sqrt{\frac{M-K^2}{m-K^2}} \sqrt{\frac{B}{A}} \frac{K}{\sqrt{m_0 m_1}} < 1$$

e quindi φ è una contrazione. Esiste allora una ed una sola $u \in W_0^{2,1}(Q)$ tale che $u = \varphi(u)$. Ne segue che il problema (3.4) ha soluzioni.

Per acquisire la (3.5) basta osservare che :

$$\begin{aligned}
\|u\|_{\sqrt{\frac{\bar{A} \bar{B}}{m_0 m_1}}} & \leq \frac{m_1^{\frac{n-1}{2}}}{m_0^{\frac{n+1}{2}}} \sqrt{\frac{M-K^2}{m-K^2}} \sqrt{\frac{B}{A}} \|af\|_{L^2(Q)} + \\
& + \frac{m_1^{n/2}}{m_0^{n/2}} \sqrt{\frac{M-K^2}{m-K^2}} \sqrt{\frac{B}{A}} \frac{K}{\sqrt{m_0 m_1}} \|u\|_{\left(\sqrt{\frac{\bar{A} \bar{B}}{m_0 m_1}}\right)}
\end{aligned}$$

e che (cfr [1] nota ⁽³⁾):

$$\frac{\sum_1^n a_i a_{ii}}{\sum_1^n a_{ij}^2} \leq m, \quad \frac{\sum_1^n a_{ii}}{\sum_1^n a_{ij}} \leq \frac{m_1}{\nu} \text{ in } Q.$$

BIBLIOGRAFIA

- [1] S. CAMPANATO, *Sul problema di Cauchy-Dirichlet per equazioni paraboliche del secondo ordine, non variazionali, a coefficienti discontinui*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, **41** (1968), 153-163.
- [2] C. MIRANDA, *Partial differential equations of elliptic type*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York (1970).
- [3] C. MIRANDA, *Su di una particolare equazione ellittica del secondo ordine a coefficienti discontinui*, Anal. Stii. Univ. Iasi, **XI_B** (1965), 209-215.

Manoscritto pervenuto in redazione il 28 aprile 1977.