RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

PIERO PLAZZI

Un teorema di L^2 continuità per certi operatori pseudodifferenziali

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 57 (1977), p. 217-230

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1977__57__217_0>

REND. SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol. 57 (1977)

Un teorema di L^2 continuità per certi operatori pseudodifferenziali

PIERO PLAZZI (*)

Introduction.

Beside the results about Hörmander's classes $L^m_{\varrho,\delta}$, the best known result concerning L^2 continuity of pseudodifferential operators is perhaps the Calderòn-Vaillancourt theorem [1], which states that a pseudodifferential operator whose symbol is C^∞ and bounded with all derivatives is L^2 continuous.

There are several variants and improvements of this result (see e. g. [2]): they require grow conditions for the derivatives of the symbol, up to a certain order.

Though similar results which do not rest on the smoothness of the symbol are available ([3], [4]), they do not deal directly with L^2 conditions; on the contrary, in this paper, which deals with the one-dimensional case only, we require mostly L^2 conditions for the symbol in order to assure L^2 boundedness: hence the weak smoothness assumptions in the main theorem (Theorem 1).

This result is then used to show the L^2 continuity of a class of pseudodifferential operators whose symbols are not square integrable (Theorem 2).

NOTAZIONI. Se $A \subseteq R$ è $(L-)$misurabile, la norma usuale in $L^p(A)$, $1 \leq p \leq +\infty$, si indicherà con $\| \quad \|_{p,A}$ o più semplice-

---

(*) Lavoro eseguito mentre l'Autore godeva di una borsa di studio per laureati del CNR.

Indirizzo dell'A.: Istituto Matematico « S. Pincherle », Piazza di Porta S. Donato, 5 - Bologna.

mente con $\| \quad \|_p$ se non vi è possibilità di equivoco; $l^2(Z)$, o l^2, indica lo spazio delle successioni complesse a indici in Z di quadrato sommabile: la sua norma verrà denotata ancora con $\| \quad \|_2$.

Se $\mathfrak{D}(R)$ indica lo spazio delle funzioni $C^\infty(R, C)$ a supporto compatto e $\mathfrak{F}(g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixy} g(y)\, dy$, $x \in R$, è la trasformata di Fourier di $g \in L^1(R)$, si porrà $\varphi(x, D) f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix\xi} \varphi(x, \xi)\, \mathfrak{F}(f)(\xi)\, d\xi$ per $f \in \mathfrak{D}(R)$, $x \in R$, se $\varphi : R^2 \to C$ è tale che l'espressione scritta ha senso; per operatore pseudodifferenziale di simbolo φ si intenderà l'operatore $f \to \varphi(x, D) f$, definito su $\mathfrak{D}(R)$.

Per brevità, si porrà nel seguito $I =]-\pi, \pi[$, $L^2 = L^2(I)$, $\psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx}$ $(x \in I,\ n \in Z)$; infine se $x \in R$, $[x]$ denota la sua parte intera: $[x] = \max\{y \in Z,\ y \leq x\}$.

§ **1.** – Alla dimostrazione del teorema 1 è opportuno premettere due lemmi.

LEMMA 1. *Sia* $\varphi = (\varphi_n)_{n \in Z}$ *una successione in* L^2; *condizione necessaria e sufficiente affinchè la serie*

$$S_\varphi f = \sum_{n \in Z} \langle f, \psi_n \rangle \varphi_n \psi_n \tag{1}$$

converga in L^2 *per ogni* $f \in L^2$ *e l'operatore lineare* $f \to S_\varphi f$ *sia* L^2 *continuo è che, posto* $c_{n,k} = \langle \varphi_n \psi_n, \varphi_k \psi_k \rangle = \bar{c}_{k,n}$, *risulti*:

i) $c_n = (c_{k,n})_{k \in Z} \in l^2(Z) \quad \forall\, n \in Z$;

ii) *posto* $T_c(\xi) = (\sum_{k \in Z} c_{k,n}\, \xi_k)_{n \in Z}$ *per* $\xi = (\xi_j)_{j \in Z} \in l^2(Z)$,

T_c *sia lineare e continuo da* l^2 *a* l^2.

