RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

MICHAEL WESTER

Eine Kennzeichnung einiger einfacher Gruppen vom Charakteristik 2-Typ

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 57 (1977), p. 107-147

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1977__57__107_0>

Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, Vol. 57 (1977)

Eine Kennzeichnung einiger einfacher Gruppen vom Charakteristik 2-Typ

Michael Wester (*)

Einleitung.

In einer endlichen einfachen Gruppe G gibt es entweder im Zentralisator einer Involution z eine quasi-einfache Komponente, oder $C_G(z)/O(C_G(z))$ ist 2-constrained. Über den ersten Fall haben neuere Ergebnisse viel Aufschluß gegeben. In den bekannten einfachen Gruppen liegt im zweiten Fall häufig die Situation vor, daß $O(C_G(z))$ trivial und $O_2(C_G(z))$ extraspeziell ist. Insbesondere führt diese Situation zu einer Fülle einfacher sporadischer Gruppen, nämlich zu den Gruppen M_{12}, J_2, J_3, M_{24}, He, Sz, Ha, T, Co_2, Co_1, $M(24)'$, J_4, BM und MM.

In der von Thompson entdeckten Gruppe T hat die extraspezielle Gruppe $O_2(C_G(z))$ die Weite 4, und $C_G(z)/O_2(C_G(z))$ ist isomorph zu A_9. Ähnlich sehen die Zentralisatoren zentraler Involutionen in den Gruppen $L_6(2)$ und $U_6(2)$ aus: $O_2(C_G(z))$ hat Weite 4, und $C_G(z)/O_2(C_G(z))$ ist isomorph zu $L_4(2)$ beziehungsweise $U_4(2)$. Die drei Faktorgruppen haben also alle Sylow 2-Untergruppen vom Typ A_8. Diese Situation soll in der vorliegenden Arbeit untersucht werden. Man erhält eine Charakterisation der einfachen Gruppen T, $L_6(2)$ und $U_6(2)$.

Ferner wird ein Fehler in einer Arbeit von U. Dempwolff berichtigt. G. Stroth machte darauf aufmerksam, daß außer den in dieser Arbeit angegebenen orthogonalen 8-dimensionalen A_8-Moduln

(*) Joannes Gutenberg Universität Mainz Fachbereich Mathematik.

ein weiterer existiert. In Lemma 2.1 werden dieser und die drei bisher bekannten Moduln beschrieben, und es wird gezeigt, daß dies alle Moduln dieser Art sind.

Die Bezeichnungen, die in dieser Arbeit vorkommen, sind in der Regel dem Buch von Gorenstein [8] entnommen. Insbesondere bedeute

$Aut G$	die volle Automorphismengruppe der Gruppe G,
$Inn G$	die innere Automorphismengruppe der Gruppe G,
$O(V)$	die Gruppe aller regulären orthogonalen Abbildungen des Vektorraums V in sich, wobei V mit symplektischem Skalarprodukt (,) ausgestattet sei,
A^T	die Transponierte der Matrix A,
$J(T)$	das Erzeugnis aller elementar-abelschen Untergruppen der p-Gruppe T von maximaler Ordnung,
$\mid$, $\nmid$	ist Teiler, bzw. ist kein Teiler von,
$G \wr H$	das Kranzprodukt von G mit H.

Eine Involution w aus einer 2-Gruppe T heiße extremal bezüglich der Gruppe H, falls $H \geq T$ und $|C_T(w)| \geq |C_T(x)|$ für alle $x \underset{H}{\sim} w$.

Satz: Sei G eine endliche fusionseinfache Gruppe mit $O(G) = 1$, sei z eine Involution aus G und H der Zentralisator von z in G. Der größte 2-Normalteiler E von H sei eine extraspezielle Gruppe der Weite 4, und H sei eine treue Erweiterung von E durch eine einfache Gruppe mit Sylow 2-Untergruppen vom Typ A_8.

Dann ist G isomorph zu $L_6(2)$, $U_6(2)$, T, oder zu einer der beiden möglichen treuen Erweiterungen einer elementar-abelschen Gruppe der Ordnung 32 durch $L_5(2)$. Hierbei bezeichnen wir mit T die von Thompson entdeckte einfache Gruppe der Ordnung $2^{15}.3^{10}.5^3.7^2.13.19.31$.

1. *Vorbereitende Ergebnisse*

Im folgenden bezeichne G immer eine Gruppe, die die Voraussetzungen des Satzes erfüllt. Während der ganzen Arbeit halte ich an folgenden Bezeichnungen fest: $\tilde{H} = H/E$, $\bar{H} = H/\langle z \rangle$. Faßt man $\bar{E} = E/\langle z \rangle$ als Vektorraum über $GF(2)$ auf, so definiert bekanntlich $(\bar{e}_1, \bar{e}_2) = r$ mit $[e_1, e_2] = z^r$ für e_1, e_2 aus E ein symplektisches

Skalarprodukt (,) auf $\bar{E}$, und $g(\bar{e}) = s$ mit $e^2 = z^s$ für e aus E definiert eine quadratische Form g auf $\bar{E}$. Damit wird $\bar{E}$ zu einem regulären orthogonalen Vektorraum über $GF(2)$. Ist E vom Typ $(+)$ und somit ein zentrales Produkt von vier Diedergruppen der Ordnung 8, so hat $\bar{E}$ maximalen Index, besitzt also isotrope Unterräume der Dimension 4. Ist andererseits E vom Typ $(-)$ und somit ein zentrales Produkt von drei Diedergruppen der Ordnung 8 und einer Quaternionengruppe der Ordnung 8, so hat $\bar{E}$ Index 3, besitzt also isotrope Unterräume der Dimension höchstens 3. Weiter liefert [13, Theorem 11.3*c*], daß $\bar{E}^*$ genau 135 isotrope und 120 anisotrope Vektoren bzw. genau 119 isotrope und 136 anisotrope Vektoren enthält, je nach dem, ob E vom Typ $(+)$ oder $(-)$ ist.

Das folgende Lemma bestimmt die Struktur von $\tilde{H}$.

Lemma 1.1. Die Gruppe $\tilde{H}$ ist isomorph zu A_8, A_9 oder $PSp(4, 3)$.

Beweis. Nach Voraussetzung ist $\tilde{H}$ einfach, und es gilt $C_H(E) \leq E$. Also ist $\tilde{H}$ isomorph zu einer Untergruppe von $AutE/InnE$, wobei bekanntlich diese Gruppe isomorph zu $O_8^+(2)$ oder $O_8^-(2)$ ist, je nach Typ von E (siehe [14, S. 357]). Die einfachen Gruppen mit Sylow 2-Untergruppen vom Typ A_8 sind in [7] bestimmt. Aus dieser Liste befinden sich als Untergruppen in $O_8^+(2)$ bzw. $O_8^-(2)$ nur die oben aufgeführten Gruppen.

H enthält Sylow 2-Untergruppen von G, denn ist S eine Sylow 2-Untergruppe von H, so gilt $Z(S) \leq C_S(E) = \langle z\rangle$. Um die genaue Struktur von H zu bestimmen, ist es nötig, die möglichen Operationen der Gruppen A_8, A_9 und $PSp(4, 3)$ auf einem orthogonalen 8-dimensionalen Vektorraum zu untersuchen. Ist dies geschehen, so führt in der Regel einer der folgenden Sätze zur Bestimmung von G oder zu einem Widerspruch.

Satz 1.2. In H gibt es keine nichtabelschen Normalteiler der Ordnung 8.

Beweis. Siehe [19, Theorem 3].

Satz 1.3. Hat die Involution z keine G-Konjugierten in $E \setminus \langle z\rangle$, so ist G isomorph zu einer der Gruppen $U_n(2)$, $L_4(3)$ oder Co_2.

Beweis. Siehe [21, 1.3.].

Satz 1.4. Ist H eine zerfallende Erweiterung von E durch A_8 mit $|C_{\bar{E}}(\bar{H})| \neq 2$, so ist G isomorph zu $L_6(2)$ oder zur zerfallenden treuen Erweiterung einer E_{32} durch $L_5(2)$.

Beweis. Ist G einfach, so ist G nach [3] isomorph zu $L_6(2)$. Sei also G nicht einfach und N ein minimaler Normalteiler von G. Wegen $O(G) = 1$ ist 2 ein Teiler der Ordnung von N. Also ist $V = N \cap H \neq 1$. Nach [3] ist H isomorph zum Zentralisator einer 2-zentralen Involution aus $L_6(2)$ und besitzt deshalb nur Normalteiler isomorph zu E_{32} oder E.

Es sei zunächst $V \cong E_{32}$. Ist N eine elementar-abelsche 2-Gruppe, so folgt $N = V$. Weiter hat man dann $C_G(N) = C_H(N) = N$ und $H < G \lesssim E_{32}L_5(2)$. Es ist H/N isomorph zu einer maximalen Untergruppe von $L_5(2)$, und H zerfällt über N. Also ist G isomorph zur zerfallenden Erweiterung $E_{32}L_5(2)$. Da weiterhin eine A_8 nichttrivial auf N operiert, kann N kein direktes Produkt von einfachen Gruppen sein.

Sei nun $V = E$ oder $V = H$. Im ersten Fall ist wieder N ein direktes Produkt einfacher Gruppen, auf dem eine A_8 als Gruppe von äußeren Automorphismen operiert. Das ist nicht möglich, also enthält N die Gruppe H und ist somit einfach. Mit [3] ist N isomorph zu $L_6(2)$ und $N < G \leq AutN$. Das ist aber ein Widerspruch zu der Tatsache, daß eine $L_6(2)$ keine äußeren $2'$-Automorphismen besitzt.

Satz 1.5. Sei G eine fusionseinfache Gruppe mit $O(G) = 1$, die eine Untergruppe L isomorph zur eindeutig bestimmten nichtzerfallenden Erweiterung einer elementar-abelschen Gruppe der Ordnung 2^5 durch $L_5(2)$ besitzt. Dann ist $G = L$, oder G ist isomorph zu der von Thompson entdeckten Gruppe T.

Beweis. Ist G einfach, so folgt mit [18] $G \cong T$. Sei also G nicht einfach und N ein minimaler Normalteiler von G. Wegen $O(G) = 1$ ist $V = N \cap L \neq 1$. Die Struktur von L liefert $V = L$ oder $V \cong E_{32}$.

Sei zunächst $V = L$. Dann ist N eine einfache Gruppe, die L enthält, mit [18] folgt $N \cong T$. Das ist nicht möglich, da T keine nichttrivialen äußeren Automorphismen besitzt.

Sei nun $V \cong E_{32}$. Ist N eine elementar-abelsche 2-Gruppe, so folgt $N = V$. Mit $C_G(N) = C_H(N) = N$ erhält man $G = L$. Weiter kann N kein direktes Produkt einfacher Gruppen sein, da eine $L_5(2)$ auf N eine Gruppe nichttrivialer äußerer Automorphismen bewirkt. Damit ist die Behauptung bewiesen.

Satz 1.6. Ist K ein Normalteiler von H vom Index 2, so ist E in K enthalten.

Beweis. Siehe [19, Theorem 1].

Das folgende Kapitel behandelt gemeinsam die Fälle $\tilde{H} \cong A_8$ und $\tilde{H} \cong A_9$. Es wird sich zeigen, daß $H \cong A_8$ zu $G \cong L_6(2)$ oder $G \cong E_{32}L_5(2)$ und $\tilde{H} \cong A_9$ zu $G \cong T$ führt.

2. *Der Fall* $\tilde{H} \cong A_8$ *oder* A_9

Zunächst wird die Operation von $\tilde{H}$ auf $\bar{E}$ bestimmt. Sei dazu V ein regulärer orthogonaler Vektorraum der Dimension 8 über $GF(2)$. Das folgende Lemma bildet die Grundlage zu diesem Kapitel.

LEMMA 2.1. Sei L eine Untergruppe von $O(V)$ mit $L \cong A_8$. Dann liegt einer der folgenden vier Fälle vor:

(I) Der Raum V ist von maximalem Index. Auf V operiert L fixpunktfrei, reduzibel und vollständig reduzibel. $V = V_1 \oplus V_2$ ist eine L-invariante Zerlegung von V in isotrope Unterräume der Dimension 4, dabei sind die Darstellungen von L auf V_1 und V_2 kontragredient zueinander. Unter L wird V^* in drei Bahnen von isotropen Vektoren der Länge 15, 15, 105 und eine Bahn von anisotropen Vektoren der Länge 120 zerlegt.

(II) Der Raum V ist von maximalem Index. Auf V operiert L fixpunktfrei, reduzibel, aber nicht vollständig reduzibel. Dadurch ist die Operation von L auf V eindeutig festgelegt. Es gibt genau einen isotropen L-invarianten Unterraum V_1 der Dimension 4. Die Darstellungen von L auf V_1 und V/V_1 sind kontragredient zueinander. Unter L wird V^* in zwei Bahnen von isotropen Vektoren der Länge 15 und 120 und eine Bahn von anisotropen Vektoren der Länge 120 zerlegt.

(III) In V gibt es einen Unterraum V_1 der Dimension 2, der von L zentralisiert wird. Es ist $V = V_1 \oplus V_2$ eine L-invariante Zerlegung von V, dabei operiert L irreduzibel auf dem 6-dimensionalen orthogonalen Raum V_2 von maximalem Index. Je nach dem, ob V ein Raum von maximalem Index ist oder nicht, ist V_1 eine hyperbolische Ebene oder ein anisotroper Raum.

(IV) Ein Unterraum V_1 der Dimension 1 in V wird von L zentralisiert. Eine Kompositionsreihe von V als L-

Modul ist $0 \subset V_1 \subset V_2 \subset V$ mit $\dim V_2/V_1 = 6$. Dabei ist V unzerlegbar als L-Modul.

Beweis. Mit [3, S. 476] liegt einer der Fälle (I), (II), (III), oder die folgende Situation vor:

In V besitzt L einen nichttrivialen Fixvektor v_0, und V besitzt keine L-Bahn der Länge 15. Ist B eine Untergruppe von L, die isomorph zu einer Frobeniusgruppe der Ordnung 21 ist, so hat $C_V(B)$ die Dimension 2 und ist nicht L-invariant. Es sei $V_0 = C_V(B)$. Ist dann v ein Vektor aus $V_0 \setminus \langle v_0 \rangle$, so liegt v in einer L-Bahn der Länge 8. Der Raum V_0 ist regulär.

In dieser Situation existiert tatsächlich ein weiterer L-Modul V, dieser wurde in [3] vergessen. Wir wollen diesen unter (IV) aufgeführten Modul weiter beschreiben. Sei dazu $X = C_L(v)$. Da v genau 8 L-Konjugierte in V besitzt, ist $X \cong A_7$, ferner operiert X auf $V_0 = \langle v_0, v \rangle$. Der Raum V_0 ist regulär, also existiert eine X-invariante Zerlegung $V = V_0 \perp V_0^{\perp}$, wobei $V_0^{\perp}$ ein regulärer 6-dimensionaler orthogonaler Raum von maximalem Index ist. Ferner zerlegt X den Raum $V_0^{\perp}$ in zwei Bahnen von isotropen Vektoren der Länge 7 und 21 und in eine Bahn von anisotropen Vektoren der Länge 35. Damit können wir die Längen sämtlicher X-Bahnen in V bestimmen. Ist V von maximalem Index, so gibt es 7 Bahnen von isotropen Vektoren in V^* unter X mit den Längen 35, 35, 35, 21, 7, 1, 1 and 8 X-Bahnen von anisotropen Vektoren mit den Längen 21, 21, 21, 7, 7, 7, 35, 1. Ist hingegen V vom Index 3, so haben die 7 X-Bahnen von isotropen Vektoren die Längen 35, 21, 21, 21, 7, 7, 7, und die 8 X-Bahnen von anisotropen Vektoren haben die Längen 35, 35, 35, 21, 7, 1, 1, 1.

Sei W der eindeutig bestimmte irreduzible 8-dimensionale Permutationsmodul der A_9. Eine Untergruppe der A_9, die isomorph zu A_8 ist, operiert dann auf W wie im Fall (IV), das liefert die Existenz des vierten Moduls.

Die Operation von $\tilde{H}$ auf $\bar{E}$ ist damit für $\tilde{H} \cong A_8$ geklärt. Sei nun $\tilde{H} \cong A_9$. Eine A_9 besitzt nur eine Klasse von Untergruppen isomorph zu A_8. Mit Hilfe von Lemma 2.1 läßt sich dann die Operation von $\tilde{H}$ auf $\bar{E}$ festlegen.

Lemma 2.2. Es sei $\tilde{H} \cong A_9$ und U eine Untergruppe von H mit $\tilde{U} \cong A_8$. Dann operiert U gemäß (II) aus Lemma 2.1 auf $\bar{E}$.

Beweis. Wir nehmen an, daß $\tilde{U}$ gemäß (I), (III) oder (IV) auf $\bar{E}$ operiert.

Fall 1. $\tilde{U}$ operiere gemäß (I).

Da die Gruppen A_8 und $L_4(2)$ isomorph sind, kann $\tilde{H}$ nicht mehr reduzibel auf $\bar{E}$ operieren. Weiter besitzt eine A_9 keine Untergruppen vom Index 30, also sind alle isotropen Vektoren aus $\bar{E}$, das sind alle $\bar{e} \in \bar{E}^*$ mit $e^2 = 1$, unter $\tilde{H}$ konjugiert.

Sei $\bar{E} = \bar{E}_1\bar{E}_2$ mit $\bar{E}_1 \cap \bar{E}_2 = 1$ und $\bar{E}_1 \cong \bar{E}_2 \cong E_{16}$ eine $\tilde{U}$-invariante Zerlegung. Sei weiter S eine Sylow 2-Untergruppe von U. Operiert $L_4(2)$ in natürlicher Weise auf einem 4-dimensionalen Vektorraum über $GF(2)$, so zentralisiert eine Sylow 2-Untergruppe der $L_4(2)$ genau einen von null verschiedenen Vektor. Somit gilt $C_{\bar{E}_i}(\tilde{S}) = \langle \bar{e}_i \rangle$ mit Involutionen e_i, $i = 1{,}2$. Es folgt $Z(\tilde{S}) = \langle \bar{e}_1, \bar{e}_2 \rangle$. Weiter gilt $\bar{e}_1 \sim \bar{e}_2$ unter $\bar{H}$. Eine Sylow 2-Untergruppe der A_8 bzw. A_9 besitzt genau eine elementar-abelsche Untergruppe der Ordnung 16, deren Normalisator in A_9 genommen den Normalisator in A_8 genommen nicht übersteigt. Wir setzen $\bar{N} = N_{\bar{H}}(\bar{S})$. Nach einem Satz von Burnside kontrolliert $\bar{N}$ die Fusion in $Z(\tilde{S})$. Es gilt $\tilde{N} = N_{\tilde{H}}(\tilde{S}) \leq N_{\tilde{H}}(J(\tilde{S})) = N_{\tilde{U}}(J(\tilde{S}))$, also folgt $\bar{N} \leq \bar{U}$. Man erhält den Widerspruch $\bar{e}_1 \sim \bar{e}_2$ unter $\bar{U}$.

Fall 2. $\tilde{U}$ operiere gemäß (III).

Sei $\bar{E} = \bar{E}_1\bar{E}_2$ mit $\bar{E}_1 \cap \bar{E}_2 = 1, |\bar{E}_1| = 2^6$ und $|\bar{E}_2| = 2^2$ eine $\tilde{U}$-invariante Zerlegung. Wir wählen ein $\tilde{h} \in \tilde{H} \setminus \tilde{U}$ und setzen $\tilde{U}_1 = \tilde{U}^{\tilde{h}}$. Sei weiter $\bar{E} = \bar{E}'_1\bar{E}'_2$ mit $\bar{E}'_1 \cap \bar{E}'_2 = 1$, $|\bar{E}'_1| = 2^6$ und $|\bar{E}'_2| = 2^2$ die entsprechende $\tilde{U}_1$-invariante Zerlegung von $\bar{E}$. Dabei wird nach Lemma 2.1 $\bar{E}_2$ von $\tilde{U}$ und $\bar{E}'_2$ von $\tilde{U}_1$ zentralisiert. In $\bar{E}$ gibt es Untergruppen $\bar{F}_2$ und $\bar{F}'_2$ mit $\bar{F}_2 \leq \bar{E}_2$, $\bar{F}'_2 \leq \bar{E}'_2$ und $\bar{E}_1\bar{E}'_1 = \bar{E}_1\bar{F}_2 = \bar{E}'_1\bar{F}'_2$. Da $\tilde{U}$ auf $\bar{E}_1\bar{F}_2$ und $\tilde{U}_1$ auf $\bar{E}'_1\bar{F}'_2$ operiert, operiert auch $\tilde{H} = \langle U, \tilde{U}_1 \rangle$ auf $\bar{E}_1\bar{E}'_1$. Eine A_9 besitzt keine lineare 7-dimensionale $GF(2)$-Darstellung, somit ist wegen $\bar{E}_1 < \bar{E}_1\bar{E}'_1$ bereits $\bar{E} = \bar{E}_1\bar{E}'_1$. Folglich hat die Gruppe $\bar{E}_1 \cap \bar{E}'_1$ die Ordnung 2^4. Da aber $\tilde{U} \cap \tilde{U}_1$ isomorph zu A_7 ist und auf $\bar{E}_1 \cap \bar{E}'_1$ operiert, muß $\bar{E}_1 \cap \bar{E}'_1$ isotrop der Ordnung 16 sein. Das ist aber nicht möglich, denn $\bar{E}_1$ war ein orthogonaler Vektorraum vom Index 3. Damit ist auch Fall 2 zum Widerspruch geführt.

Fall 3. $\tilde{U}$ operiere gemäß (IV).

Nach Lemma 2.1 gibt es in $\bar{E}$ einen isotropen Vektor $\bar{e}$, der von $\bar{U}$ zentralisiert wird. Demnach gibt es in $\bar{E}$ eine $\bar{H}$-Bahn der Länge 9, denn A_9 ist nicht in $L_7(2)$ als Untergruppe enthalten, operiert also irreduzibel auf $\bar{E}$. Die Bahn der Länge 9 erzeugt folglich $\bar{E}$ als

Vektorraum. Somit ist $\bar{E}$ der eindeutig bestimmte irreduzible 8-dimensionale Permutationsmodul der A_9. Zur Feststellung der Bahnlängen sei dieser Modul kurz beschrieben. Sei dazu V ein 9-dimensionaler Vektorraum über $GF(2)$ mit Basis $\{v_1, \ldots, v_9\}$. Läßt man A_9 in natürlicher Weise auf den Indices der Basisvektoren operieren, so liefert $V_1 = \langle v_1 + v_2, v_1 + v_3, \ldots, v_1 + v_9\rangle$ den 8-dimensionalen irreduziblen Permutationsmodul. Die mehrfache Transitivität der A_9 liefert folgende Bahnzerlegung in diesem Modul: es gibt vier Bahnen mit Vertreter $v_1 + v_2$, $v_1 + v_2 + v_3 + v_4$, $v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_5 + v_6$ und $v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_5 + v_6 + v_7 + v_8$, die entsprechenden Bahnlängen sind 36, 126, 84 und 9, schließlich sind die entsprechenden Zentralisatoren in A_9 isomorph zu Σ_7, $(A_4 \times A_5)Z_2$, $(A_6 \times Z_3)Z_2$ und A_8. Insbesondere ist dieser Modul orthogonal von maximalem Index.

Es gibt also in $\bar{E}$ zwei Bahnen von isotropen Vektoren unter $\bar{H}$, diese haben die Längen 9 und 126. Wir wählen nun Involutionen e_1 und e_2 aus E als Vertreter der entsprechenden Bahnen. Es soll gezeigt werden, daß z keine Konjugierten in $E \setminus \langle z\rangle$ unter G besitzt. Sei dazu e eine Involution aus $E \setminus \langle z\rangle$ mit $z \sim e$.

Zunächst wird die Abschätzung $|O_2(C_H(e))/C_E(e)| \geq 2^3$ bewiesen. Bekanntlich gilt $N_G(\langle z, e\rangle)/C_H(e) \cong \Sigma_3$ (siehe etwa [16, Lemma 2.5]). Ist also S eine Sylow 2-Untergruppe von $C_H(e)$, so kann man eine Sylow 2-Untergruppe S_0 in $N_G(\langle z, e\rangle)$ finden mit $S < S_0 \not< H$. Wir wählen ein Element x aus $S_0 \setminus S$ und setzen $F = C_E(e)^x \cap C_E(e)$. Dann wird F von x normalisiert, also liegt $\langle z\rangle$ nicht charakteristisch in F. Somit ist F elementar-abelsch, und es gilt $|F| \leq 2^5$. Da $O_2(C_H(e))$ von x normalisiert wird, gilt $O_2(C_H(e))/C_E(e) \geq C_E(e)^x C_E(e)/C_E(e) \cong C_E(e)/F$. Aber $C_E(e)/F$ ist wegen $|F| \leq 2^5$ eine Gruppe der Ordnung $\geq 2^3$, das liefert die Behauptung.

Es sei nun $e \underset{\tilde{H}}{\sim} e_1$ angenommen. Wegen $C_H(e_1)/C_E(e_1) \cong A_8$ gilt $O_2(C_H(e_1))/C_E(e_1) = 1$, das ist aber wie eben gezeigt nicht möglich. Also muß $e \underset{\tilde{H}}{\sim} e_2$ gelten. Die Gruppe $C_H(e_2)/C_E(e_2)$ ist isomorph zu $(A_4 \times A_5)Z_2$. Somit erhält man auch hier einen Widerspruch, denn $O_2(C_H(e_2))/C_E(e_2)$ hat die Ordnung 4.

Wir haben gezeigt, daß z keine G-Konjugierten in $E \setminus \langle z\rangle$ besitzt. Mit Satz 1.3 ist das jedoch ein Widerspruch. Somit führt auch Operation (IV) im Fall $\tilde{H} \cong A_9$ zu keiner fusionseinfachen Gruppe G, und das Lemma ist bewiesen.

Damit ist auch für den Fall $\tilde{H} \cong A_9$ die Operation von $\tilde{H}$ auf $\bar{E}$ bestimmt. Sei nun wieder $\tilde{H} \cong A_8$ oder A_9 und U eine

Untergruppe von H mit $\tilde{U} \cong A_8$. Zunächst bestimmen wir G für den Fall, in dem $\tilde{U}$ gemäß (I) auf $\bar{E}$ operiert.

SATZ 2.3. Operiert $\tilde{U}$ gemäß (I) auf $\bar{E}$, so ist G isomorph zu $L_6(2)$ oder zur zerfallenden treuen Erweiterung $E_{32}L_5(2)$.

Beweis. Der Beweis des Satzes wird über eine Reihe von Hilfssätzen geführt. Nach Lemma 2.2 ist $H = U$, also $\tilde{H} = A_8$. Das nächste Lemma legt die Struktur von H weiter fest.

LEMMA 2.4. Die Gruppe $\bar{H}$ zerfällt über $\bar{E}$.

Beweis. Nach Lemma 2.1 besitzt E Untergruppen E_1, E_2 mit $E = E_1E_2$, $E_1 \cap E_2 = \langle z \rangle$, $E_1 \cong E_2 \cong E_{32}$ und $E_i \lhd H$ für $i = 1,2$. Weiter operiert $\tilde{H}$ fixpunktfrei auf $\bar{E}_i$, und E_i ist maximal abelsch in E. Es folgt $C_H(E_i) = E_i$ für $i = 1,2$, also ist H/E_i isomorph zu einer Untergruppe von $L_5(2)$. Weiter enthält die Gruppe H/E_i einen Kompositionsfaktor isomorph zu A_8 und hat die Ordnung $2^{10}.3^2.5.7$. Die Struktur einer $L_5(2)$ liefert, daß H/E_i eine zerfallende treue Erweiterung einer E_{16} durch A_8 ist. Also kann man Untergruppen H_i in H finden mit $H_i/E_i \cong A_8$ für $i = 1,2$. Es folgt

$$
\begin{aligned}
&H_i \cap E = E_i\,, i = 1,2,\\
&H_1 = H_1 \cap H = H_1 \cap H_2E_1 = (H_1 \cap H_2)E_1 \text{ und}\\
&(H_1 \cap H_2) \cap E_1 = H_1 \cap (H_2 \cap E) \cap E_1 = H_1 \cap (E_2 \cap E_1) = H_1 \cap \langle z \rangle\\
&= \langle z \rangle\,.
\end{aligned}
$$

Damit bekommen wir

$$
\begin{aligned}
&(H_1 \cap H_2/\langle z \rangle = (H_1 \cap H_2)/(H_1 \cap H_2 \cap E_1) \cong (H_1 \cap E_2)E_1/E_1 =\\
&= H_1/E_1 \cong A_8\,.
\end{aligned}
$$

Diese Rechnung zeigt, daß $\bar{H}_1 \cap \bar{H}_2$ ein Komplement von $\bar{E}$ in $\bar{H}$ ist.

LEMMA 2.5. Zerfällt H über E, so ist G isomorph zu $L_6(2)$ oder zur zerfallenden treuen Erweiterung $E_{32}L_5(2)$.

Beweis. Dies folgt mit Satz 1.4.

Das nächste Lemma schließt den Beweis von Satz 2.3 ab.

LEMMA 2.6. Die Gruppe H zerfällt über E.

Beweis. Wir nehmen an, daß H nicht über E zerfällt. Mit Lemma 2.4 besitzt H eine Untergruppe L, so daß $\bar{L}$ ein Komplement zu

$\bar{E}$ in $\bar{H}$ ist. Man erhält $H = LE$, $L \cap E = \langle z \rangle$ und $z \in L' \cap Z(L)$. Der Schurmultiplikator der A_8 hat die Ordnung 2 (siehe etwa [10, Table 1]), somit ist L isomorph zu $\hat{A}_8$.

Sei weiter nach Lemma 2.1 wieder $E = E_1 E_2$ mit $E_1 \cap E_2 = \langle z \rangle$, $E_i \cong E_{32}$ und $E_i \lhd H$ für $i = 1{,}2$. Die Gruppe $\bar{L}$ ist isomorph zu $L_4(2)$ und operiert nichttrivial in natürlicher Weise auf $E_i/\langle z \rangle$, ferner wird $\langle z \rangle$ von $\bar{L}$ zentralisiert. Nach [3, Lemma 1.2] operiert dann L sogar vollständig reduzibel auf E_i für $i = 1{,}2$. Es gibt also L-invariante Untergruppen F_1 und F_2 in E mit $E = F_1 F_2 \langle z \rangle$ und $F_1 \cong F_2 \cong E_{16}$.

Wir wählen nun Involutionen e_i aus E mit folgenden Eigenschaften:

(i) $E = \langle e_1, e_8 \rangle * \langle e_2, e_7 \rangle * \langle e_3, e_6 \rangle * \langle e_4, e_5 \rangle$,

(ii) $[e_1, e_8] = [e_2, e_7] = [e_3, e_6] = [e_4, e_5] = z$.

Eine weitere Bedingung (iii) kann erst definiert werden, nachdem wir $\bar{L}$ auf $\bar{E}$ dargestellt haben. Die Untergruppen $\langle z, e_1, e_3, e_5, e_7 \rangle$ und $\langle z, e_2, e_4, e_6, e_8 \rangle$ von E sind elementar-abelsch. Bezüglich der Basis $\mathfrak{L} = \{ \bar{e}_1, \bar{e}_3, \bar{e}_5, \bar{e}_7, \bar{e}_8, \bar{e}_6, \bar{e}_4, \bar{e}_2 \}$ hat $\bar{L}$ dann eine Darstellung (siehe [3, S. 468-470])

$$\bar{L} = \{ (^{X}(_{X^T})^{-1}) \mid X \in L_4(2) \}, \text{ dabei sei } X^T \text{ die}$$

transponierte Matrix zur 4×4–Matrix X. Weiter setzen wir für $X \in L_4(2)$

$$\varphi(X) = (^{X}(_{X^T})^{-1}).$$

L operiert also auf $E_1 = \langle z, e_1, e_3, e_5, e_7 \rangle$ und $E_2 = \langle z, e_2, e_4, e_6, e_8 \rangle$. Es sei F_i der irreduzible 4-dimensionale L-Untermodul von E_i für $i = 1{,}2$. Man wähle nun die e_j, $j = 1, \dots, 8$, so, daß die Bedingung

(iii) $F_1 = \langle e_1, e_3, e_5, e_7 \rangle$, $F_2 = \langle e_2, e_4, e_6, e_8 \rangle$

gilt.

Es bezeichne nun E_{ij} die 4×4-Matrix über $GF(2)$, die in der i-ten Zeile an der j-ten Stelle eine 1 hat, und deren übrige Einträge alle null sind. Weiter bezeichne I die Einheitsmatrix aus $L_4(2)$.

Wir definieren nun Erzeugende einer Sylow 2-Untergruppe von $\bar{L}$ durch

$$\bar{t}_1 = \varphi(I + E_{14}), \quad \bar{t}_2 = \varphi(I + E_{12}), \quad \bar{t}_3 = \varphi(I + E_{13}),$$
$$\bar{t}_4 = \varphi(I + E_{34}), \quad \bar{t}_5 = \varphi(I + E_{24}), \quad \bar{t}_6 = \varphi(I + E_{23}).$$

Es sei $\bar{T}_0 = \langle \bar{t}_1, \bar{t}_2, \bar{t}_3, \bar{t}_4, \bar{t}_5, \bar{t}_6 \rangle$. Dann ist $\bar{T}_0$ eine Sylow 2-Untergruppe von $\bar{L}$ und genügt den Relationen $(\bar{R})$

$$(\bar{\mathrm{R}}) \qquad \begin{aligned} &\bar{t}_i^2 = 1, \quad i = 1, \ldots, 6, \\ &[\bar{t}_2, \bar{t}_5] = [\bar{t}_3, \bar{t}_4] = \bar{t}_1, \\ &[\bar{t}_2, \bar{t}_6] = \bar{t}_3, \ [\bar{t}_4, \bar{t}_6) = \bar{t}_5, \end{aligned}$$

alle übrigen Kommutatoren sind trivial. Es ist $Z(\bar{T}_0) = \langle \bar{t}_1 \rangle$, $\bar{T}_0' = \langle \bar{t}_1, \bar{t}_3, \bar{t}_5 \rangle$ und $J(\bar{T}_0) = \langle \bar{t}_1, \bar{t}_3, \bar{t}_5, \bar{t}_6 \rangle$. Um die entsprechenden Relationen in L für geeignete Urbilder der $\bar{t}_i$ zu erhalten, sei vermerkt, daß Urbilder von zentralen Involutionen einer A_8 in $\hat{A}_8$ ebenfalls Involutionen sind, während nichtzentrale Involutionen einer A_8 in $\hat{A}_8$ Urbilder der Ordnung 4 besitzen. Damit erhält man

$$\begin{aligned} &t_i^2 = 1, \ i = 1, \ldots, 6, \\ &[t_1, t_6] = [t_2, t_4] = [t_3, t_5] = z, \\ &[t_2, t_5] \in t_1 \langle z \rangle, \ [t_2, t_6] \in t_3 \langle z \rangle, \\ &[t_3, t_4] \in t_1 \langle z \rangle, \ [t_4, t_6] \in t_5 \langle z \rangle, \end{aligned}$$

alle übrigen Kommutatoren sind trivial.