DIMOSTRAZIONE. *a*) Sufficienza. Supponiamo che φ soddisfi i e ii, e che sia $A \subseteq Z$ finito.

$$\| \sum_{n\in A} <f, \psi_n> \varphi_n \psi_n \|_2^2 = < \sum_{n\in A} <f, \psi_n> \varphi_n \psi_n , \sum_{j\in A} <f, \psi_j> \varphi_j \psi_j > =$$

$$= \sum_{n\in A} <f, \psi_n> \overline{(\sum_{j\in A} <f, \psi_j> c_{j,n})} \leq$$

$$\leq (\sum_{n\in A} |<f, \psi_n>|^2)^{1/2} \cdot (\sum_{n\in Z} | \sum_{j\in A} c_{j,n} <f, \psi_j>|^2)^{1/2} \leq$$

$$\leq \| T_c \| (\sum_{n\in A} | <f, \psi_n> |^2) \cdot$$

Se si sceglie $A = A^{r,s}_{p,q} = \{ p, p+1, \ldots, p+q; -r, \ldots, -r-s \}$ per $p, q, r, s \in N$, si riconosce che la serie (1) converge $\forall f \in L^2$; è ora lecito nella diseguaglianza precedente scegliere $A = Z$, da cui si ha che S_φ è continuo e

$$\|S_\varphi\| \leq \|T_c\|^{1/2} . \tag{2}$$

b) Necessità. Supponiamo che (1) converga in L^2 $\forall f \in L^2$ e che S_φ sia continuo. Allora $\forall k \in Z$

$$|< S_\varphi f, \varphi_k \psi_k > | = | \sum_{n\in Z} <f, \psi_n> c_{n,k} | \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \| S_\varphi \| \|f\|_2 \|\varphi_k\|_2$$

e poichè, per il teorema di Riesz-Fischer, $(<f, \psi_n>)_{n\in Z}$ è un'arbitraria successione in l^2, si ha che, fissati $k \in Z$ e $\xi = (\xi_j)_{j\in Z} \in l^2$, converge $<\xi, \bar{c}_k> = \sum_{j\in Z} \xi_j c_{j,k}$.

Il teorema di Banach-Steinhaus ora implica $\bar{c}_k \in l^2$, e perciò $c_k \in l^2$.

Dunque vale i e T_c è definito su l^2.

Poichè $\|T_c(\xi)\|_2 = \sup_\eta |< T_c(\xi), \eta>|$, ove η è una successione con un numero finito di termini non nulli e $\|\eta\|_2 = 1$ ($\xi, \eta \in l^2$), ed esistono funzioni $f, g \in L^2$ tali che $<f, \psi_j> = \xi_j$, $<g, \psi_j> = \eta_j$ $\forall j \in Z$ ($\|f\|_2 = \|\xi\|_2$, $\|g\|_2 = \|\eta\|_2 = 1$) risulta

$$| < T_c(\xi), \eta > | = | \sum_n (\sum_{k\in Z} c_{k,n} \xi_k) \bar{\eta}_n | =$$

$$= | \sum_n \sum_{k\in Z} < \varphi_k \psi_k , \varphi_n \psi_n > <f, \psi_k> \overline{<g, \psi_n>} | =$$

$$= | \sum_n < S_\varphi f, \varphi_n \psi_n > \overline{<g, \psi_n>} | = | < S_\varphi f, S_\varphi g > | \leq$$

$$\leq \| S_\varphi \|^2 \| f \|_2 \| g \|_2 = \| S_\varphi \|^2 \| \xi \|_2 ;$$

perciò T_c è continuo, e

$$\|T_c\| \leq \|S_\varphi\|^2. \tag{3}$$

La dimostrazione è ora completa ; si noti che da (2) e (3) segue $\|S_\varphi\| = \|T_c\|^{1/2}$.

Osservazioni. 1. Se le φ_n sono costanti h_n i e ii sono equivalenti all'unica condizione che $(h_n)_{n\in Z}$ sia limitata. Infatti in tal caso $c_{n,k} = h_n \bar{h}_k \delta_{nk}$ (δ è il simbolo di Kronecker) e $T_c(\xi) = (\sum_{n\in Z} h_n \bar{h}_k \delta_{nk} \xi_n)_{k\in Z} = (|h_k|^2 \xi_k)_{k\in Z}$.

$(|h_n| \leq$ costante $\Rightarrow$ i e ii$)$ è evidente.

Viceversa, se vale ii è $(\sum_{n\in Z} |h_n|^4 |\xi_n|^2)^{1/2} \leq \mathcal{C}(\sum_{n\in Z} |\xi_n|^2)^{1/2}$; se $(h_n)_{n\in Z}$ non fosse limitata vi sarebbe una sottosuccessione $(h_{n_k})_{k\in N}$, $|n_k| \to +\infty$, divergente $(\lim_{k\to\infty} |h_{n_k}| = +\infty)$ tale che $|h_{n_k}| > k \ \forall\, k \in N$; posto allora $\xi_{n_k} = \dfrac{1}{k^2}$, $\xi_m = 0$ altrimenti, è $\xi \in l^2$ ma $\sum_{n\in Z} |h_n|^4 |\xi_n|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |h_{n_k}|^4 \dfrac{1}{k^4} = +\infty$ il che è assurdo.