Wir setzen $S = T_0 E$, dann ist S eine Sylow 2-Untergruppe von H. Als nächstes soll gezeigt werden, daß die Involution z keine G-Konjugierten in $E \setminus \langle z \rangle$ enthält.

Nach Lemma 2.1 besitzt $E \setminus \langle z \rangle$ genau drei Klassen von Involutionen mit Vertretern in E_1, E_2 und in $E \setminus (E_1 \cup E_2)$. Wir geben nun die Operation von T_0 auf E an. Diese ist abzulesen an der Matrix-Darstellung von $\bar{T}_0$ auf $\bar{E}$ und an der Bedingung (iii). Es gilt

$$\begin{aligned} &[e_1, t_1] = [e_3, t_5] = [e_5, t_4] = e_7, \\ &[e_1, t_3] = [e_3, t_6] = e_5, [e_1, t_2] = e_3, \\ &[e_2, t_1] = [e_4, t_3] = [e_6, t_2] = e_8, \\ &[e_2, t_5] = [e_4, t_6] = e_6, [e_2, t_4] = e_4, \end{aligned}$$

alle übrigen Kommutatoren sind trivial.

Die Involution e_7 ist extremal in E_1 bezüglich S. Wir setzen $C = C_S(e_7)$. Mit den angegebenen Relationen erhält man $C = \langle e_4, e_6, e_8\rangle E_1 T_0$. Es ist $Z(C) = \langle z, e_7\rangle$, und $C' = \langle e_3, e_5, e_6, e_7, e_8, t_1, t_3, t_5\rangle$ und $|S : C| = 2$.

Es sei $x = e_3^{\alpha_1} e_5^{\alpha_2} e_6^{\alpha_3} e_7^{\alpha_4} e_8^{\alpha_5} t_1^{\alpha_6} t_3^{\alpha_7} t_5^{\alpha_8} z^{\alpha_9}$ ein beliebiges Element aus C' mit $\alpha_1, \dots, \alpha_9 \in \{0, 1\}$. Dann ist $x^2 = e_7^{\alpha_1 \alpha_8} z^{\alpha_1\alpha_3 + \alpha_7\alpha_8}$. Um eine der beiden Gleichungen $x^2 = e_7 z^k$, $k = 0, 1$, zu erfüllen, muß in der Darstellung von x also $\alpha_1 \alpha_8 = 1$ gelten und somit $\alpha_1 = \alpha_8 = 1$, während die übrigen Parameter frei wählbar sind. Zusammen besitzen diese beiden Gleichungen demnach 2^7 Lösungen in C'. Da aber e_7 und $e_7 z$ unter $N_G(C)$ konjugiert sind, haben e_7 und $e_7 z$ gleich viele Quadratwurzeln in C'. Somit haben die Gleichungen $x^2 = e_7 z^k$, $k = 0{,}1$, genau je 2^6 Lösungen in C'. Andererseits besitzt die Gleichung $x^2 = z$ in C' die 2^7 Lösungen $t_3 t_5 \langle e_5, e_6, e_7, e_8, t_1, z\rangle \cup e_3 e_6 \langle e_5, e_7, e_8, t_1, t_3, z\rangle$. Also kann z nicht zu e_7 oder $e_7 z$ unter $N_G(C)$ konjugiert sein. Mit $\langle z, e_7\rangle = Z(C)$ folgt $\langle z\rangle \lhd N_G(C)$, somit ist C eine Sylow 2-Untergruppe von $C_G(e_7)$. Also kann die Involution z nicht zu e_7 konjugiert sein. Da die Gruppen E_1 und E_2 in H symmetrisch liegen, hat z keine G-Konjugierten in $E_1 \cup E_2$.

Es ist also nur noch zu zeigen, daß z keine Konjugierten in $E \setminus (E_1 \cup E_2)$ besitzt. Die Involution $e_7 e_8$ ist extremal in dieser Menge bezüglich S. Wir setzen $C = C_S(e_7 e_8) = \langle e_1 e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8\rangle T_0$. Es ist $Z(C) = \langle z, e_7 e_8\rangle$, und C ist normal vom Index 2 in S. Man berechnet $C' = \langle e_3, e_5, e_7, e_4, e_6, e_8, t_1, t_3, t_5\rangle$. Wieder ist $e_7 e_8$ konjugiert unter $N_G(C)$ zu $e_7 e_8 z$.

Sei $x = e_3^{\alpha_1} e_4^{\alpha_2} e_5^{\alpha_3} e_6^{\alpha_4} e_7^{\alpha_5} e_8^{\alpha_6} t_1^{\alpha_7} t_3^{\alpha_8} t_5^{\alpha_9} z^{\alpha_{10}}$, $\alpha_1, \dots, \alpha_{10} \in \{0, 1\}$, ein beliebiges Element aus C'. Mit den angegebenen Relationen berechnet man $x^2 = e_7^{\alpha_1\alpha_9} e_8^{\alpha_2\alpha_8} z^{\alpha_8\alpha_9 + \alpha_1\alpha_4 + \alpha_2\alpha_3}$. Um eine der Gleichungen $x^2 = e_7 e_8 z^k$, $k = 0{,}1$, zu erfüllen, muß demnach $\alpha_1 = \alpha_9 = \alpha_2 = \alpha_8 = 1$ gelten, während die übrigen Parameter beliebig sein können. Also besitzt jede der beiden Gleichungen genau je 2^5 Lösungen in C'. Andererseits besitzt aber die Gleichung $x^2 = z$ in C' die 3.2^5 Lösungen $\{e_4 e_5, e_3 e_6, e_3 e_4 e_5, e_6 e_4 e_5, e_4 e_3 e_6, e_5 e_3 e_6\} \langle z, e_7, e_8, t_1\rangle$. Wieder folgt $\langle z\rangle \lhd N_G(C)$. Somit kann die Involution z unter G auch nicht zu $e_7 e_8$ konjugiert sein.

Wir haben gezeigt, daß z keine Konjugierten in $E \setminus \langle z\rangle$ unter G besitzt. Das ist aber ein Widerspruch zu Satz 1.3. Folglich zerfällt H über E, und der Beweis von Satz 2.3 ist vollständig.

Wir behalten die Bedeutung von H und U bei und untersuchen nun den Fall, in dem $\tilde{U}$ gemäß (II) auf $\bar{E}$ operiert. Durch eine Reihe von Hilfssätzen soll der folgende Satz bewiesen werden.

Satz 2.7. Operiert $\tilde{U}$ gemäß (II) auf $\bar{E}$, so ist G isomorph zu der von Thompson entdeckten einfachen Gruppe T oder zur nichtzerfallenden Erweiterung einer E_{32} durch $L_5(2)$.

Zunächst stellen wir fest:

Lemma 2.8. Die Gruppe $\tilde{U}$ zerfällt nicht über $\bar{E}$.

Beweis. Dempwolff gibt in [3, S. 469] die genaue Operation von $\tilde{U}$ auf $\bar{E}$ an. Wie in Lemma 2.6 wählen wir Involutionen e_i aus E, die den Bedingungen (i) und (ii) genügen. Bezüglich der Basis $\mathfrak{L} = \{\bar{e}_1, \bar{e}_3, \bar{e}_5, \bar{e}_7, \bar{e}_8, \bar{e}_6, \bar{e}_4, \bar{e}_2\}$ hat dann eine Sylow 2-Untergruppe $\tilde{T}_0 = \langle \tilde{t}_1, \tilde{t}_2, \tilde{t}_3, \tilde{t}_4, \tilde{t}_5, \tilde{t}_6 \rangle$ von $\tilde{U}$ auf $\bar{E}$ die Gestalt

$$\tilde{t}_1 \longleftrightarrow \begin{bmatrix} 1&0&0&1&&&& \\ 0&1&0&0&&&& \\ 0&0&1&0&&&& \\ 0&0&0&1&&&& \\ 0&0&0&1&1&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0&1&0&0 \\ 0&1&0&0&0&0&1&0 \\ 1&0&0&1&1&0&0&1 \end{bmatrix}, \quad \tilde{t}_2 \longleftrightarrow \begin{bmatrix} 1&1&0&0&&&& \\ 0&1&0&0&&&& \\ 0&0&1&0&&&& \\ 0&0&0&1&&&& \\ 0&1&0&0&1&0&0&0 \\ 1&1&1&1&1&1&0&0 \\ 0&1&0&1&0&0&1&0 \\ 0&1&1&0&0&0&0&1 \end{bmatrix},$$

$$\tilde{t}_3 \longleftrightarrow \begin{bmatrix} 1&0&1&0&&&& \\ 0&1&0&0&&&& \\ 0&0&1&0&&&& \\ 0&0&0&1&&&& \\ 0&0&1&0&1&0&0&0 \\ 0&0&1&1&0&1&0&0 \\ 1&1&1&0&1&0&1&0 \\ 0&1&0&0&0&0&0&1 \end{bmatrix}, \quad \tilde{t}_4 \longleftrightarrow \begin{bmatrix} 1&0&0&0&&&& \\ 0&1&0&0&&&& \\ 0&0&1&1&&&& \\ 0&0&0&1&&&& \\ 0&1&0&1&1&0&0&0 \\ 1&0&0&1&0&1&0&0 \\ 0&0&0&1&0&0&1&0 \\ 1&1&1&1&0&0&1&1 \end{bmatrix},$$

$$\tilde{t}_5 \longleftrightarrow \begin{bmatrix} 1&0&0&0&&&& \\ 0&1&0&1&&&& \\ 0&0&1&0&&&& \\ 0&0&0&1&&&& \\ 0&0&1&1&1&0&0&0 \\ 0&0&0&1&0&1&0&0 \\ 1&0&0&0&0&0&1&0 \\ 1&1&0&1&0&1&0&1 \end{bmatrix}, \quad \tilde{t}_6 \longleftrightarrow \begin{bmatrix} 1&0&0&0&&&& \\ 0&1&1&0&&&& \\ 0&0&1&0&&&& \\ 0&0&0&1&&&& \\ 0&0&0&1&1&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0&1&0&0 \\ 0&1&1&0&0&1&1&0 \\ 1&0&0&0&0&0&0&1 \end{bmatrix},$$

dabei sind die unbesetzten Stellen in den Matrizen durch Nullen zu ergänzen. Die Involutionen $\bar{t}_i$ erfüllen die Relationen (R) aus Lemma 2.6. Ferner ist $E_1 = \langle z, e_1, e_3, e_5, e_7 \rangle$ der Normalteiler der Ordnung 2^5 in U.

Wir nehmen nun an, daß $\bar{U}$ über $\bar{E}$ zerfällt. Es sei also $U = LE$ mit $L \cap E \leq \langle z \rangle$ und $L \cong A_8$ oder $L \cong \hat{A}_8$.

Auf E_1 operiert L nach [3, Lemma 1.2] vollständig reduzibel. Wir wählen nun Urbilder e_i der $\bar{e}_i$ so, daß $\langle e_1, e_3, e_5, e_7 \rangle$ von L normalisiert wird. Weiter können wir nach Annahme Urbilder $\bar{t}_i$ der $\bar{t}_i$ finden, so daß $\bar{T}_0 = \langle \bar{t}_1, \bar{t}_2, \bar{t}_3, \bar{t}_6, \bar{t}_5, \bar{t}_6 \rangle$ eine Sylow 2-Untergruppe von $\bar{L}$ ist. Da $\bar{t}_1$ eine zentrale Involution aus $\bar{L}$ ist, kann man eine Involution t_1 als Urbild von $\bar{t}_1$ in L finden.

Das Element e_1e_8 der Ordnung 4 aus E wird von t_1 invertiert, denn aus der Darstellung von $\bar{t}_1$ auf $\bar{E}$ wissen wir einerseits, daß t_1 mit e_7 vertauschbar ist, andererseits gilt $t_1^{e_2} = t_1e_1e_8e_7z^k$ für $k = 0$ oder $k = 1$, somit ist $t_1e_1e_8$ eine Involution, und es gilt $(e_1e_8)^{t_1} = e_1e_8z$.

Nach Lemma 2.1 sind alle 240 Elemente der Ordnung 4 aus E konjugiert unter U, also hat $C_{\bar{L}}(\bar{e}_1\bar{e}_8)$ die Ordnung $2^3.3.7$. Die Struktur von $C_{\bar{L}}(\bar{e}_1\bar{e}_8)$ ist in [3, S. 477] angegeben, es gilt $C_{\bar{L}}(\bar{e}_1\bar{e}_8) \cong E_8F_{21}$, damit ist die treue Erweiterung einer elementar-abelschen Gruppe der Ordnung 8 durch eine Frobeniusgruppe der Ordnung 21 gemeint. Da aber e_1e_8 von t_1 invertiert wird, besitzt die Gruppe $C_{\bar{L}}(\bar{e}_1\bar{e}_8)$ den Normalteiler $\overline{C_L(e_1e_8)}$ vom Index 2. Das ist aber nicht möglich, denn die Gruppe E_8F_{21} besitzt keinen Normalteiler vom Index 2. Dieser Widerspruch zeigt, daß $\bar{U}$ und damit auch $\bar{H}$ nicht über $\bar{E}$ zerfallen kann.

Es sei nun also $\bar{U}$ eine nichtzerfallende Erweiterung von $\bar{E}$ durch A_8 mit Operation (II). Im folgenden wird gezeigt, daß $\bar{U}$ eindeutig bestimmt ist.

Lemma 2.9. Die Erweiterung von $\bar{E}$ durch $\tilde{U}$ ist eindeutig bestimmt.

Beweis. Wir betrachten den Normalteiler E_1 von U. Die Gruppe E_1 ist eine selbstzentralisierende Untergruppe in U. Also ist U/E_1 isomorph zu einer Untergruppe von $L_5(2)$. Somit ist U/E_1 isomorph zur zerfallenden treuen Erweiterung einer E_{16} durch eine A_8. Nach Lemma 2.8 zerfällt $\bar{U}$ nicht über $\bar{E}$, folglich kann $\bar{U}$ nicht über $\bar{E}_1$ zerfallen, da $\bar{U}/\bar{E}_1$ eine Untergruppe isomorph zu A_8 enthält.

Sei $\bar{U}/\bar{E}_1 = \bar{L}/\bar{E}_1 \cdot \bar{E}/\bar{E}_1$ mit $\bar{L}/\bar{E}_1 \cong A_8$ und $\bar{L} \cap \bar{E} = \bar{E}_1$. Die

Gruppe $\bar{L}$ zerfällt nicht über $\bar{E}_1$ und ist somit nach [2, Korollar 3] eine eindeutig bestimmte nichtzerfallende Erweiterung. Die Operation von $\bar{L}$ auf $\bar{E}$ ist bekannt, also ist $\bar{U} = \bar{L}\bar{E}$ mit $\bar{L} \cap \bar{E} = \bar{E}_1$ eine eindeutig bestimmte Gruppe.

Es sei D die von Dempwolff in [4] beschriebene eindeutig bestimmte treue nichtzerfallende Erweiterung einer E_{32} durch $L_5(2)$ mit Normalteiler $V \cong E_{32}$. Die Gruppe $\bar{U}$ ist eingebettet in D. Sei nämlich v eine Involution aus V. Dann ist (siehe [4, S. 361]) $C_D(v)$ isomorph zu einer treuen Erweiterung einer extraspeziellen 2-Gruppe der Weite 4 vom Typ $(+)$ durch eine A_8, die reduzibel, aber nicht vollständig reduzibel, das heißt die gemäß Operation (II) auf der Gruppe $O_2(C_D(v))/\langle v\rangle$ operiert. Mit Lemma 2.8 zerfällt $C_D(v)/\langle v\rangle$ nicht über $O_2(C_D(v))/\langle v\rangle$, und somit ist $\bar{U}$ isomorph zu $C_D(v)/\langle v\rangle$.

Dempwolff bestimmt in [4] die Gruppentafel von D. Diese sei hier kurz beschrieben.

Es sei $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ eine Basis von V als Vektorraum über $GF(2)$. Es seien τ_{ik} Transvektionen aus $D\setminus V$ derart, daß

(i) $v_l^{\tau_{ik}} = v_l v_k^{\delta_{il}}$ für $i \neq k$ und $1 \leq i, k, l \leq 5$

gilt. Dann ist $D = \langle \tau_{ik} | 1 \leq i, k \leq 5, i \neq k\rangle V$. Man kann nun Involutionen t_{ij} aus $\tau_{ij} V$ wählen, so daß

(ii) $[t_{ij}, t_{ik}] = v_j v_k$ und $[t_{ji}, t_{ki}] = 1$ für $k \neq i \neq j$
und $1 \leq i, j, k \leq 5$ gilt.

Weiter gibt es Parameter $\alpha(ij, kl)$, $\beta(ij, kl)$ und $\gamma(ijl)$ aus $GF(2)$ mit

(iii) $[t_{ij}, t_{kl}] = v_s v_j^{\alpha(ij,kl)} v_l^{\beta(ij,kl)}$ und
$\{s\} = \{1, \ldots, 5\} \setminus \{i, j, k, l\}$ und

(iv) $[t_{ij}, t_{jl}] = v_i v_j v_r^{\alpha(ij,rl)} v_s^{\beta(ij,sl)} v_l^{\gamma(ijl)} t_{il}$ und
$\{r, s\} = \{1, \ldots, 5\} \setminus \{i, j, l\}$.

Ferner sind in [4] Bestimmungsgleichungen für diese Parameter angegeben. Die beiden folgenden Tabellen geben die berechneten $\alpha(ij, kl)$, $\beta(ij, kl)$ und $\gamma(ijl)$ wieder. Zur Bestimmung der Gruppentafel von $\bar{U}$ sind allerdings nur die $\alpha(ij, kl)$ und $\beta(ij, kl)$ nötig. Wir setzen zur Abkürzung $\alpha = \alpha(ij, kl)$ und $\beta = \beta(ij, kl)$.