In questo caso $\|S_\varphi\| = \sup_{n\in Z} |h_n|$.

2. Una condizione necessaria è $\|\varphi_n\|_2 \leq$ costante $\forall\, n \in Z$: se infatti S_φ è continuo si ha, $\forall\, n \in Z$,

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|\varphi_n\|_2 = \|\varphi_n \psi_n\|_2 = \|\sum_{k\in Z} \varphi_k \psi_k < \psi_n, \psi_k >\|_2 = \|S_\varphi \psi_n\|_2 \leq \|S_\varphi\|.$$

3. Una semplice condizione, largamente sufficiente, che implica i e ii è $(\|\varphi_n\|_2)_{n\in Z} \in l^2$, poichè vale la maggiorazione

$$|c_{n,k}| \leq \frac{1}{2\pi} \|\varphi_n\|_2 \|\varphi_k\|_2 \ \forall n, k \in Z.$$

È infatti immediato che essa implica i; si ha poi

$$\| T_c(\xi)\|_2 = \Big(\sum_{n\in Z} \Big| \sum_{k\in Z} c_{k,n}\, \xi_k\Big|^2\Big)^{1/2} \le \Big(\sum_{n\in Z}\sum_{k\in Z} |c_{k,n}|^2\Big)^{1/2} \cdot \Big(\sum_{k\in Z} |\xi_k|^2\Big)^{1/2} \le$$

$$\le \|\xi\|_2 \cdot \frac{1}{2\pi} \Big(\sum_{n\in Z}\sum_{k\in Z} \|\varphi_n\|_2^2\, \|\varphi_k\|_2^2\Big)^{1/2} = \frac{1}{2\pi}\Big(\sum_{j\in Z} \|\varphi_j\|_2^2\Big) \cdot \|\xi\|_2 \quad \forall \xi \in l^2$$

e dunque vale ii con $\|T_c\| \le \frac{1}{2\pi} \sum_{j\in Z} \|\varphi_j\|_2^2$.

4. Segnaliamo, nel caso che le φ_n siano tali che risulti $c_{n,k} = \, = \langle \varphi_n \psi_n , \varphi_k \psi_k \rangle = d_{k-n}$ per certi $d_j \in C$ $\forall n$, $k \in Z$, un'altra condizione necessaria e sufficiente:

(4) $(d_j)_{j\in Z} \in l^2\,(Z)$ e

(5) la serie $\sqrt{2\pi} \sum_{k\in Z} d_k\, \psi_k\,(t)$, convergente in L^2, definisce una funzione $d(t) \in L^\infty\,(I)$.

Infatti è noto ([5], vol. I, p. 168) che se vale (4) e $T_d(\xi) = \, = \big(\sum_{k\in Z} d_{n-k}\, \xi_k\big)_{n\in Z}$, T_d è lineare e continuo da l^2 a l^2 se e solo se $d(t) = \sqrt{2\pi} \sum_{k\in Z} d_k\, \psi_k\,(t) \in L^\infty\,(I)$; in tal caso $\|T_d\| = \|d\|_\infty$.

Poichè in questo caso $T_c = T_d$ si ha $\|S_\varphi\| = \|d\|_\infty^{1/2}$.

Lemma 2. *Siano* $\varphi \in C\,(R, C)$, $N > 0$. *Allora*

$$\sum_{n\in Z, |n| \leqslant N\lambda} \varphi\left(\frac{n}{\lambda}\right) \frac{1}{\lambda} \to \int_{-N}^{N} \varphi\,(y) dy \quad \text{per} \quad \lambda \to +\infty$$

Dimostrazione. Poniamo

$$\sum\,(N, \lambda) = \sum_{n\in Z,\, |n| \leqslant N\lambda} \varphi\left(\frac{n}{\lambda}\right) \frac{1}{\lambda}\,, \quad I_N = \int_{-N}^{N} \varphi(y)\, dy\,;$$

non è poi restrittivo supporre $\varphi : R \to R$.

Si considerino la scomposizione σ_λ di $[-N, N]$ definita da $\sigma_\lambda = \{\pm N\}\ U \left\{\frac{k}{\lambda}\,;\ k = -[N\lambda], \dots, [N\lambda]\right\}$, di intervalli componenti $I_k(\lambda) = \left[\frac{k}{\lambda}, \frac{k+1}{\lambda}\right]$ $(k = -[N\lambda], \dots, [N\lambda]-1)$, $J_0(\lambda) = \left[-N, -\frac{[N\lambda]}{\lambda}\right]$, $J_1(\lambda) = \left[\frac{[N\lambda]}{\lambda}, N\right]$ e la relativa somma $S(\varphi, \sigma_\lambda) = \varphi(-N)\frac{N\lambda - [N\lambda]}{\lambda} + \sum_{k=-[N\lambda]}^{[N\lambda]-1} \frac{1}{\lambda}\varphi\left(\frac{k}{\lambda}\right) + \varphi(N)\frac{N\lambda - [N\lambda]}{\lambda}$: come è noto, $S(\varphi, \sigma_\lambda) \to I_N$ per $\lambda \to +\infty$.