TABELLE 1 : Die $\alpha(ij,kl)$ und $\beta(ij,kl)$.

ij,kl	α	β	ij,kl	α	β	ij,kl	α	β	ij,kl	α	β
12,34	1	0	23,14	0	1	34,12	0	1	45,12	1	1
12,35	1	1	23,15	0	0	34,15	1	0	45,13	1	0
12,43	1	0	23,41	1	0	34,21	0	1	45,21	1	1
12,45	1	1	23,45	0	1	34,25	1	0	45,23	1	0
12,53	1	0	23,51	1	0	34,51	0	0	45,31	1	1
12,54	1	1	23,54	0	1	34,52	0	1	45,32	1	0
13,24	1	0	24,13	0	1	35,12	1	1	51,23	0	1
13,25	1	1	24,15	1	0	35,14	1	0	51,24	0	0
13,42	1	0	24,31	1	0	35,21	1	1	51,32	0	1
13,45	0	1	24,35	0	1	35,24	1	0	51,34	0	0
13,52	1	0	24,51	0	0	35,41	0	0	51,42	0	1
13,54	0	1	24,53	0	1	35,42	0	1	51,43	0	0
14,23	1	0	25,13	1	1	41,23	0	1	52,13	0	1
14,25	0	1	25,14	1	0	41,25	0	0	52,14	0	0
14,32	1	0	25,31	0	0	41,32	0	1	52,31	0	1
14,35	0	1	25,34	0	1	41,35	0	0	52,34	1	0
14,52	0	0	25,41	0	0	41,52	1	0	52,41	0	1
14,53	0	1	25,43	0	1	41,53	1	1	52,43	1	0
15,23	0	0	31,24	0	1	42,13	0	1	53,12	0	1
15,24	0	1	31,25	0	0	42,15	0	0	53,14	1	0
15,32	0	0	31,42	1	0	42,31	0	1	53,21	0	1
15,34	0	1	31,45	1	1	42,35	1	0	53,24	1	0
15,42	0	0	31,52	1	0	42,51	1	0	53,41	1	1
15,43	0	1	31,54	1	1	42,53	0	1	53,42	1	0
21,34	1	0	32,14	0	1	43,12	0	1	54,12	1	1
21,35	1	1	32,15	0	0	43,15	1	0	54,13	1	0
21,43	1	0	32,41	1	0	43,21	0	1	54,21	1	1
21,45	1	1	32,45	0	1	43,25	1	0	54,23	1	0
21,53	1	0	32,51	1	0	43,51	0	0	54,31	1	1
21,54	1	1	32,54	0	1	43,52	0	1	54,32	1	0

Die Tabelle 2 gibt die $\gamma(ijl)$ an. Wir setzen zur Abkürzung $\gamma = \gamma(ijl)$.

Nun soll eine Sylow 2-Untergruppe von $\bar{U} = U/\langle z\rangle$ mit einer Sylow 2-Untergruppe von $C_D(v)/\langle v\rangle$ für eine Involution $v \in V$ identifiziert werden. Als v wählen wir die Involution v_5, die Entsprechung von z und v_5 soll durch $z \leftrightarrow v_5$ gekennzeichnet werden. Für ein Element x aus $C_D(v_5)$ bezeichne $\hat{x}$ die Nebenklasse $x\langle v_5\rangle$. Die

Gruppe $\bar{E}_1$ entspricht dann $V/\langle v_5\rangle$, wir setzen $\bar{e}_1 \leftrightarrow \hat{v}_4$, $\bar{e}_3 \leftrightarrow \hat{v}_3$, $\bar{e}_5 \leftrightarrow \hat{v}_2$ und $\bar{e}_7 \leftrightarrow \hat{v}_1$. Dann operieren die Transvektionen τ_{41}, τ_{43}, τ_{42}, τ_{21}, τ_{31}, und τ_{32} auf V wie $\bar{t}_1$, $\bar{t}_2$, $\bar{t}_3$, $\bar{t}_4$, $\bar{t}_5$ und $\bar{t}_6$ auf $\bar{E}_1$, außerdem erfüllen die τ_{ij} in dieser Reihenfolge die Relationen $(\hat{R})$ aus Lemma 2.6. Es sei also $\bar{t}_1 \leftrightarrow \hat{t}_{41}$, $\bar{t}_2 \leftrightarrow \hat{t}_{43}$, $\bar{t}_3 \leftrightarrow \hat{t}_{42}$, $\bar{t}_4 \leftrightarrow \hat{t}_{21}$, $\bar{t}_5 \leftrightarrow \hat{t}_{31}$ und $\bar{t}_6 \leftrightarrow \hat{t}_{32}$. Weiter ist $O_2(C_D(v_5)) = \langle t_{15}, t_{25}, t_{35}, t_{45}\rangle V$, das liefert die restlichen Entsprechungen $\bar{e}_8 \leftrightarrow \hat{t}_{45}$, $\bar{e}_6 \leftrightarrow \hat{t}_{35}$, $\bar{e}_4 \leftrightarrow \hat{t}_{25}$ und $\bar{e}_2 \leftrightarrow \hat{t}_{15}$.

TABELLA 2 : Die $\gamma(ijl)$.

ijl	γ	ijl	γ	ijl	γ	ijl	γ	ijl	γ
123	1	213	1	312	0	412	0	512	0
124	0	214	0	314	0	413	1	513	1
125	0	215	0	315	0	415	0	514	0
132	1	231	0	321	0	421	0	521	0
134	1	234	1	324	1	423	0	523	0
135	0	235	0	325	0	425	0	524	0
142	0	241	1	341	1	431	1	531	1
143	1	243	1	342	0	432	0	532	0
145	0	245	0	345	0	435	0	534	0
152	0	251	1	351	1	451	0	541	0
153	0	253	0	352	1	452	0	542	0
154	0	254	0	354	0	453	0	543	0

Mit diesen Entsprechungen, den Relationen (i), (ii), (iii) und (iv) und der Tabelle 1 erhält man das folgende Lemma.

LEMMA 2.10. In $\bar{U}$ gelten die folgenden Relationen:

$$[\bar{t}_1, \bar{t}_2] = \bar{e}_3\bar{e}_7, \ [\bar{t}_1, \bar{t}_3] = \bar{e}_5\bar{e}_7, \ [\bar{t}_1, \bar{t}_6] = \bar{e}_3\bar{e}_5,$$
$$[\bar{t}_2, \bar{t}_4] = \bar{e}_7, \ [\bar{t}_2, \bar{t}_5] = \bar{e}_1\bar{e}_3\bar{e}_7\bar{t}_1, \ [\bar{t}_2, \bar{t}_6] = \bar{e}_1\bar{e}_5\bar{t}_3,$$
$$[\bar{t}_3, \bar{t}_4] = \bar{e}_1\bar{e}_5\bar{t}_1, \ [\bar{t}_3, \bar{t}_5] = \bar{e}_7, [\bar{t}_4, \bar{t}_6] = \bar{e}_1\bar{e}_3\bar{e}_5\bar{t}_5,$$
$$[\bar{t}_5, \bar{t}_6] = \bar{e}_5\bar{e}_7, \ [\bar{t}_i, \bar{t}_j] = 1 \text{ sonst und } \bar{t}_i^2 = 1, i = 1, \dots, 6.$$

Die Operation der $\bar{t}_i$ auf $\bar{E}$ entnimmt man den angegebenen Matrizen. Nun ist eine Sylow 2-Untergruppe von $\bar{U}$ festgelegt. Im folgenden wird gezeigt, daß der Fall $U = H$, also $\tilde{H} \cong A_8$, zu $G \cong D$ führt, während der Fall $U < H$, also $\tilde{H} \cong A_9$, zu $G \cong T$ führt.

LEMMA 2.11. Sei $\tilde{H} \cong A_8$. Dann ist G isomorph zur nichtzerfallenden Erweiterung D einer E_{32} durch $L_5(2)$.

Beweis. Es sei also $H = U$.

Nach Lemma 2.1 gibt es in $E \setminus \langle z \rangle$ genau zwei Klassen von Involutionen unter H mit Vertreter e_7 und e_8. Es sei zunächst $z \sim e_7$ angenommen. Wir setzen $C = C_H(e_7)$.

Gezeigt wurde schon, daß $\bar{H}$ eine Untergruppe $\bar{L}$ besitzt, die isomorph zu einer nichtzerfallenden Erweiterung einer E_{16} durch A_8 ist. Weiter ist E_1 eine Untergruppe von L. Nach bekanntem Schluß operiert L/E_1 und damit auch L vollständig reduzibel auf E_1. Man wähle nun die Involutionen e_i, $i = 1, 3, 5, 7$, so, daß L auf $F = \langle e_1, e_3, e_5, e_7 \rangle$ operiert. Nach Konstruktion ist $\langle t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6 \rangle E_1$ eine Sylow 2-Untergruppe von L. Die $\bar{t}_i$ sind Involutionen. Ist also $L/F \cong A_8 \times Z_2$, so gilt $t_i^2 \in F \cap \langle z \rangle = 1$. Ist hingegen $L/F \cong \hat{A}_8$, so entspricht L genau der Gruppe $\langle t_{ij} | 1 \leq i, j \leq 4, i \neq j \rangle V$ in $C_D(v_5)$, und die t_i können auch hier entsprechend den t_{ij} als Involutionen gewählt werden.

Die Involution $\bar{e}_7$ besitzt genau 15 Konjugierte in $\bar{E}$ unter $\bar{H}$. Die Struktur einer A_8 liefert, daß CE/E isomorph zur zerfallenden. Erweiterung $E_8 L_2(7)$ ist. Wir setzen $Y = O_2(C)$ und $B = C_E(e_7)$ Dann ist $Y/B \cong E_8$ und $C/Y \cong L_2(7)$. Die Gruppe Y/E_1 entspricht in Dempwolffs Notation der Gruppe $O_2(C_D(\langle v_1, v_5 \rangle))/V$. In D berechnet man $O_2(C_D(\langle v_1, v_5 \rangle)) = \langle t_{21}, t_{31}, t_{41}, t_{25}, t_{35}, t_{45} \rangle V$. Es folgt $Y = \langle t_1, t_4, t_5 \rangle B$.

Wir setzen nun $B_0 = O_2(C_G(e_7)) \cap H$. Dann ist B_0 eine Untergruppe von $O_2(C)$ und liegt normal in C, also auch in Y. Nach Annahme gilt $z \sim e_7$. Wegen $N_G(\langle z, e_7 \rangle)/C_G(\langle z, e_7 \rangle) \cong \Sigma_3$ (siehe etwa [16, Lemma 2.5]) gibt es sogar ein $g \in G$ mit $z^g = e_7$ und $g^2 \in H$. Die Gruppen B und B_0 sind konjugiert unter G und es gilt $Y/B \cong E_8 \cong Y/B_0$. Damit folgt $\mho^1(Y) \leq B \cap B_0$. Weiter ist wegen $z \in \mho^1(B)$, $(t_1 e_8)^2 \in e_7 \langle z \rangle$, $(t_5 e_8)^2 \in e_5 e_7 \langle z \rangle$, $(t_1 e_4)^2 \in e_3 \langle z \rangle$ und $(t_5 e_4)^2 \in e_1 \langle z \rangle$ die Gruppe E_1 eine Untergruppe von $\mho^1(Y)$. Es folgt $E_1 \leq B \cap B_0$. Aber die Gruppe BB_0 liegt in Y, also gilt $|B \cap B_0| \leq 2^5$. Das liefert $E_1 = B \cap B_0 = O_2(C_G(z)) \cap O_2(C_G(z^g))$. Mit $g^2 \in H$ erhält man $E_1 = E_1^g \lhd C_G(z^g) = C_G(e_7)$.

Wir haben damit gezeigt, daß H eine echte Untergruppe von $N_G(E_1)$ ist. Es ist H/E_1 isomorph zu einer maximalen Untergruppe von $L_5(2)$, also ist $N_G(E_1)/E_1$ isomorph zu $L_5(2)$ und demnach $N_G(E_1)$ isomorph zur eindeutig bestimmten treuen nichtzerfallenden Erweiterung einer E_{32} durch $L_5(2)$. Nach Satz 1.5 ist dann $G = N_G(E_1) \cong D$ oder $G \cong T$. Der zweite Fall ist jedoch nicht möglich, da für eine zentrale Involution v aus G eine A_9 in $C_G(v)$ eingebettet ist. Die Annahme $z \sim e_7$ führt also zu $G \cong D$. Wir nehmen nun an, daß z nicht zu e_7 unter G konjugiert ist.

Wir zeigen $z \not\sim e_8$ unter G. Dazu bestimmen wir zunächst $C = C_S(e_8)$, indem wir die Kommutatoren $[t_i, e_8]$ für $i = 1, \ldots, 6$, berechnen, die $[\bar{t}_i, \bar{e}_8]$ sind ja bereits bekannt. Aus Lemma 2.8 entnehmen wir, daß die Involution t_1 das Element e_1e_8 der Ordnung 4 aus E invertiert. Es sei $[t_1, e_8] = e_8e_7z^{\alpha_1}$. Das liefert $e_1e_8z = (e_1e_8)^{t_1} = (e_1e_7)(e_8e_7z^{\alpha_1}) = e_1e_8z^{\alpha_1}$, also gilt $\alpha_1 = 1$ und $[t_1, e_8] = e_7z$. Weiter sei $[t_2, e_8] = e_3z^{\alpha_2}$. Mit $[\bar{t}_1, \bar{t}_2] = \bar{e}_3\bar{e}_7$ folgt $e_2z = e_2^{e_7} = e_2^{e_7e_3z^i} = e_2^{t_1t_2t_1t_2} = e_2z^{\alpha_2}$, damit ist $\alpha_2 = 1$. Sei $[t_3, e_8] = e_5z^{\alpha_3}$. Mit $[\bar{t}_1, \bar{t}_3] = \bar{e}_5\bar{e}_7$ folgt $e_2z = e_2^{e_7} = e_2^{e_7e_5z^i} = e_2^{t_1t_3t_1t_3} = e_2z^{\alpha_3}$, damit ist $\alpha_3 = 1$. Sei $[t_4, e_8] = e_5z^{\alpha_4}$. Mit $[\bar{t}_2, \bar{t}_4] = \bar{e}_7$ folgt $e_6 = e_6^{e_7z^i} = e_6^{t_2t_4t_2t_4} = e_6\, z^{\alpha_4+\alpha_3}$, also ist $\alpha_4 = \alpha_3 = 1$. Sei weiterhin $[t_5, e_8] = e_5e_7z^{\alpha_5}$, mit $[\bar{t}_3, \bar{t}_5] = \bar{e}_7$ folgt $e_4 = e_4^{e_7z^i} = e_4^{\,t_3t_5t_3t_5} = e_4z^{\alpha_5+\alpha_3}$, also ist $\alpha_5 = \alpha_3 = 1$. Sei nun schließlich $[t_6, e_8] = e_7z^{\alpha_6}$, mit $[\bar{t}_1, \bar{t}_6] = \bar{e}_5$ folgt dann $e_2 = e_2^{e_5z^i} = e_2^{t_1t_6t_1t_6} = e_2z^{1+\alpha_6}$, also ist $\alpha_6 = 1$.

Mit Hilfe dieser Rechnungen sieht man nun leicht, daß $X = C_E(e_8)\langle t_1t_6, t_1t_3t_5e_1, t_1t_2t_4e_1\rangle$ eine Untergruppe von $C_S(e_8)$ ist. Da aber e_8 genau 240 Konjugierte unter H in E besitzt, und X die Ordnung 2^{11} hat, ist X schon eine Sylow 2-Untergruppe von $C_H(e_8)$ und damit $X = C_S(e_8)$. Nun berechnet man $X' = \langle z, e_3 e_4, e_5, e_6, e_7, e_8\rangle$ und $X'' = \langle z\rangle$. Somit kann z nicht zu e_8 konjugiert sein.

Also besitzt z keine G-Konjugierten in $E\setminus\langle z\rangle$. Mit Satz 1.3 ist damit die Annahme $z \not\sim e_7$ zum Widerspruch geführt, und das Lemma ist bewiesen.

Nun kommen wir zum Abschluß des Beweises von Satz 2.7.

LEMMA 2.12. Sei $\tilde{H} \cong A_9$. Dann ist G isomorph zu T.

Beweis. Auf $\bar{E}$ operiert $\tilde{H}$ irreduzibel, mit Lemma 2.1 sind also alle Involutionen aus $E\setminus\langle z\rangle$ unter H konjugiert. Es folgt $|C_{\tilde{H}}(\bar{e}_7)| = 2^6.3.7$. Man erhält $C_{\tilde{H}}(\bar{e}_7) = C_{\tilde{U}}(\bar{e}_7) \cong E_8L_2(7)$. Nach Satz 1.3 ist z konjugiert zu e_7 unter G. Genau wie im ersten Teil von Lemma 2.11 folgt $N_G(E_1) \nleq H$, also ist $N_G(E_1)$ isomorph zur eindeutig bestimmten nichtzerfallenden Erweiterung D einer E_{32} durch $L_5(2)$.

Weiter ist $N_G(E_1)$ eine echte Untergruppe von G. Mit Satz 1.5 folgt $G \cong T$.

Es bleiben die Fälle zu untersuchen, in denen $\tilde{U}$ gemäß (III) oder (IV) auf $\bar{E}$ operiert. Der folgende Satz zeigt jedoch, daß dies nicht möglich ist.

SATZ 2.13. Die Gruppe $\tilde{U}$ kann nicht gemäß (III) oder (IV) auf $\bar{E}$ operieren.