Allora, da $|\sum(N, \lambda) - S(\varphi, \sigma_\lambda)| =$

$= \left| -\varphi(-N)\frac{N\lambda - [N\lambda]}{\lambda} - \varphi(N)\frac{N\lambda - [N\lambda]}{\lambda} + \varphi\left(\frac{[N\lambda]}{\lambda}\right)\frac{1}{\lambda}\right| \le$

$\le \frac{3}{\lambda} \max_{[-N,N]} |\varphi|$ segue il lemma.

Teorema 1. *Sia* $\varphi: R^2 \to C$ *continua e tale che*

i) $$|\varphi(x, \xi)| \le C(x)(1+\xi^2)^{p(x)/2} \quad \forall x, \xi \in R$$

Si ponga $\varphi_n^\lambda(x) = \varphi\left(\lambda x, \frac{n}{\lambda}\right)$ *per* $x \in I$, $n \in Z$, $\lambda > 0$; *supposto che, almeno per una successione divergente di* λ, *le* φ_n^λ *soddisfino le condizioni del lemma* 1, *siano* T_c^λ *i relativi operatori da* l^2 *a* l^2; *ebbene, se*

ii) $$\liminf_{\lambda\to+\infty} \| T_c^\lambda \| < +\infty$$

l'operatore pseudodifferenziale di simbolo φ *è* L^2 *continuo su* $\mathfrak{D}(R)$.

Dimostrazione. Per $f \in \mathfrak{D}(R)$ e $\lambda > 0$ poniamo $f_\lambda(x) = f(\lambda x)$; consideriamo solo i λ per cui supp $f_\lambda \subseteq I$.

Se S_φ^λ e l'operatore determinato dalle φ_n^λ risulta

$$(S_\varphi^\lambda f_\lambda)(x) = \sum_{n\in Z} \varphi\left(\lambda x, \frac{n}{\lambda}\right)\frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda t)\, e^{-int}\, dt\right) e^{inx}, \quad x \in I.$$

Per una successione di λ per cui le φ_n^λ soddisfano le ipotesi del lemma 1 si ha

(6) $$\| S_\varphi^\lambda f_\lambda \|_{2,I}^2 \le \| S_\varphi^\lambda \|^2 \, \| f_\lambda \|_{2,I}^2 = \| T_c^\lambda \| \, \| f_\lambda \|_{2,I}^2$$

ove

$$\| S_\varphi^\lambda f_\lambda \|_{2,I}^2 = \int_{-\pi}^{\pi} \Big| \sum_{n\in Z} \frac{1}{2\pi} \varphi\left(\lambda x, \frac{n}{\lambda}\right) e^{inx} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda t)\, e^{-int}\, dt \right) \Big|^2 dx .$$

Fissato $x \in R$ la serie converge puntualmente ed assolutamente:

$$\sum_{n\in Z} \left| \varphi\left(\lambda x, \frac{n}{\lambda}\right) \right| \, |\mathfrak{F}(f_\lambda)(n)| \le C(\lambda x) \sum_{n\in Z} \left(1 + \frac{n^2}{\lambda^2}\right)^{p(\lambda x)/2} \frac{C_{\lambda,q}}{(1+n^2)^{q/2}} < +\infty$$

poichè q può essere scelto ad arbitrio.

Allora

$$\| S_\varphi^\lambda f_\lambda \|_{2,I}^2 = \int_{-\pi\lambda}^{\pi\lambda} \left| \sum_{n\in Z} \frac{1}{2\pi} \varphi\left(y, \frac{n}{\lambda}\right) e^{iy\frac{n}{\lambda}} \left(\frac{1}{\lambda} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\, e^{-i\frac{n}{\lambda}u}\, du \right) \right|^2 \frac{1}{\lambda}\, dy ;$$

poichè è

$$\|f_\lambda\|_{2,I}^2 = \int_{-\pi}^{\pi} |f(\lambda t)|^2\, dt = \frac{1}{\lambda} \int_{-\lambda\pi}^{\lambda\pi} |f(u)|^2\, du = \frac{1}{\lambda} \|f\|_{2,R}^2$$

la (6) diviene

$$(7) \quad \int_{-\lambda\pi}^{\lambda\pi} \left| \sum_{n\in Z} \frac{1}{2\pi} \varphi\left(y, \frac{n}{\lambda}\right) e^{i\frac{n}{\lambda}y} \frac{1}{\lambda} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\, e^{-i\frac{n}{\lambda}u}\, du \right) \right|^2 dy \le \|T_c^\lambda\| \|f\|_{2,R}^2$$