Beweis. Wir nehmen zunächst an, daß $\tilde{U}$ gemäß (III) auf $\bar{E}$ operiert. Mit Lemma 2.2 gilt $\tilde{H} \cong A_8$ und damit $U = H$. Nach Lemma 2.1 zentralisiert $\tilde{H}$ in $\bar{E}$ eine hyperbolische Ebene oder einen anisotropen Raum der Dimension 2, je nach Typ von E. Also besitzt H einen Normalteiler isomorph zu D_8 oder Q_8. Das ist aber ein Widerspruch zu Satz 1.2.

Nun operiere $\tilde{U}$ gemäß (IV) auf $\bar{E}$. Nach Lemma 2.1 existiert ein $e \in E$, so daß $C_H(e)$ in H normal vom Index 2 liegt. Da jedoch E nicht in $C_H(e)$ enthalten ist, ergibt sich ein Widerspruch zu Satz 1.6.

Damit ist der Fall $\tilde{H} \cong A_8$ oder A_9 abgeschlossen.

3. *Der Fall* $\tilde{H} \cong PSp(4,3)$.

Im ersten Abschnitt dieses Paragraphen wird die Operation von $\tilde{H}$ auf $\bar{E}$ bestimmt. Wir werden zeigen, daß $\bar{E}$ ein eindeutig bestimmter irreduzibler $\tilde{H}$-Modul ist. Weiter muß E vom Typ $(+)$ sein. Im zweiten Abschnitt wird dann gezeigt, daß die Involution z in $E \setminus \langle z \rangle$ keine Konjugierten unter G besitzt. Ein Ergebnis von Aschbacher und Smith (Satz 1.3) sagt dann, daß G isomorph zu $U_6(2)$ ist.

Im Verlauf dieses Paragraphen werden des öfteren die Isomorphien $PSp(4,3) \cong SO_6^-(2) \cong U_4(2)$ benutzt.

Zunächst verschaffen wir uns mit [15] einen Überblick über die Struktur einer $PSp(4,3)$. Sei X eine Gruppe isomorph zu $PSp(4,3)$ und t eine zentrale Involution aus X. Dann ist $C_X(t) = (S_1 * S_2)\langle \beta \rangle$ mit $S_i \cong SL(2,3)$, $i = 1,2$, $S_1 \cap S_2 = \langle t \rangle$, $S_1^\beta = S_2$ und $\beta^2 = 1$. Dabei sei $S_1 = \langle f_1, g_1, \sigma_1 \rangle$ mit $f_1^2 = g_1^2 = t$ und $\sigma_1^3 = 1$. Weiter setzen wir $f_2 = f_1^\beta$, $g_2 = g_1^\beta$ und $\sigma_2 = \sigma_1^\beta$. Also ist $S_2 = \langle f_2, g_2, \sigma_2 \rangle$. Es sei weiter $T_0 = \langle f_1, g_1, f_2, g_2, \beta \rangle$, dann ist T_0 eine Sylow 2-Untergruppe von X. Wir setzen $\tau_1 = f_1 f_2$ und $\tau_2 = g_1 g_2$, die τ_i, $i = 1,2$, sind Involutionen. Die einzige elementar-abelsche Untergruppe der Ordnung 16 in T_0 ist $J(T_0) = \langle t, \beta, \tau_1, \tau_2 \rangle$. Es ist $N_X(J(T_0)) \cong E_{16}(^1) A_5$, damit ist die zerfallende Erweiterung einer E_{16} durch A_5 gemeint, bei der A_5 nichttransitiv auf der Menge der Involutionen der E_{16} operiert. X besitzt 2 Klassen von Involutionen mit Vertretern t und $t\beta$, es ist $|C_X(t\beta)| = 2^5.3$. In $J(T_0)$ besitzt t genau 5 und $t\beta$ genau 10 Konjugierte unter X.

Es ist $|X| = 2^6.3^4.5$. Wir untersuchen nun die 3-Struktur von X. Es sei $a_1 = \sigma_1\sigma_2$, also $a_1^3 = 1$. Es gibt dann ein Element a der Ordnung 3 in X, so daß $P = \langle a_1, a \rangle$ eine Sylow 3-Untergruppe von X ist, diese ist isomorph zu $Z_3 \wr Z_3$. Wir setzen $a_2 = \alpha_1^\alpha$ und $a_3 = a_2^\alpha$. Weiter ist $J(P) = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle \cong E_{27}$, wir setzen $P_0 = J(P)$. Es ist $Z(P) = \langle a_1 a_2 a_3 \rangle$ und $P' = \langle a_1 a_2 a_3, a_1 a_2^2 \rangle$. Bei geeigneter Wahl von a ist $\sigma_1 = a_1^2 a_2^2 a_3^2$ und $\sigma_2 = a_1^2 a_2 a_3$. In X gibt es vier Klassen von Elementen der Ordnung 3 mit Vertretern a_1, $a_1 a_2^2$, $a_1 a_2 a_3$ und $(a_1 a_2 a_3)^2$. Dabei ist $|C_X(a_1)| = 2^2.3^3$, $|C_X(a_1^2 a_2)| = 2.3^3$ und $|C_X(a_1 a_2 a_3)| = 2^3.3^4$. Die Gruppe $C_X(a_1 a_2 a_3)$ hat Sylow 2-Untergruppen vom Typ Q_8. Schließlich ist $N_X(P_0) = \langle P, t, \beta, z' \rangle$, dabei ist z' eine Involution mit $t^{z'} = \beta$, $\tau_2^{z'} = \tau_1\tau_2$ und $a_1^{z'} = a_1^2$, also ist die Sylow 2-Untergruppe $\langle t, \beta, z' \rangle$ isomorph zu einer Diedergruppe der Ordnung 8 mit Zentrum $\langle t\beta \rangle$. Weiter ist $N_X(P_0)$ isomorph zu einer zerfallenden Erweiterung einer E_{27} durch Σ_4. Es ist $z' \sim t\beta$ und $\langle t\beta, z' \rangle \lhd \langle t, \beta, z', a \rangle \cong \Sigma_4$, die Vierergruppe $\langle t\beta, z' \rangle$ operiert fixpunktfrei auf P_0, und die Vierergruppe $\langle t, \beta \rangle$ zentralisiert in P_0 die Untergruppe $\langle a_1 \rangle$.

Es erweist sich als nützlich, die Ordnungen der maximalen Untergruppen von X zu kennen. Zu diesem Zweck sei das folgende Lemma eingeschoben.

Lemma 3.1. Sei U eine maximale Untergruppe von X. Dann ist $|U|$ ein Teiler von $2^4.3^2.5$, $2^6.3.5$, $2^6.3^2$ oder $2^3.3^4$. Insbesondere sind $N_X(J(T_0))$, $N_X(P_0)$, $C_X(t)$ und $C_X(a_1 a_2 a_3)$ maximale Untergruppen von X.

Beweis. Sei U eine maximale Untergruppe von X. Sei weiter N ein minimaler Normalteiler von U. Ist N ein direktes Produkt einfacher Gruppen, so folgt mit [11], daß N isomorph zu einer der Gruppen A_5 oder A_6 ist. Da A_5 in keinem Zentralisator in X als Kompositionsfaktor auftaucht, teilt dann $|U|$ die Ordnung von $AutA_6$. In X gibt es keine Elemente der Ordnung 8, also teilt $|U|$ sogar $2|A_6| = 2^4.3^2.5$.

Sei nun N eine elementar-abelsche p-Gruppe. Sei zunächst $p = 2$. Ist $N \cong E_{16}$, so ist $|U| = |N_X(J(T_0))| = 2^6.3.5$. Ist $N \cong E_8$, so wird N von keinem $2'$-Element aus X zentralisiert, also ist $|U|$ ein Teiler von $2^6.3$. Ist $N \cong E_4$, so ist $|C_X(N)|_{2'} = 1$ oder 3. Im ersten Fall ist $|U|$ ein Teiler von $2^6.3$, im zweiten Fall wird N von einem Dreielement $x \in X$, das zu α_1 konjugiert ist, zentralisiert. Also ist dann N konjugiert zu $\langle t, \beta\rangle$, da $\langle t, \beta\rangle$ eine Sylow 2-Untergruppe von $C_X(\alpha_1)$ ist. Es folgt $|U| = |N_X(\langle t, \beta\rangle)| = 2^5.3$. Für $N \cong Z_2$ ist $|U|$ ein Teiler von $2^6.3^2$. Sei nun $p = 3$. Für $N \cong E_{27}$ gilt $U \cong N_X(P_0)$, und für $N \cong Z_3$ liest man an den Zentralisatoren von Drei-Elementen ab, daß $|U|$ ein Teiler von $2^3.3^4$ ist. Es sei also $N \cong E_9$. Sei zunächst $C_X(N)$ eine 3-Gruppe. Da eine $GL(2,3)$ Elemente der Ordnung 8 besitzt, hat dann U einen 2-Anteil der Ordnung höchstens 2^3. Sei also nun x eine Involution aus $C_X(N)$. Dann ist x konjugiert zu t, und N ist konjugiert zu einer 3-Sylowgruppe von $C_X(t)$. Sei R eine 3-Sylowgruppe von $C_X(t)$, dann ist $|U|$ ein Teiler von $|N_X(R)| = 2^2.3^3$. Ist schließlich $p = 5$, so ist $|U| = 20$. Damit sind alle maximalen Untergruppen erfaßt, und die Behauptung ist bewiesen.

Lemma 3.2. Die Gruppe $\tilde{H}$ operiert irreduzibel auf $\bar{E}$.

Beweis. Wir nehmen an, daß $\tilde{H}$ reduzibel auf $\bar{E}$ operiert. Sei $\bar{E}_d$ der duale $\tilde{H}$-Modul zu $\bar{E}$. Dann gibt es in $\bar{E}$ oder $\bar{E}_d$ einen nichttrivialen irreduziblen Teilmodul $\bar{F}$. Da 3^4 die Ordnung von $\tilde{H}$ teilt, ist $\dim_{GF(2)}\bar{F} = 6$ oder 7. Nach [17, S. 51] operiert $\tilde{H}$ dann vollständig reduzibel auf $\bar{E}$ oder $\bar{E}_d$, und da $\bar{E}_d$ der duale Modul zu $\bar{E}$ ist, operiert $\tilde{H}$ auf beiden Moduln vollständig reduzibel. Weiter folgt mit [17], daß die Dimension von $\bar{F}$ genau 6 ist. Also zentralisiert $\tilde{H}$ einen Unterraum $\bar{F}_0$ der Dimension 2 in $\bar{E}$. Es ist $F_0 \cong D_8$ oder Q_8, je nach Typ von E. Das ist aber ein Widerspruch zu Satz 1.2.

Lemma 3.3. Die extraspezielle Gruppe E ist vom Typ $(+)$.

Beweis. Wir nehmen an, daß E vom Typ $(-)$ ist. Also besitzt $\bar{E}$ genau 119 isotrope und 136 anisotrope Vektoren. Sei $\tilde{\delta}$ ein Element der Ordnung 5 aus $\tilde{H}$. Dann kann $\tilde{\delta}$ nicht fixpunktfrei auf $\bar{E}$ operieren, also existiert ein anisotroper Vektor $\bar{e}$ aus $\bar{E}$ mit $5 / |C_{\tilde{H}}(\bar{e})/\bar{E}|$. Wir setzen $\tilde{C} = C_{\tilde{H}}(\bar{e})/\bar{E}$. Nach Lemma 3.2 ist $\tilde{C}$ eine echte Untergruppe von $\tilde{H}$. Weiter folgt mit Lemma 3.1, daß $|C|$ ein Teiler von $2^4.3^2.5$ oder $2^6.3.5$ ist. Also gibt es in $\bar{E}$ eine Bahn der Länge 27, 36 oder 72, hierzu muß die Struktur der maximalen Untergruppen A_6Z_2 und $E_{16}A_5$ mitherangezogen werden. Wegen $9 \not| 136$ existiert ein anisotroper Vektor $\bar{e}_1$ in $\bar{E}$ mit $5 \not| |C_{\tilde{H}}(\bar{e}_1)/\bar{E}|$. Wir setzen $\tilde{C}_1 = C_{\tilde{H}}(\bar{e}_1)/\bar{E}$. Mit Lemma 3.1 und Lemma 3.2 ist dann $|\tilde{C}_1|$ ein Teiler von $2^6.3^2$ oder $2^3.3^4$. Also gibt es in $\bar{E}$ eine weitere Bahn von anisotropen Vektoren der Länge 40, 45, 80, 90 oder 120. Man sieht nun aber sofort, daß 136 sich so nicht in Summanden zerlegen läßt, damit kann E nicht vom Typ $(-)$ sein.

Nun soll die Operation von $\tilde{H}$ auf $\bar{E}$ untersucht werden. Zu diesem Zweck wird zunächst die Operation einer Sylow 3-Untergruppe $\tilde{P}$ von $\tilde{H}$ auf $\bar{E}$ bestimmt. Es sei dazu $\mathfrak{L} = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3, \bar{e}_4, \bar{e}_5, \bar{e}_6, \bar{e}_7, \bar{e}_8\}$ eine Basis von $\bar{E}$ mit $e_i^2 = z$, $i = 1, \ldots, 8$, und $\langle e_{2j-1}, e_{2j}\rangle \cong Q_8$ für $j = 1, \ldots, 4$. Es ist $O(\bar{E}) \cong O_8^+(2)$, und $\tilde{H}$ ist in $O(\bar{E})$ enthalten. Sei x ein Element von $GL(\bar{E})$ dargestellt bezüglich der Basis $\mathfrak{L}$. Genau dann ist x eine orthogonale Abbildung bezüglich der zu $\bar{E}$ gehörigen quadratischen Form g und dem symplektischen Skalarprodukt (,), wenn für alle $i = 1, \ldots, 8$, $g(\bar{e}_i x) = 1$ gilt, und die Matrix $\big((\bar{e}_i x, \bar{e}_j x)\big)$ bezüglich der Basis $\mathfrak{L}$ die Gestalt

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & & & & & & \\ 1 & 0 & & & & & & \\ & & 0 & 1 & & & & \\ & & 1 & 0 & & & & \\ & & & & 0 & 1 & & \\ & & & & 1 & 0 & & \\ & & & & & & 0 & 1 \\ & & & & & & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

hat. Es bezeichne im folgenden immer A die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ und I die zweidimensionale Einheitsmatrix. Wir definieren nun eine Sylow 3-Untergruppe von $O(\bar{E})$ durch $\tilde{S} = \langle \tilde{a}, \tilde{b}_1, \tilde{b}_2, \tilde{b}_3, \tilde{c}\rangle$, wobei diese Erzeugenden bezüglich $\mathfrak{L}$ folgende Darstellungen haben:

$$\tilde{a} = \begin{pmatrix} A & & & \\ & I & & \\ & & I & \\ & & & I \end{pmatrix}, \quad \tilde{b}_1 = \begin{pmatrix} A & & & \\ & A^2 & & \\ & & A^2 & \\ & & & A \end{pmatrix}, \quad \tilde{c} = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \end{pmatrix}.$$

Weiter sei $\tilde{b}_2 = \tilde{b}_1^{\tilde{c}}$ und $\tilde{b}_3 = \tilde{b}_2^{\tilde{c}}$. Es ist $\tilde{a}^3 = \tilde{b}_i^3 = \tilde{c}^3 = 1$, $i = 1, 2, 3$, und $\tilde{S} = \langle \tilde{a}\rangle \times \big(\langle \tilde{b}_1, \tilde{b}_2, \tilde{b}_3\rangle \langle \tilde{c}\rangle\big) \cong Z_3 \times (Z_3 \wr Z_3)$. Man berechnet

$|C_{\bar{E}}(\tilde{b}_1)| = 1$, $|C_{\bar{E}}(\tilde{b}_1\tilde{b}_2\tilde{b}_3)| = 2^2$, $|C_{\bar{E}}(\tilde{b}_1\tilde{b}_2)| = 2^4$ und $|C_{\bar{E}}(\tilde{a})| = 2^6$. Da nach [12] eine $O_8^+(2)$ genau vier Klassen von Elementen der Ordnung 3 enthält, haben wir also mit $\tilde{a}$, $\tilde{b}_1$, $\tilde{b}_1\tilde{b}_2$ und $\tilde{b}_1\tilde{b}_2\tilde{b}_3$ Vertreter der vier Klassen gefunden.

Sei nun $\tilde{P}$ eine Sylow 3-Untergruppe von $\tilde{H}$ betrachtet als Untergruppe von $O(\bar{E})$. Indem wir ein geeignetes Konjugiertes von $\tilde{H}$ in $O(\bar{E})$ wählen, können wir $\tilde{P} < \tilde{S}$ annehmen. In $\tilde{S}$ gibt es genau 9 Untergruppen isomorph zu $Z_3 \wr Z_3$, nämlich die Gruppen $\langle \tilde{b}_1\tilde{a}^i, \tilde{b}_2\tilde{a}^i, \tilde{b}_3\tilde{a}^i\rangle\langle\tilde{c}\tilde{a}^j\rangle$ für $i, j = 0, 1, 2$, wir bezeichnen diese Gruppen durch ihren Typ (i, j). Die Vierergruppe $\langle\tilde{x}, \tilde{y}\rangle$ mit

$$\tilde{x} = \begin{pmatrix} B & & & \\ & I & & \\ & & I & \\ & & & I \end{pmatrix}, \quad \tilde{y} = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{pmatrix} \text{ und } B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

liegt in $O(\bar{E})$ und bewirkt die folgende Konjugation:

$$\begin{gathered} (0,0) \sim (1,0)\,, \quad (2,2) \sim (2,1)\,, \\ (0,1) \sim (0,2) \sim (1,1) \sim (1,2)\,. \end{gathered}$$

Es wird nun gezeigt, daß wir $\tilde{P}$ vom Typ $(0, 0)$ wählen können.

Lemma 3.4. Durch geeignete Wahl von $\tilde{H}$ in $O(\bar{E})$ erhält man $\tilde{P} = \langle\tilde{b}_1, \tilde{b}_2, \tilde{b}_3\rangle\langle\tilde{c}\rangle$.

Beweis. Es sei zunächst angenommen, daß $\tilde{P}$ vom Typ $(2, 0)$ ist. Also ist $\tilde{P} = \langle\tilde{b}_1\tilde{a}^2, \tilde{b}_2\tilde{a}^2, \tilde{b}_3\tilde{a}^2\rangle\langle\tilde{c}\rangle$, wobei

$$\tilde{b}_1\tilde{a}^2 = \begin{pmatrix} I & & & \\ & A^2 & & \\ & & A^2 & \\ & & & A \end{pmatrix}, \quad \tilde{b}_2\tilde{a}^2 = \begin{pmatrix} I & & & \\ & A^2 & & \\ & & A & \\ & & & A^2 \end{pmatrix}, \quad \tilde{b}_3\tilde{a}^2 = \begin{pmatrix} I & & & \\ & A & & \\ & & A^2 & \\ & & & A^2 \end{pmatrix}.$$

Man erhält $C_{\bar{E}}(\tilde{P}_0) = \langle\bar{e}_1, \bar{e}_2\rangle$. Wir setzen nun $\tilde{N} = N_{\tilde{H}}(\tilde{P}_0)$, und behalten diese Bezeichnung auch im folgenden bei. Die Gruppe $\tilde{N}$ ist isomorph zu $E_{27}\Sigma_4$ und operiert auf $\langle\bar{e}_1, \bar{e}_2\rangle$. Da $\langle\tilde{c}\rangle$ auf $\langle\bar{e}_1, \bar{e}_2\rangle$ trivial operiert, wird die Ordnung von $C_{\tilde{H}}(\langle\bar{e}_1, \bar{e}_2\rangle)$ von $2^2.3^4$ geteilt. Mit Lemma 3.1 und Lemma 3.2 folgt $|C_{\tilde{H}}(\bar{e}_1)| = 2^2.3^4$ oder $2^3.3^4$, also gibt es in $\bar{E}$ eine Bahn von anisotropen Vektoren der Länge 40 oder 80. Aber $\tilde{P}_0$ ist in seiner Wirkung auf $\bar{E}$ bekannt, unter $\tilde{P}_0$

zerlegen sich die 120 anisotropen Vektoren aus $\bar{E}$ in Bahnen der Länge 9, 27, 27, 27, 27, 1, 1, 1. Das ist nicht möglich, denn weder 40 noch 80 lassen sich als Summen über diese Bahnlängen schreiben.

Wir nehmen nun an, daß $\tilde{P}$ vom Typ (2,2) ist. Es gilt dann $\tilde{c}\tilde{a}^2 \in \tilde{P}$ und $|C_{\bar{E}}(\tilde{c}\tilde{a}^2)| = 1$, $\tilde{b}_1\tilde{a}^2 \in \tilde{P}$ und $|C_{\bar{E}}(\tilde{b}_1\tilde{a}^2)| = 2^2$, $\tilde{b}_1^2\tilde{b}_2 = (\tilde{b}_1\tilde{a}^2)^2\tilde{b}_2\tilde{a}^2 \in \tilde{P}$ und $|C_{\bar{E}}(\tilde{b}_1^2\tilde{b}_2)| = 2^4$ und schließlich $\tilde{b}_1\tilde{b}_2\tilde{a} = \tilde{b}_1\tilde{a}^2\tilde{b}_2\tilde{a}^2 \in \tilde{P}$ und $|C_{\bar{E}}(\tilde{b}_1\tilde{b}_2\tilde{a})| = 2^6$. Also besitzt $\tilde{P}$ Vertreter aller vier Konjugiertenklassen von Elementen der Ordnung 3 in $O(\bar{E})$. In $\tilde{H}$ gibt es genau vier Klassen von Elementen der Ordnung 3, und es gibt ein $\tilde{d} \in \tilde{H}$ mit $\tilde{d}^3 = 1$, $\tilde{d} \not\sim \tilde{d}^2$ unter $\tilde{H}$, aber $d \sim \tilde{d}^2$ in $O(\bar{E})$. Das ist jedoch ein Widerspruch.

Sei also nun $\tilde{P}$ vom Typ (0, 0) oder (0, 1). Insbesondere können wir $\tilde{P}_0 = \langle \tilde{b}_1, \tilde{b}_2, \tilde{b}_3 \rangle$ annehmen. Wir bestimmen nun $N_{O(\bar{E})}(P_0)$.

Man berechnet leicht $C_{O(\bar{E})}(\tilde{P}_0) = \tilde{P}_0\langle\tilde{a}\rangle \cong E_{81}$. Wir setzen $\mathfrak{N} = N_{O(\bar{E})}(\tilde{P}_0)/C_{O(\bar{E})}(\tilde{P}_0)$. Es ist $\Sigma_4 \lesssim \mathfrak{N} \lesssim GL(3,3)$, und wegen $|O_8^+(2)|_3 = 3^5$ ist $|\mathfrak{N}|_3 = 3$. Es sei $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und

$$\tilde{r} = \begin{pmatrix} B & & & \\ & B & & \\ & & B & \\ & & & B \end{pmatrix},$$

dann ist $\tilde{r}$ eine Involution aus $O(\bar{E})$ mit $\tilde{b}_i^{\tilde{r}} = \tilde{b}_i^2$ für $i = 1, 2, 3$. Also ist $\tilde{r}$ in $N_{O(\bar{E})}(\tilde{P}_0)$ enthalten. Sei weiter

$$\tilde{t} = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{pmatrix}, \ \tilde{\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & I \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ I & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ und } \tilde{z}' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \\ I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dann sind $\tilde{t}$, $\tilde{\beta}$, $\tilde{z}'$ Involutionen aus $N_{O(\bar{E})}(\tilde{P}_0)$. Setzen wir $\tilde{D} = \langle \tilde{t}, \tilde{\beta}, \tilde{z}' \rangle$, so gilt $\tilde{D} \cong D_8$, $Z(\tilde{D}) = \langle \tilde{t}\tilde{\beta} \rangle$, $\tilde{\Sigma} = \langle \tilde{D}, \tilde{c} \rangle$ ist isomorph zu Σ_4, und $\langle \tilde{t}\tilde{\beta}, \tilde{z}' \rangle$ liegt normal in $\tilde{\Sigma}$. Weiter ist $[\tilde{\Sigma}, \tilde{r}] = 1$ und $C_{O(\bar{E})}(\tilde{P}_0) \cap \langle \tilde{\Sigma}, \tilde{r} \rangle = 1$. Somit besitzt $\mathfrak{N}$ eine Untergruppe isomorph zu $\Sigma_4 \times Z_2$. Wegen $|GL(3, 3)| = 2^5.3^3.13$ und $13 \nmid |O_8^+(2)|$ ist $|\mathfrak{N}| = 2^4.3$ oder $2^5.3$. Wir nehmen an, daß $|\mathfrak{N}| = 2^5.3$ ist. Dann enthält eine $GL(3,3)$ eine Untergruppe isomorph zu $(\Sigma_4 \times Z_2)Z_2$, und folglich enthält dann eine $PGL(3, 3)$ eine Untergruppe isomorph zu

$\Sigma_4 \times Z_2$. Aber die Sylow 2-Untergruppen von $PGL(3, 3)$ sind vom Semidieder-Typ, das ist ein Widerspruch.

Also ist $N_{O(\tilde{E})}(\tilde{P}_0) = \langle \tilde{P}_0, \tilde{a} \rangle \langle \tilde{\Sigma}, \tilde{r} \rangle$. Sei $\tilde{x} \in \tilde{P}_0$, dann ist $\tilde{x}^{\tilde{r}} = \tilde{x}^2$. Da $\tilde{b}_1 \tilde{b}_2 \tilde{b}_3$ unter $\tilde{H}$ nicht zu seinem Quadrat konjugiert ist, folgt $\tilde{N} = N_{\tilde{H}}(\tilde{P}_0) \leq \langle \tilde{P}_0, \tilde{a}, \tilde{\Sigma} \rangle$. Es sei $\tilde{N}_1 = \langle \tilde{P}_0, \tilde{a}, \tilde{\Sigma} \rangle$. Wir wollen zeigen, daß man $0.B.d.A.$ $\tilde{N} = \tilde{P}_0 \tilde{\Sigma}$ wählen kann, dann ist auch insbesondere $\tilde{P}$ vom Typ $(0, 0)$ und damit der Beweis des Lemmas beendet. In $\tilde{N}_1$ gibt es eine Untergruppe $\tilde{\Sigma}_0$ mit $\tilde{N} = \tilde{P}_0 \tilde{\Sigma}_0$ und $\tilde{\Sigma}_0 \cong \Sigma_4$. Es sei $\tilde{D}_0$ eine Sylow 2-Untergruppe von $\tilde{\Sigma}_0$. In $\tilde{D}$ gibt es genau eine Vierergruppe, die auf $\tilde{P}_0$ fixpunktfrei operiert, diese werde mit $\tilde{V}$ bezeichnet. Dann ist $V = \langle \tilde{t}\tilde{\beta}, \tilde{z}' \rangle \lhd \tilde{\Sigma}$. Sei $\tilde{V}_0$ die entsprechende Vierergruppe aus $\tilde{D}_0$. In $\tilde{N}_1$ gibt es dann ein $\tilde{s}$ mit $\tilde{V}_0^{\tilde{s}} = \tilde{V}$. Es folgt $\tilde{\Sigma}_0^{\tilde{s}} \leq N_{\tilde{N}1}(\tilde{V}_0)^{\tilde{s}} = N_{\tilde{N}1}(\tilde{V}) = \tilde{\Sigma} \times \langle \tilde{a}(\tilde{b}_1 \tilde{b}_2 \tilde{b}_3)^2 \rangle \cong \Sigma_4 \times Z_3$. Diese Gruppe enthält aber nur eine Untergruppe isomorph zu Σ_4, also ist $\tilde{N}^{\tilde{s}} = \tilde{P}_0 \tilde{\Sigma}_0^{\tilde{s}} = \tilde{P}_0 \tilde{\Sigma}$, und das Lemma ist bewiesen.

Wir wählen also $\tilde{H}$ so, daß $N_{\tilde{H}}(\tilde{P}_0) = \langle \tilde{b}_1, \tilde{b}_2, \tilde{b}_3, \tilde{c}, \tilde{t}, \tilde{\beta}, \tilde{z}' \rangle$ gilt. Damit haben wir bereits eine maximale Untergruppe von $\tilde{H}$ auf $\bar{E}$ dargestellt. Das folgende Lemma zeigt, daß dadurch $\tilde{H}$ eindeutig festgelegt ist. Insbesondere besitzt eine $PSp(4, 3)$ nur eine irreduzible 8-dimensionale orthogonale $GF(2)$-Darstellung.

Lemma 3.5. Das Element $\tilde{v}$ mit

$$\tilde{v} = \begin{pmatrix} 0 & I & I & I \\ I & 0 & I & I \\ I & I & 0 & I \\ I & I & I & 0 \end{pmatrix}$$

liegt in $\tilde{H} \setminus \tilde{N}$. Somit ist $\tilde{H} = \langle \tilde{N}, \tilde{v} \rangle$.

Beweis. Es sei $\tilde{T}_1$ eine Sylow 2-Untergruppe von $\tilde{H}$ mit $\langle \tilde{t}, \tilde{\beta}, \tilde{z}' \rangle \leq \tilde{T}_1$. An der Struktur einer $E_{27}\Sigma_4$ als Untergruppe von $PSp(4, 3)$ lesen wir ab, daß $\tilde{t}\tilde{\beta}$ eine nichtzentrale Involution aus $\tilde{H}$ ist, während $\tilde{t}$ und $\tilde{\beta}$ zentrale Involutionen aus $\tilde{H}$ sind. Wir setzen $Z(\tilde{T}_1) = \langle \tilde{v} \rangle$. Also ist $\tilde{v}$ konjugiert zu $\tilde{t}$, und mit $Z(\langle \tilde{t}, \tilde{\beta}, \tilde{z}' \rangle) = \langle \tilde{t}\tilde{\beta} \rangle$ folgt $\langle \tilde{v} \rangle \cap \langle \tilde{t}, \tilde{\beta}, \tilde{z}' \rangle = 1$.

Somit ist $\tilde{v}$ ein Element aus $\tilde{H} \setminus \tilde{N}$. Durch eine längere Folge von Rechnungen wird nun $\tilde{v}$ bestimmt.

Beutet man die Bedingung $\tilde{v} \in C(\langle \tilde{t}, \tilde{\beta}, \tilde{z}' \rangle)$ aus, so erhält man für $\tilde{v}$ eine Darstellung

$$\tilde{v} = \begin{pmatrix} A & B & B & C \\ B & A & C & B \\ B & C & A & B \\ C & B & B & A \end{pmatrix},$$

wobei A, B und C beliebige $(2, 2)$-Matrizen über $GF(2)$ sind. Weiter liefert $\tilde{v}^2 = 1$ die Bedingungen

(i) $A^2 + C^2 = I$,
(ii) $AC = CA$,
(iii) $B(A + C) = (A + C)B$.

Insbesondere gilt also $(A + C)^2 = I$. Außerdem haben wir die Bedingungen

(iv) $\tilde{v} \in O(\bar{E})$, d.h. $\tilde{v}$ ist orthogonale Abbildung bezüglich der quadratischen Form g und dem symplektischen Skalarprodukt $(\ ,\ )$,

(v) $\tilde{v} \sim \tilde{t}$ in $O(\bar{E})$.

Wir untersuchen nun zunächst den Fall, in dem $A + C \neq I$ ist. Es wird sich herausstellen, daß dieser Fall nicht möglich ist.

1. Fall. $A + C \neq I$.

Mit $(A + C)^2 = I$ folgt $A + C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ oder $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Durch eventuelles Vertauschen der Basiselemente innerhalb $\langle \bar{e}_1, \bar{e}_2 \rangle$, $\langle \bar{e}_3, \bar{e}_4 \rangle$, $\langle \bar{e}_5, \bar{e}_6 \rangle$ oder $\langle \bar{e}_7, \bar{e}_8 \rangle$ können wir $A + C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ erreichen, die Elemente $\tilde{t}$, $\tilde{\beta}$, $\tilde{z}'$ und $\tilde{c}$ werden hiervon nicht berührt, während die Elemente $\tilde{b}_1$, $\tilde{b}_2$ und $\tilde{b}_3$ eventuell durch ihr Quadrat ersetzt werden müssen. Mit Bedingung (ii) ergibt sich

$$(A, C) \in \left\{ \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right), \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right), \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right), \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \right\}.$$

Die beiden letzten Paare verletzen jedoch Bedingung (iv). Es bleiben zwei Fälle übrig.

$$a)\ A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Bedingung (iii) liefert nun $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ oder $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Man erhält vier Möglichkeiten für $\tilde{v}$. Wir werden zeigen, daß alle vier die Bedingung (v) verletzen. Nach (v) muß $|C_{\bar{E}}(\tilde{v})| = |C_{\bar{E}}(\tilde{t})| = 2^6$ gelten. Ist $\bar{e} \in C_{\bar{E}}(\tilde{v})$, so liegt $\bar{e}$ im Kern der linearen Abbildung $\tilde{v} + 1_{\bar{E}}$, wobei $1_{\bar{E}}$ die identische Abbildung auf $\bar{E}$ sei. Es sei $\tilde{v}_0 = \tilde{v} + 1_{\bar{E}}$ und $\mathrm{r}(\tilde{v}_0)$ der Rang der Matrix $\tilde{v}_0$. Man erhält die Bedingung

$$(x)\quad dim_{GF(2)}\, C_{\bar{E}}(\tilde{v}) = 8 - r(\tilde{v}_0).$$

Also ist die Bedingung (v) nur dann erfüllt, wenn $r(\tilde{v}_0) = 2$ ist.

$$a_1)\ B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$r(\tilde{v}_0) = r\left(\begin{bmatrix} 1&0&0&0&0&0&0&1 \\ 0&1&0&0&0&0&1&0 \\ 0&0&1&0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&1&1&0&0&0 \\ 0&0&0&1&1&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0&1&0&0 \\ 0&1&0&0&0&0&1&0 \\ 1&0&0&0&0&0&0&1 \end{bmatrix}\right) = 4.$$

$$a_2)\ B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$r(\tilde{v}_0) = r\left(\begin{bmatrix} 1&0&1&0&1&0&0&1 \\ 0&1&0&1&0&1&1&0 \\ 1&0&1&0&0&1&1&0 \\ 0&1&0&1&1&0&0&1 \\ 1&0&0&1&1&0&1&0 \\ 0&1&1&0&0&1&0&1 \\ 0&1&1&0&1&0&1&0 \\ 1&0&0&1&0&1&0&1 \end{bmatrix}\right) = 4.$$

$$a_3)\ B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$r(\tilde{v}_0) = r\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = 4.$$

$$a_4)\ B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$r(\tilde{v}_0) = r\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = 4.$$

Damit gibt es im Fall a) kein $\tilde{v}$ mit den gewünschten Eigenschaften.

$$b)\ A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Analog zum Fall a) wird auch Fall b) zum Widerspruch geführt. Wegen Bedingung (iii) gibt es für die Matrix B genau die vier Möglichkeiten, die in Fall a) angegeben sind.

$$b_1)\ B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$r(\tilde{v}_0) = r\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & & & & & & \\ 1 & 1 & & & & & & \\ & & 1 & 1 & & & & \\ & & 1 & 1 & & & & \\ & & & & 1 & 1 & & \\ & & & & 1 & 1 & & \\ & & & & & & 1 & 1 \\ & & & & & & 1 & 1 \end{bmatrix}\right) = 4\,.$$

$$b_2)\ B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\,.$$

$$r(\tilde{v}_0) = r\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\right) = 4\,.$$

$$b_3)\ B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$r(v_0) = r\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\right) = 4.$$

$$b_3)\ B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$r(\tilde{v}_0) = r\left(\begin{bmatrix} 1&1&1&1&1&1&0&0\\ 1&1&1&1&1&1&0&0\\ 1&1&1&1&0&0&1&1\\ 1&1&1&1&0&0&1&1\\ 1&1&0&0&1&1&1&1\\ 1&1&0&0&1&1&1&1\\ 0&0&1&1&1&1&1&1\\ 0&0&1&1&1&1&1&1 \end{bmatrix}\right) = 4\,.$$

Also ist der Fall $A + C \neq I$ nicht möglich.