passando al $\liminf\limits_{\lambda\to+\infty}$ e applicando il lemma di Fatou

$$(8) \quad \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \liminf_{\lambda\to+\infty} \Big| \sum_{n\in Z} \varphi\left(y, \frac{n}{\lambda}\right) e^{i\frac{n}{\lambda}y} \frac{1}{\lambda} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\, e^{-i\frac{n}{\lambda}u}\, du \right) \Big|^2 dy \right)^{1/2} \le$$
$$\le C^{1/2} \| f \|_{2,R}$$

ove si è posto $C = \liminf\limits_{\lambda\to+\infty} \|T_c^\lambda\|$.

Resta solo da provare che, fissato $y \in R$, esiste

$$(9) \quad \lim_{\lambda\to+\infty} \left(\sum_{n\in Z} \varphi\left(y, \frac{n}{\lambda}\right) e^{i\frac{n}{\lambda}y} \frac{1}{\lambda} \mathfrak{F}(f)\left(\frac{n}{\lambda}\right) \right) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y, \xi)\, e^{i\xi y}\, \mathfrak{F}(f)(\xi)\, d\xi .$$

Si fissi un $N > 1$ e si ponga

$$\sum_{n\in Z} \varphi\left(y, \frac{n}{\lambda}\right) e^{i\frac{n}{\lambda}} \frac{1}{\lambda} \mathfrak{F}(f)\left(\frac{n}{\lambda}\right) =$$

$$= \left(\sum_{|n|>N\lambda} + \sum_{|n|\leqslant N\lambda}\right) \varphi\left(y, \frac{n}{\lambda}\right) e^{i\frac{n}{\lambda}y} \frac{1}{\lambda} \mathfrak{F}(f)\left(\frac{n}{\lambda}\right) = \sum\nolimits_N + \sum\nolimits'_N .$$

Risulta allora $\forall q \in N$

$$\left|\sum\nolimits_N\right| \leq \sum_{|n|\geqslant N\lambda} \frac{1}{\lambda}\, C(y) \left(1 + \frac{n^2}{\lambda^2}\right)^{p(y)/2} \frac{C'_{f,q}}{(1 + n^2/\lambda^2)^{q/2}}$$

quindi per $\lambda \geq 1$ e $q = p(y) + 2$ si ottiene

$$\left|\sum\nolimits_N\right| \leq C''(y, f)\, \frac{1}{\lambda} \sum_{n\geqslant N\lambda} \left(1 + \frac{n^2}{\lambda^2}\right)^{-1} \leq$$

$$\leq C''\, \lambda \sum_{n\geqslant [N\lambda]} n^{-2} = C''\, \xi\left(2\,, [N\,\lambda]\right),$$

ove $\zeta(s\,, a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+a)^s}$ $(s > 1\,,\ a > 0)$ è la funzione zeta di Riemann generalizzata. Per essa vale la diseguaglianza $\zeta(h\,, v) \leq$ $\leq C_0 v^{1-h}$ per $v \geq v_0 > 0\,,\ h \geq h_0 > 1$, mentre C_0 dipende solo da h_0 e v_0: questa diseguaglianza segue immediatamente da

$$\zeta(h\,, v) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+v)^h} \leq \frac{1}{v^h} + \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+v)^h} = \frac{1}{v^h} - \frac{1}{1-h}\, v^{-h+1} \leq$$

$$\leq \left(\frac{1}{v_0} + \frac{1}{h_0 - 1}\right) v^{1-h} \quad .$$

Dunque risulta infine

$$\left|\sum\nolimits_N\right| \leq C'''\, \lambda\, [N\lambda]^{1-2} \leq C''''\, N^{-1} .$$

Per il lemma 2, poichè $\xi \to \varphi(y, \xi)\, e^{iy\xi}\, \mathfrak{F}(f)(\xi)$ è continua, $\Sigma'_N \to \int_{-N}^{N} \varphi(y, \xi)\, e^{iy\xi}\, \mathfrak{F}(f)(\xi)\, d\xi$ per $\lambda \to +\infty$; allora

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y, \xi)\, e^{iy\xi}\, \mathfrak{F}(f)(\xi)\, d\xi - \sum_{n \in Z} \frac{1}{\lambda} \varphi\left(y, \frac{n}{\lambda}\right) e^{i \frac{n}{\lambda} y}\, \mathfrak{F}(f)\left(\frac{n}{\lambda}\right) \right| \leq$$

$$\leq \left| \int_{-N}^{N} \varphi(y, \xi)\, e^{iy\xi}\, \mathfrak{F}(f)(\xi)\, d\xi - \Sigma'_N \right| + |\Sigma_N| + \left| \int_{|\xi| \geq N} \varphi(y, \xi)\, e^{iy\xi}\, \mathfrak{F}(f)(\xi)\, d\xi \right|.$$

Fissato $\varepsilon > 0$, per $N > N_\varepsilon$ il secondo ed il terzo termine scritti si maggiorano con $\frac{\varepsilon}{3}$; fissato in tal modo N, il primo termine si maggiora con $\frac{\varepsilon}{3}$ se $\lambda > \lambda_\varepsilon$, da cui (9). Si noti che nell'applicare il lemma 2 si è supposta φ continua solo nella variabile ξ.

§ 2. – Il teorema 1 viene ora impiegato nel dimostrare la L^2 continuità di una classe di operatori pseudodifferenziali; per chiarezza si premette un lemma elementare sulle serie di Fourier.

Lemma 3. *La serie* $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ sen (kt) *converge* $\forall\, t \in R$ *ad una funzione limitata e* $\left\| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \operatorname{sen}(kt) \right\|_{\infty, R} = \pi/2$.

Dimostrazione. Basta considerare lo sviluppo di Fourier della funzione $f(t) = \frac{1}{2}(\pi - t)$, $t \in]0, 2\pi[$, $f(0) = 0$ prolungata su R con periodicità 2π.

Teorema 2. *Si consideri il simbolo* $\varphi(x, \xi) = F(x)\, e^{i\xi a(x)}$ *ove* a, $F \in C^\infty$, *a è dispari e a valori reali, F è pari oppure dispari.*

Si ponga $b(y) = a(y) + y$; *supposto* $b'(y) \neq 0\ \forall\, y \in R$, *sia* $\psi(y) = \frac{|F(y)|^2}{b'(y)}$. *Allora se*

i) $$\liminf_{\lambda \to +\infty} \frac{1}{2\pi\lambda} \int_{-\lambda\pi}^{\lambda\pi} |F(y)|^2 dy < +\infty$$

ii) $$\frac{1}{b'} \in L^\infty(R),\ b\psi',\ \left(\frac{\psi'}{b'}\right)' \in L^1(R)$$

l'operatore pseudodifferenziale $\varphi(x, D) f(x) = F(x) f\big(b(x)\big)$ $\big(f \in \mathfrak{D}(R)\big)$ *è* L^2 *continuo.*

Dimostrazione. Dalle ipotesi segue che $|F|^2$ è pari, b dispari e quindi b' è pari, ψ pari, ψ' dispari.

Posto $\varphi_n^\lambda(x) = \varphi\left(\lambda x, \frac{n}{\lambda}\right)$ per $x \in I$, $\lambda > 0$, $n \in Z$ si dimostrerà che i coefficienti $c_{n,k} = \langle \varphi_n^\lambda \psi_n, \varphi_k^\lambda \psi_k \rangle$ sono della forma d_{k-n} per una successione $(d_j)_{j \in Z}$ in $l^2(Z)$: quindi basterà provare che $d(t) = \sum_{k \in Z} d_k e^{ikt}$ è una funzione di $L^\infty(R)$ e che $\liminf_{\lambda \to +\infty} \|d\|_\infty < +\infty$: il teorema 2 segue allora dal teorema 1 per l'osservazione 4 al lemma 1. Ciò premesso, si ha $\forall k, n \in Z$

$$c_{n,k} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi\left(\lambda\, x, \frac{n}{\lambda}\right) e^{inx} \overline{\varphi}\left(\lambda x, \frac{k}{\lambda}\right) e^{-ikx}\, dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |F(\lambda x)|^2 \exp\left(i\left(\frac{n}{\lambda} a(\lambda x) - \frac{k}{\lambda} a(\lambda x)\right)\right) e^{i(n-k)x}\, dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi\lambda} \int_{-\lambda\pi}^{\lambda\pi} |F(y)|^2 e^{-i\frac{k-n}{\lambda} b(y)}\, dy = d_{k-n}$$

ove $$d_r = d_{-r} = \frac{1}{2\pi\lambda} \int_{-\lambda\pi}^{\lambda\pi} |F(y)|^2 \cos\left(\frac{r}{\lambda} b(y)\right) dy \quad (r \in Z).$$