2. Fall. $A + C = I$.

Die Bedingungen (ii) und (iii) liefern jetzt keine weitere Information mehr. Man erhält nur

$$(A\,,\ C)\,,\ (C\,,\ A) \in \left\{ \left(\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\right), \left(\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\right), \left(\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\right.\right.$$
$$\left.\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right), \left(\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}\right), \left(\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}\right), \left(\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\right),$$
$$\left.\left(\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix}\right), \left(\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}\right)\right\}.$$

Alle Paare außer dem ersten liefern einen Widerspruch zur Bedingung (iv), die sagt, daß $\tilde{v}$ eine orthogonale Abbildung ist. Sei z.B. (A, C) $= \left(\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\right)$. Für beliebiges B gilt dann $g(\bar{e}_1) = 1$, und $g(\bar{e}_1\tilde{v})$ $= g(\bar{e}_2 + \bar{e}_7 + \bar{e}_8) = g(\bar{e}_2) + g(\bar{e}_7) + g(\bar{e}_8) + (\bar{e}_7\,,\ \bar{e}_8) = 0$. Ähnlich werden die anderen Paare zum Widerspruch geführt.

Es bleiben also für (A, C) nur die Möglichkeiten $(0, I)$ und $(I, 0)$ übrig.

Es sei zunächst $(A, C) = (0, I)$. Weiter sei $B = \begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ mit a, b, c, $d \in GF(2)$. Man erhält mit (x)

$$2 = r(\tilde{v}_0) = r\left(\begin{bmatrix} 1&0&a&b&a&b&1&0\\ 0&1&c&d&c&d&0&1\\ a&b&1&0&1&0&a&b\\ c&d&0&1&0&1&c&d\\ a&b&1&0&1&0&a&b\\ c&d&0&1&0&1&c&d\\ 1&0&a&b&a&b&1&0\\ 0&1&c&d&c&d&0&1 \end{bmatrix}\right) = r\left(\begin{bmatrix} 1&0&a&b\\ 0&1&c&d\\ a&b&1&0\\ c&d&0&1 \end{bmatrix}\right) =$$

$$r\left(\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & bc+a+1 & ab+db\\ 0 & 0 & ac+ad & bc+d+1\end{bmatrix}\right),$$

also erhält man das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} bc + a + 1 &= 0\\ b(a+d) &= 0\\ c(a+d) &= 0\\ bc + d + 1 &= 0\,. \end{aligned}$$

Dieses System besitzt genau vier Lösungen über $GF(2)$, es folgt $B = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$, oder $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

Um drei dieser vier Möglichkeiten auszuschalten, benötigen wir die Struktur von $\tilde{H}$. Es ist $\langle\tilde{t}, \tilde{\beta}\rangle$ eine Vierergruppe in $N_{\tilde{H}}(\tilde{P}_0)$ mit zwei zentralen und einer nichtzentralen Involution in $\tilde{H}$. Dann ist $C_{\tilde{H}}(\langle\tilde{t}, \tilde{\beta}\rangle) \cong E_{16}Z_3$, wobei das Drei-Element nichttrivial auf E_{16} operiert. Weiter ist $C_{N_{\tilde{H}}(\tilde{P}_0)}(\langle\tilde{t}, \tilde{\beta}\rangle) = \langle\tilde{t}, \tilde{\beta}, \tilde{b}_1\rangle$. Wegen $\tilde{v} \in C_{\tilde{H}}(\langle\tilde{t}, \tilde{\beta}\rangle) \setminus \langle\tilde{t}, \tilde{\beta}\rangle$ ist $\tilde{v}^{\tilde{b}_1} \in C_{\tilde{H}}(\langle\tilde{t}, \tilde{\beta}\rangle)$ und $\tilde{v}^{\tilde{b}_1} \neq \tilde{v}$.

Sei B wie oben berechnet und $A = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, dann ist

$$\tilde{v} = \begin{bmatrix}0 & B & B & I\\ B & 0 & I & B\\ B & I & 0 & B\\ I & B & B & 0\end{bmatrix}, \qquad \tilde{b}_1 = \begin{bmatrix}A & & & \\ & A^2 & & \\ & & A^2 & \\ & & & A\end{bmatrix} \quad \text{und}$$

$$\tilde{v}^{\tilde{b}_1} = \begin{bmatrix}0 & A^2BA^2 & A^2BA^2 & I\\ ABA & 0 & I & ABA\\ ABA & I & 0 & ABA\\ I & A^2BA^2 & A^2BA^2 & 0\end{bmatrix}.$$

Für $B = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ gilt jedoch $ABA = A^2BA^2 = B$ und damit $\tilde{v} = \tilde{v}^{\tilde{b}_1}$, was unmöglich ist.

Aus $(A, C) = (0, I)$ folgt somit $B = I$, und es ist

$$\tilde{v} = \begin{bmatrix} 0 & I & I & I \\ I & 0 & I & I \\ I & I & 0 & I \\ I & I & I & 0 \end{bmatrix},$$

wie im Lemma behauptet. Es bleibt lediglich der Fall $(A, C) = (I, 0)$ offen, der nun zum Widerspruch geführt wird.

Sei also $(A, C) = (I, 0)$ und $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ mit $a, b, c, d \in GF(2)$. Mit (x) gilt

$$2 = r(\tilde{v}_0) = r\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & a & b & a & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & d & c & d & 0 & 0 \\ a & b & 0 & 0 & 0 & 0 & a & b \\ c & d & 0 & 0 & 0 & 0 & c & d \\ a & b & 0 & 0 & 0 & 0 & a & b \\ c & d & 0 & 0 & 0 & 0 & c & d \\ 0 & 0 & a & b & a & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & d & c & d & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = r\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & c & d \\ a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \end{bmatrix}\right).$$

Es folgt $r\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = 1$ und damit $B \in \mathfrak{M}_1 \cup \mathfrak{M}_2$ mit

$$\mathfrak{M}_1 = \left\{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right\} \text{ und}$$

$$\mathfrak{M}_2 = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}.$$

Man überzeugt sich, daß für alle $B \in \mathfrak{M}_2$ die Abbildung $\tilde{v}$ nicht orthogonal ist, also Bedingung (iv) verletzt. Sei also $B \in \mathfrak{M}_1$. Die Struktur von $\tilde{H}$ schließt nun aber diese letzten drei Möglichkeiten für $\tilde{v}$ aus. Wir setzen $\tilde{\tau} = \tilde{v}^{\tilde{b}_1}$. Wie schon vorher bewiesen, ist dann $\tilde{J} = \langle \tilde{t}, \tilde{\beta}, \tilde{v}, \tilde{\tau} \rangle$ elementarabelsch der Ordnung 16. Unter $\tilde{H}$ besitzt $\tilde{t}$ somit genau 5 und $\tilde{t}\tilde{\beta}$ genau 10 Konjugierte in $\tilde{J}$. Also gibt es in $\tilde{J}$ genau 5 Involutionen $\tilde{x}$ mit $|C_{\bar{E}}(\tilde{x})| = 2^6$. Weiter gilt $\tilde{t} \sim \tilde{\beta} \sim \tilde{v} \sim \tilde{\tau}$. Es ist

$$\tau = \begin{bmatrix} I & B_1 & B_1 & 0 \\ B_2 & I & 0 & B_2 \\ B_2 & 0 & I & B_2 \\ 0 & B_1 & B_1 & I \end{bmatrix},$$

mit $B_1 = A^2BA^2$ und $B_2 = ABA$. Wir zeigen nun, daß für alle $B \in \mathfrak{M}_1$ die Beziehung $|C_{\tilde{E}}(\tilde{\beta}\tilde{v})| = |C_{\tilde{E}}(\tilde{\beta}\tilde{\tau})| = 2^6$ und damit $\tilde{t} \sim \tilde{\beta} \sim \sim \tilde{v} \sim \tilde{\tau} \sim \tilde{\beta}\tilde{v} \sim \tilde{\beta}\tilde{\tau}$ gilt, womit die Annahme $B \in \mathfrak{M}_1$ zum Widerspruch geführt ist. Wegen

$$r(\tilde{\beta}\tilde{v} + 1_{\tilde{E}}) = r\left(\begin{bmatrix} I & B & B & I \\ B & 0 & 0 & B \\ B & 0 & 0 & B \\ I & B & B & I \end{bmatrix}\right) = r\left(\begin{pmatrix} I & B \\ B & 0 \end{pmatrix}\right) \in \left\{ r\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right), \right.$$

$$\left. r\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right), \; r\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) \right\} = \{2\} \text{ ist } |C_{\tilde{E}}(\tilde{\beta}\tilde{v})| = 2^6,$$

$$\text{und wegen } r(\tilde{\beta}\tilde{\tau} + 1_{\tilde{E}}) = r\left(\begin{bmatrix} I & B_1 & B_1 & I \\ B_2 & 0 & 0 & B_2 \\ B_2 & 0 & 0 & B_2 \\ I & B_1 & B_1 & I \end{bmatrix}\right) = r\left(\begin{pmatrix} I & B_1 \\ B_2 & 0 \end{pmatrix}\right)$$

$$\in \left\{ r\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right), r\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right), r\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) \right\} = \{2\} \text{ ist}$$

auch $|C_{\tilde{E}}(\tilde{\beta}\tilde{\tau})| = 2^6$.

Der Fall $(A, C) = (I, 0)$ ist somit nicht möglich, und $\tilde{v}$ ist wie in Lemma angegeben eindeutig bestimmt.

Damit wird $\tilde{H} = \langle N_{\tilde{H}}(\tilde{P}_0), \tilde{v}\rangle = \langle \tilde{b}_1, \tilde{b}_2, \tilde{b}_3, \tilde{t}, \tilde{\beta}, \tilde{z}', \tilde{c}, \tilde{v}\rangle$ von (4, 4)-Matrizen erzeugt, deren Einträge aus $\mathfrak{A} = \{0, I, A\ A^2\}$ kommen. Dabei sei 0 und I die zweidimensionale Null- bzw. Einheitsmatrix und $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Versieht man $\mathfrak{A}$ mit der üblichen Addition und Multiplikation, so ist $\mathfrak{A}$ isomorph zum Körper $GF(4)$. Sei λ der Automorphismus von $\mathfrak{A}$, der alle Elemente auf ihr Quadrat abbildet. Sei weiter $\tilde{x}$ eines der oben angegebenen Erzeugenden von $\tilde{H}$, betrachtet als (4, 4)-Matrix über $\mathfrak{A}$. Dann gilt $\tilde{x}^{T\lambda} = \tilde{x}^{-1}$ und $\det(\tilde{x}) = 1$. Also wird $\tilde{H}$ von unitären (4, 4)-Matrizen über $GF(4)$ von Determinante 1 erzeugt. Es folgt $\tilde{H} \lesssim U_4(2) \cong PSp(4, 3)$. Die gefundene Darstellung von $\tilde{H}$ auf $\bar{E}$ rührt also von dieser natürlichen Darstellung her.

Wir führen die Umbenennung $\tilde{a}_i = \tilde{b}_i$, $i = 1, 2, 3$, und $\tilde{a} = \tilde{c}$ ein. Weiter setzen wir $\tilde{\tau}_1 = \tilde{t}\tilde{\beta}\tilde{v}$, $\tilde{\tau}_2 = \tilde{\tau}_1\tilde{\tau}_1^{\tilde{a}_1}$, $\tilde{\sigma}_2 = \tilde{a}_1^2\tilde{a}_2\tilde{a}_3$, $\tilde{f}_2 = \tilde{\tau}_2^{\tilde{\sigma}_2^2}\tilde{\tau}_2$ und $\tilde{g}_2 = \tilde{f}_2^{\sigma_2^2}$. Es ist dann für die am Anfang des Kapitels eingeführten Erzeugenden einer $PSp\,(4,3)$ der Übergang von x nach $\tilde{x}$ ein Isomorphismus. Insbesondere ist $\tilde{T}_0 = \langle \tilde{t}, \tilde{\beta}, \tilde{\tau}_1, \tau_2, \tilde{f}_2, \tilde{g}_2 \rangle$ eine Sylow 2-Untergruppe von $\tilde{H}$ mit $J(\tilde{T}_0) = \langle \tilde{t}, \tilde{\beta}, \tilde{\tau}_1, \tilde{\tau}_2 \rangle$, $Z(\tilde{T}_0) = \langle \tilde{t} \rangle$ und den Relationen

$$\begin{aligned} &\tilde{t}^2 = \tilde{\beta}^2 = \tilde{\tau}_1^2 = \tilde{\tau}_2^2 = 1\,, \ \tilde{f}_2^2 = \tilde{g}_2^2 = \tilde{t}\,, \\ &[\tilde{f}_2, \tilde{g}_2] = [\tilde{f}_2, \tilde{\tau}_2] = [\tilde{g}_2, \tilde{\tau}_1] = \tilde{t}\,, \\ &[\tilde{f}_2, \tilde{\beta}] = \tilde{t}\tilde{\tau}_1\,, \ [\tilde{g}_2, \tilde{\beta}] = \tilde{t}\tilde{\tau}_2\,, \end{aligned}$$

alle restlichen Kommutatoren sind trivial.

In ihrer Wirkung auf $\bar{E}$ sind $\tilde{t}$ und $\tilde{\beta}$ bereits bekannt, die anderen vier Erzeugenden von T_0 berechnen sich aus $\tilde{t}$, $\tilde{\beta}$, $\tilde{v}$, $\tilde{a}_1$, $\tilde{a}_2$ und $\tilde{a}_3$ zu

$$\tilde{\tau}_1 = \begin{pmatrix} I & I & I & 0 \\ I & I & 0 & I \\ I & 0 & I & I \\ 0 & I & I & I \end{pmatrix}, \quad \tilde{\tau}_2 = \begin{pmatrix} I & A^2 & A^2 & 0 \\ A & I & 0 & A \\ A & 0 & I & A \\ 0 & A^2 & A^2 & I \end{pmatrix},$$

$$\tilde{f}_2 = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A & A^2 & I \\ 0 & A^2 & A & I \\ 0 & I & I & I \end{pmatrix}, \quad \tilde{g}_2 = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A & A^2 & A \\ 0 & A^2 & A & A \\ 0 & A^2 & A^2 & I \end{pmatrix}.$$

Damit ist die Untersuchnung der Operation von $\tilde{H}$ auf $\bar{E}$ beendet.

Lemma 3.6. Alle Elemente der Ordnung 4 aus E sind unter H konjugiert.

Beweis. Wir betrachten das Element e_1 der Ordnung 4 aus E. Es ist $\langle \tilde{a}_1\tilde{a}_2\tilde{a}_3, \tilde{a}_1\tilde{a}_2^2, \tilde{a}, \tilde{f}_2, \tilde{g}_2 \rangle$ eine Untergruppe von $C_{\tilde{H}}(\tilde{e}_1)$, die isomorph zu einer Erweiterung einer nichtabelschen Gruppe der Ordnung 3^3 durch eine Quaternionengruppe der Ordnung 8 ist. In $\tilde{H}$ gibt es Elemente der Ordnung 3, die auf $\bar{E}$ fixpunktfrei operieren. Mit Lemma 3.1 folgt $|C_{\tilde{H}}(\tilde{e}_1)| = 2^3.3^3$. Wegen $e_1 \sim e_1 z$ besitzt dann e_1 genau 240 Konjugierte in E unter H.

Lemma 3.7. Alle Involutionen aus $E \setminus \langle z \rangle$ sind konjugiert unter H.

Beweis. Jede Untergruppe der Ordnung 9 von $\tilde{P}$ besitzt Elemente, die unter $\tilde{H}$ zu $\tilde{a}_1$ oder zu $(\tilde{a}_1\tilde{a}_2\tilde{a}_3)^i$, $i = 1, 2$, konjugiert sind (siehe [20, S. 93]). Es ist $C_E(a_1) = \langle z \rangle$ und $C_E(a_1a_2a_3) \cong Q_8$, also kann keine Gruppe der Ordnung 9 in H eine Involution in $E \setminus \langle z \rangle$ zentralisieren. Eine $PSp(4, 3)$ besitzt genau eine Klasse von Elementen der Ordnung 5. Das Element $\tilde{g}_2\tilde{z}'$ hat die Ordnung 5 und operiert fixpunktfrei auf $\bar{E}$, somit gilt $2.3^3.5/[H : C_H(e)]$ für eine Involution e aus $E \setminus \langle z \rangle$. In $E \setminus \langle z \rangle$ gibt es genau $270 = 2.3^3.5$ Involutionen. Die Behauptung folgt.

Lemma 3.8. Die Gruppe $\bar{H}$ zerfällt über $\bar{E}$.