Se $k = 0$ è $$d_0 = \frac{1}{2\pi\lambda} \int_{-\lambda\pi}^{\lambda\pi} |F(y)|^2\, dy\ ;$$ se $k \neq 0$

$$d_k = \frac{1}{2\pi k}\int_{-\lambda\pi}^{\lambda\pi} \psi(y)\left(\frac{d}{dy}\left(\operatorname{sen}\left(\frac{k}{\lambda}b(y)\right)\right)\right)dy =$$

$$= \frac{1}{2\pi k}\left[\psi(y)\operatorname{sen}\left(\frac{k}{\lambda}b(y)\right)\right]_{y=-\lambda\pi}^{y=\lambda\pi} - \frac{1}{2\pi k}\int_{-\lambda\pi}^{\lambda\pi}\psi'(y)\operatorname{sen}\left(\frac{k}{\lambda}b(y)\right)dy =$$

$$= \frac{1}{\pi k}\psi(\lambda\pi)\operatorname{sen}\left(\frac{k}{\lambda}b(\lambda\pi)\right) - \frac{1}{2\pi k}\int_{-\lambda\pi}^{\lambda\pi}\psi'(y)\operatorname{sen}\left(\frac{k}{\lambda}b(y)\right)dy =$$

$$= d_k^{(1)} + d_k^{(2)}, \text{ ove } d_k^{(1)} = \frac{1}{\pi k}\psi(\lambda\pi)\operatorname{sen}\left(\frac{k}{\lambda}b(\lambda\pi)\right),$$

$$d_k^{(2)} = -\frac{1}{2\pi k}\int_{-\lambda\pi}^{\lambda\pi}\psi'(y)\operatorname{sen}\left(\frac{k}{\lambda}b(y)\right)dy\,.$$

Ciò prova intanto che $(d_k)_{k\in Z} \in l^2$ e perciò esiste in L^2

$$d(t) = \sum_{k\in Z} d_k e^{ikt} = d_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty} d_k \cos(kt) = d_0 +$$

$$+ 2\sum_{k=1}^{\infty} d_k^{(1)}\cos(kt) + 2\sum_{k=1}^{\infty} d_k^{(2)}\cos(kt) = d_0 +$$

$$+ \frac{2}{\pi}\psi(\lambda\pi)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\operatorname{sen}\left(\frac{k}{\lambda}b(\lambda\pi)\right)\cos(kt) +$$

$$-\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\left(\int_{-\lambda\pi}^{\lambda\pi}\psi'(y)\operatorname{sen}\left(\frac{k}{\lambda}b(y)\right)dy\right)\cos(kt) = d_0 +$$

$$+\frac{2}{\pi}\psi(\lambda\pi)\textstyle\sum_1 - \frac{1}{\pi}\sum_2 .$$

Risulta ora per i $\liminf\limits_{\lambda\to+\infty} d_0 < +\infty$; è poi $\liminf\limits_{y\to+\infty} |\psi(y)| < +\infty$: se infatti fosse $\liminf\limits_{y\to+\infty} |\psi(y)| = +\infty$, si avrebbe $\lim\limits_{y\to+\infty} |\psi(y)| = +\infty$ e perciò fissato $n \in N$ ad arbitrio esisterebbe C_n positivo tale che $|\psi(y)| > n$ se $y > C_n$; d'altra parte per ii $\frac{1}{b'} \in L^\infty(R)$ e perciò per $\lambda > C_n$ si avrebbe

$$\frac{1}{2\pi\lambda}\int_{-\lambda\pi}^{\lambda\pi} |F(y)|^2\,dy \geq \frac{1}{\pi\lambda}\int_{\pi C_n}^{\lambda\pi} |b'\psi|\,dy \geq \frac{k}{\pi\lambda}\int_{\pi C_n}^{\pi\lambda} |\psi(y)|\,dy >$$

$$> \frac{Kn}{\pi\lambda}(\pi\lambda - \pi C_n) = Kn\left(1 - \frac{C_n}{\lambda}\right), \quad \text{ove } K^{-1} = \left\| \frac{1}{b'} \right\|_{\infty, R};$$

da ciò, per l'arbitrarietà di n, $\liminf\limits_{\lambda \to +\infty} \dfrac{1}{2\pi\lambda}\displaystyle\int_{-\lambda\pi}^{\lambda\pi} |F(y)|^2 dy = +\infty$, contro i .

Dunque i e ii implicano $\liminf\limits_{y \to +\infty} |\psi(y)| < +\infty$, cioè $\liminf\limits_{\lambda \to +\infty} |\psi(\lambda\pi)| < +\infty$.

Dalla formula $\operatorname{sen}\left(\dfrac{k}{\lambda}(b(\lambda\pi))\right)\cos(kt) = \dfrac{1}{2}\operatorname{sen}\left(k\left(t + \dfrac{b(\lambda\pi)}{\lambda}\right)\right) + \dfrac{1}{2}\operatorname{sen}\left(k\left(t - \dfrac{b(\lambda\pi)}{\lambda}\right)\right)$ si ha

$$\sum\nolimits_1 = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\operatorname{sen}\left(k\left(t + \frac{b(\lambda\pi)}{\lambda}\right)\right) + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\operatorname{sen}\left(k\left(t - \frac{b(\lambda\pi)}{\lambda}\right)\right):$$

quindi, per il lemma 3, $\sum_1$ converge puntualmente $\forall\lambda$ e $\forall t$ a una funzione di $L^\infty(R)$: $\forall\lambda > 0$ $\|\sum_1\|_{\infty, R} \leq \frac{\pi}{2}$ · Resta ormai solo da provare che $\sum_2$ converge a una funzione di $L^\infty(R)$ maggiorabile in valor assoluto con una costante indipendente da $\lambda > 0$. È

$$\sum\nolimits_2 = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\left(\int_{-\lambda\pi}^{\lambda\pi}\psi'(y)\operatorname{sen}\left(\frac{k}{\lambda}b(y)\right)dy\right)\cos(kt) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{k,\lambda}\cos(kt)$$

(la serie converge in L^2); posto per $g \in L_{loc}(R)$

$$F_\lambda(g)(x) = \int_{-\lambda\pi}^{\lambda\pi} g(y) \frac{\operatorname{sen}\big(x\, b(y)\big)}{x\, b(y)}\, dy \quad \text{si ha,} \quad \forall k \in N \quad \text{e} \quad \forall \lambda > 0$$

$$a_{k,\lambda} = \frac{1}{k} \int_{-\lambda\pi}^{\lambda\pi} \psi'(y) \operatorname{sen}\left(\frac{k}{\lambda}\, b(y)\right) dy = \frac{1}{\lambda}\, F_\lambda(b\psi')\left(\frac{k}{\lambda}\right).$$

Risulta ora per una $C > 0$ indipendente da $\lambda > 0$ e $x \in R$

$$|F_\lambda(b\psi')(x)| \leq C(1 + x^2)^{-1}. \tag{10}$$

Infatti è immediato che $|F_\lambda(b\psi')(x)| \leq \|b\psi'\|_{1,R}$ $\forall x \in R$ e $\forall \lambda > 0$; inoltre

$$x^2 F_\lambda(b\psi')(x) = \int_{-\lambda\pi}^{\lambda\pi} \frac{\psi'(y)}{b'(y)} \big(xb'(y) \operatorname{sen}\big(xb(y)\big)\big)\, dy =$$

$$= \left[-\frac{\psi'(y)}{b'(y)} \cos\big(xb(y)\big)\right]_{x=-\lambda\pi}^{y=\lambda\pi} + \int_{-\lambda\pi}^{\lambda\pi} \left(\frac{\psi'(y)}{b'(y)}\right)' \cos\big(xb(y)\big)\, dy =$$

$$= -2 \cos\big(xb(\lambda\pi)\big) \frac{\psi'(\lambda\pi)}{b'(\lambda\pi)} + \int_{-\lambda\pi}^{\lambda\pi} \left(\frac{\psi'(y)}{b'(y)}\right)' \cos\big(xb(y)\big)\, dy =$$

$$= P_1 + P_2.$$

Per l'ipotesi ii si ha $|P_1| \leq 2 \left\| \dfrac{\psi'}{b'} \right\|_{\infty, R}$, $|P_2| \leq \left\| \left(\dfrac{\psi'}{b'}\right)' \right\|_{1,R}$ e perciò resta provata (10).

Ne segue che $|a_{k,\lambda}| \leq \dfrac{1}{\lambda}\, C\left(1 + \dfrac{k^2}{\lambda^2}\right)^{-1}$ e ciò comporta intanto che $\sum_2$, $\forall \lambda$, converge totalmente su R ad una funzione continua di periodo 2π. Infine

$$\left|\sum\nolimits_2\right| \leq C\lambda^{-1} \sum_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{k^2}{\lambda^2}\right)^{-1} \leq C'\lambda \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda + k)^{-2} = C'\lambda\zeta(2,\lambda) \leq C''$$

e ciò prova il teorema.

BIBLIOGRAFIA

[1] CALDERÒN-VAILLANCOURT, *On the boundedness of pseudodifferential operators*, J. Math. Society Japan, **23** (1971).
[2] CALDERÒN-VAILLANCOURT, *A class of bounded pseudodifferential operators*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA **69** (1972).
[3] GUSSI-ZAIDMAN, *Estimates for pseudodifferential operators*, Rev. Roumaine Math. Pure Appl. **16** (1971).
[4] ZAIDMAN, *Some non-homogeneous symbols and associated pseudodifferential operators*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (3) **21** (1967).
[5] ZYGMUND, *Trigonometric Series*, II Ed., Cambridge University Press (1959).

Manoscritto pervenuto in redazione il 4 aprile 1977.