Beweis. Es sei $\tilde{J} = J(\tilde{T}_0) = \langle \tilde{t}, \tilde{\beta}, \tilde{\tau}_1, \tilde{\tau}_2 \rangle \cong E_{16}$ und $\tilde{M} = N_{\tilde{H}}(\tilde{J}) \cong E_{16}{}^{(1)}A_5$, also $\tilde{M} = \tilde{J}\tilde{A}$ mit $\tilde{J} \cap \tilde{A} = 1$ und $\tilde{A} \cong A_5$. Es sei weiter $\bar{F} = C_{\bar{E}}(\tilde{J}) = \langle \bar{e}_1\bar{e}_7, \bar{e}_2\bar{e}_8, \bar{e}_3\bar{e}_5, \bar{e}_4\bar{e}_6 \rangle$. Sind $\bar{M}$ und $\bar{J}$ die vollen Urbilder von $\tilde{M}$ und $\tilde{J}$ in $\bar{H}$, so besitzt $\bar{M}$ die Kompositionsreihe $1 \lhd \bar{F} \lhd \bar{E} \lhd \bar{J} \lhd \bar{M}$ mit den Kompositionsfaktoren $\bar{F} \cong E_{16}$, $\bar{E}/\bar{F} \cong E_{16}$, $\bar{J}/\bar{E} \cong E_{16}$ und $\bar{M}/\bar{J} \cong A_5$. Das Element $\tilde{a}_1$ der Ordnung 3 liegt in $\tilde{M}$ und operiert fixpunktfrei auf $\bar{E}$. Man erhält folgende Isomorphien der Kompositionsfaktoren als A_5-Moduln: $\bar{F} \cong \bar{E}/\bar{F} \cong E_{16}{}^{(2)}$ und $\bar{J}/\bar{E} \cong E_{16}{}^{(1)}$. Mit [1, Satz 3.14, Satz 3.18] folgt, daß $\bar{J}/\bar{F}$ ein vollständig reduzibler $\bar{M}/\bar{J}$-Modul ist. Der selbe Schluß, nocheinmal angewandt, zeigt, daß auch $\bar{J}$ ein vollständig reduzibler $\bar{M}/\bar{J}$-Modul ist. Also gibt es in $\bar{M}$ Untergruppen $\bar{A}_0 \cong A_5$ und $\bar{J}_0 \cong E_{16}$ mit $\bar{M} = \bar{E}\bar{J}_0\bar{A}_0$ und $\bar{E} \cap \bar{J}_0\bar{A}_0 = 1$. In $\bar{M}$ gibt es also Sylow 2-Untergruppen von $\bar{H}$, die über $\bar{E}$ zerfallen. Ein Ergebnis von Gaschütz [5] sagt, daß dann auch $\bar{H}$ über $\bar{E}$ zerfällt.

Der Schurmultiplikator einer $PSp(4,3)$ hat die Ordnung 2. Es sind also folgende zwei Fälle zu unterscheiden:

(I) H zerfällt über E, $H = LE$, $L \cap E = 1$, $L \cong PSp(4, 3)$.

(II) H zerfällt nicht über E, also $H = L_1E$, $L_1 \cap E = \langle z \rangle$ und $L_1 \cong Sp(4, 3)$.

Satz 3.9. Zerfällt H über E, so ist G isomorph zu $U_6(2)$.

Der Beweis dieses Satzes wird über eine Reihe von Hilfssätzen geführt. Es liege also der Fall (I) vor. In L gibt es dann Urbilder

$t, \beta, \tau_1, \tau_2, f_2$ und g_2 der $\tilde{t}, \ldots, \tilde{g}_2$, so daß alle Relationen wie in $\tilde{H}$ erhalten bleiben. Es ist $T_0 = \langle t, \beta, \tau_1, \tau_2, f_2, g_2\rangle$ eine Sylow 2-Untergruppe von L, und $S = T_0 E$ ist eine Sylow 2-Untergruppe von H. In L gibt es zwei Klassen von Involutionen mit Vertretern t und $t\beta$.

Lemma 3.10. Es ist $C_E(t) \cong (Q_8 * Q_8) \times E_4$ und $C_E(t\beta) \cong E_{32}$.

Beweis. Die Operation von L auf $\bar{E}$ ist bekannt. Man erhält $C_{\bar{E}}(t) = \langle \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\bar{e}_5, \bar{e}_4\bar{e}_6, \bar{e}_7, \bar{e}_8\rangle$ und $C_{\bar{E}}(t\beta) = \langle \bar{e}_1\bar{e}_7, \bar{e}_2\bar{e}_8, \bar{e}_3\bar{e}_5, \bar{e}_4\bar{e}_6\rangle$. Weiter ist mit Lemma 3.6 und der bekannten Darstellung von L auf $\bar{E}$ die Gleichung $N_L(e_1\langle z\rangle) = \langle a_1a_2a_3,\ a_1a_2^2, \tilde{a}, f_2, g_2\rangle$ richtig, wobei die a_i, $i = 1, 2, 3$, und a Urbilder der $\tilde{a}_i$, $\tilde{a}$ in L seien. Die Sylow 2-Untergruppen von $N_L(e_1\langle z\rangle)$ sind also vom Typ Q_8, und folglich besitzt die Menge $N_L(e_1\langle z\rangle)\setminus C_L(e_1)$ keine Involutionen. Insbesondere folgt aus $e^t \in e\langle z\rangle$ dann $e^t = e$ für alle Elemente e der Ordnung 4 aus E. Somit ist $\langle e_1, e_2, e_7, e_8\rangle$ eine Untergruppe von $C_E(t)$. Weiter ist $e_3^t \in e_5\langle z\rangle$ und $e_4^t \in e_6\langle z\rangle$, mit $t^2 = 1$ erhält man $(e_3e_5)^t = e_3e_5$ und $(e_4e_6)^t = e_4e_6$. Also ist $C_E(t) = \langle e_1, e_2, e_7, e_8, e_3e_5, e_4e_6\rangle \cong (Q_8 * Q_8) \times E_4$.

Es ist $e_1{}^{t\beta} \in e_7\langle z\rangle$, $e_2{}^{t\beta} \in e_8\langle z\rangle$, $e_3{}^{t\beta} \in e_5\langle z\rangle$ und $e_4{}^{t\beta} \in e_6\langle z\rangle$, wie oben liefert $(t\beta)^2 = 1$ dann $C_E(t\beta) = \langle e_1e_7, e_2e_8, e_3e_5, e_4e_6, z\rangle \cong E_{32}$.

Lemma 3.11. Es ist $J(S) = \langle t, \beta, \tau_1, \tau_2\rangle\langle e_1e_7, e_2e_8, e_3e_6, e_4e_5, z\rangle$ die einzige elementar-abelsche Untergruppe der Ordnung 2^9 in S. Insbesondere ist $J(S)$ schwach abgeschlossen in S bezüglich G, und $N_G(J(S))$ kontrolliert die Fusion in $J(S)$ unter G.

Beweis. In E gibt es elementar-abelsche Untergruppen der Ordnung höchstens 2^5. Weiter besitzt $T_0 \cong S/E$ genau eine Untergruppe isomorph zu E_{16}, aber keine Untergruppen isomorph zu E_{32}, also gibt es in S keine elementar-abelschen Untergruppen der Ordnung 2^{10}.

Sei $R = \langle t, \beta, \tau_1, \tau_2\rangle\langle e_1e_7, e_2e_8, e_3e_6, e_4e_5, z\rangle$. Die Operation der t, β, τ_1 und τ_2 sowie Lemma 3.10 zeigen, daß R eine elementar-abelsche Untergruppe von S der Ordnung 2^9 ist. Sei nun R_0 eine Untergruppe von S mit $R_0 \cong E_{2^9}$. Dann ist $R_0 \cap E \cong E_{32}$ und $R_0/(R_0 \cap E) \cong E_{16}$. Also ist $R_0/(R_0 \cap E) = J(T_0)(R_0 \cap E)/(R_0 \cap E)$ und damit $R_0 \cap E \leq C_E(J(T_0)) = C_E(\langle t, \beta, \tau_1, \tau_2\rangle) = \langle e_1e_7, e_2e_8, e_3e_6, e_4e_5, z\rangle$. Es folgt $R \leq R_0$, also $R = R_0 = J(S)$.

Lemma 3.12. In $J(S)$ gibt es genau 7 H-Klassen von Involutionen mit Vertretern (und Bahnlängen) z (1), e_3e_5 (30), t(20), tz (20), te_1e_7 (120), $t\beta$ (160) und $t\beta z$ (160).

Beweis. Mit Lemma 3.7 zerfällt $J(S) \cap E$ in die H-Klassen z (1) und e_3e_5 (30). Weiter besitzt $J(S)E/E$ genau zwei H/E-Klassen von Involutionen mit Vertretern tE (5) und $t\beta E$ (10). Wir betrachten zunächst die Nebenklasse $t(J(S) \cap E)$. Es gilt $C_E(te_1e_7) \cong D_8 \times E_8$, also folgt $t \not\sim te_1e_7$ unter H. Weiter kontrolliert $C_H(t)E = \langle S, a_1a_2a_3, a_1\rangle$ die Fusion in tE unter H, und es folgt $t \not\sim tz$. Durch Konjugation mit e_3, e_4 und a_1 findet man je 4 Konjugierte von t und tz und 24 Konjugierte von te_1e_7 in $t(J(S) \cap E)$. Damit ist $t(J(S) \cap E)$ bereits ausgeschöpft, und man erhält in $J(S)$ die H-Klassen t (20), tz (20) und te_1e_7 (120).

Nun betrachten wir $t\beta(J(S) \cap E)$. Wieder folgt $t\beta \not\sim t\beta z$ unter H aus der Tatsache, daß $C_H(t\beta)E$ in $t\beta E$ die Fusion kontrolliert. Unter S besitzen jedoch $t\beta$ und $t\beta z$ mindestens je 16 Konjugierte in $t\beta(J(S) \cap E)$. Damit erhält man die H-Klassen $t\beta$ (160) und $t\beta z$ (160).

Lemma 3.13. In $J(S)$ gibt es Vertreter aller H-Klassen von Involutionen.

Beweis. Mit Lemma 3.7 besitzt E genau zwei H-Klassen von Involutionen mit Vertretern z und e_3e_5. Sei te eine Involution aus tE, $e \in E$. Da t nach Lemma 3.10 keine Elemente der Ordnung 4 aus E invertiert, muß e in $C_E(t)$ liegen. Die Gruppe $C_E(t)$ ist isomorph zu $(Q_8 * Q_8) \times E_4$ und besitzt genau 80 Involutionen. Es kontrolliert $X = C_H(t)E = \langle S, a_1a_2a_3, a_1\rangle$ die Fusion in tE. Man berechnet $|X| = 2^{15}.3^2$, $|C_X(t)| = |C_X(tz)| = 2^{13}.3^2$ und $|C_X(te_1e_7)| = |C_E(te_1e_7)|\ |\langle t, \beta, \tau_1, \tau_2, f_2e_3, g_2e_4\rangle| = 2^{12}$. Damit sind alle 80 Involutionen aus tE als Konjugierte von t, tz oder te_1e_7 gefunden.

Mit Lemma 3.10 invertiert auch $t\beta$ keine Elemente der Ordnung 4 aus E, also besitzt $t\beta E$ nur Involutionen in $t\beta C_E(t\beta)$. Wegen $C_E(t\beta) = J(S) \cap E$ liegen alle H-Klassen von Involutionen aus $t\beta E$ bereits in $J(S)$. Da tE und $t\beta E$ Vertreter der beiden Konjugiertenklassen von Involutionen aus H/E sind, ist das Lemma bewiesen.

Lemma 3.14. Sei (x, y) das geordnete Paar $(|z^G \cap J(S)|, |z^G \cap E|)$. Dann ist (x, y) aus der Menge $\{(21, 1), (31, 31), (51, 31), (441, 1), (511, 31)\}$.

Beweis. Mit [6] und Lemma 3.13 ist $x > 1$. Es ist $C_G(J(S)) = C_H(J(S)) = J(S)$, also ist $N_G(J(S))/J(S)$ isomorph zu einer Untergruppe von $L_9(2)$. Nach Lemma 3.12 ist $x = 1 + 20x_1 + 160x_2 + 120x_3 + 30x_4$, wobei $0 \leq x_1, x_2 \leq 2$ und $0 \leq x_3, x_4 \leq 1$. Mit $x / |L_9(2)|_2$, folgt die Behauptung.

LEMMA 3.15. In $E\setminus\langle z\rangle$ besitzt z keine G-Konjugierten.

Beweis. Wir nehmen an, daß $|z^G \cap E| > 1$ gilt. Mit Lemma 3.14 erhält man $|z^G \cap J(S)| \in \{31, 51, 511\}$.

Nach Lemma 3.8 ist $N_H(J(S))/J(S)E$ isomorph zu A_5, und $J(S)E$ besitzt als A_5-Modul die Kompositionsfaktoren $J(S)E/E \cong E_{16}^{(1)}$, $E/C_E(J(S)) \cong E_{16}^{(2)}$ und $C_E(J(S))/\langle z\rangle \cong E_{16}^{(2)}$. Somit ist $N_H(J(S))/J(S) = \mathfrak{N}$ isomorph zu $A_5E_{16}^{(2)}$. Die Sylow 2-Untergruppen dieser eindeutig bestimmten Erweiterung sind vom Typ $L_3(4)$. Nach einem Ergebnis von Gorenstein und Harada [9, Theorem C] ist dann $\mathfrak{N}/O(\mathfrak{N})$ isomorph zu einer Untergruppe von $PGL(3,4)$.

Sei zunächst $|z^G \cap J(S)| = 31$. Dann ist $|\mathfrak{N}| = 2^6.3.5.31$ und folglich $O(\mathfrak{N}) = \langle\delta\rangle$ mit $0(\delta) = 31$. Aber $\mathfrak{N}$ operiert auf der Gruppe $C_{J(S)}(\delta)$ der Ordnung 2^4, ein Widerspruch zu Lemma 3.12.

Sei nun $|z^G \cap J(S)| = 51$. Also ist $|\mathfrak{N}| = 2^6.3^2.5.17$ und $|O(\mathfrak{N})|/3.17$, damit ist $O_{17}(\mathfrak{N}) \neq 1$. Sei $\langle\gamma\rangle = O_{17}(\mathfrak{N})$. Aber $C_{J(S)}(\gamma)$ ist $\mathfrak{N}$-invariant und hat die Ordnung 2, das ist wieder nach Lemma 3.12 nicht möglich.

Sei schließlich $|z^G \cap J(S)| = 511$, also $|\mathfrak{N}| = 2^6.3^2.5.7.73$. Eine $PGL(3, 4)$ besitzt keine Untergruppen der Ordnung $2^6.3.5.7$, also ist $|O(\mathfrak{N})| = 7.73$ und $O_{73}(\mathfrak{N}) \neq 1$. Weiter gilt $5/|C_{\mathfrak{N}}(O_{73}(\mathfrak{N}))|$. Aber eine $L_9(2)$ enthält keine Untergruppen isomorph zu $Z_5 \times Z_{73}$. Also ist auch dieser Fall unmöglich. Es folgt $|z^G \cap E| = 1$.

Der Beweis von Satz 3.9 wird nun abgeschlossen. Die Involution z besitzt nach Lemma 3.15 keine Konjugierten in $E\setminus\langle z\rangle$ unter G. Nach Satz 1.3 kann dann G nur noch isomorph zu $U_6(2)$ sein. Der Zentralisator einer zentralen Involution aus $U_n(2)$ ist isomorph zur zerfallenden treuen Erweiterung einer extraspeziellen 2-Gruppe der Weite n-2 durch $U_{n-2}(2)$. Wegen $U_4(2) \cong PSp(4, 3)$ erfüllt $U_6(2)$ auch die Voraussetzungen des Satzes, der damit bewiesen ist.

Wir zeigen zum Abschluß, daß H über E zerfällt. Damit kann Fall (II) nicht auftreten.

SATZ 3.16. Die Gruppe H zerfällt über E.

Beweis. Wir nehmen an, daß H nicht über E zerfällt. Dann liegt nach Lemma 3.8 der Fall (II) vor. Nach [15] sind Urbilder von zentralen Involutionen aus $Sp(4, 3)/Z(Sp(4,3))$ in $Sp(4, 3)$ Involutionen, während Urbilder von nichtzentralen Involutionen Elemente der Ordnung 4 mit Quadrat z sind. Eine Sylow 2-Untergruppe von $Sp(4, 3)$ ist isomorph zu $(Q_8 \times Q_8)Z_2$, wobei die beiden Quaternionengruppen durch eine Involution vertauscht werden. Man erhält also Urbilder der $\tilde{t}$, $\tilde{\beta}$, $\tilde{\tau}_1$, $\tilde{\tau}_2$, $\tilde{f}_2$, $\tilde{g}_2$ in L_1 mit den Relationen

$$t^2 = \beta^2 = 1\,,\ \tau_1^2 = \tau_2^2 = z\,,\ f_2^2 = g_2^2 \in t\langle z\rangle\,,$$
$$[t, \beta] = z,\ [\beta, f_2] \in t\tau_1\,\langle z\rangle\,,\ [\beta, g_2] \in t\tau_2\,\langle z\rangle$$
$$[\tau_1\,, \tau_2] = z\,,\ [\tau_1\,, g_2]\,,\ [\tau_2\,, f_2] \in t\langle z\rangle\,,\ [f_2\,, g_2] \in t\langle z\rangle\,,$$

alle restlichen Kommutatoren der Erzeugenden sind trivial.

Nach Lemma 3.7 sind alle Involutionen aus $E \setminus \langle z\rangle$ konjugiert in H. Wir zeigen $z \not\sim e_3e_5$ unter G.

Es sei $T_0 = \langle t, \beta, \tau_1\,, \tau_2\,, f_2\,, g_2\rangle$ und $S = T_0E$. Dann ist T_0 eine Sylow 2-Untergruppe von L_1 und S eine Sylow 2-Untergruppe von H. Es ist $C = C_S(e_3e_5) = C_E(e_3e_5)T_0 = \langle e_1\,, e_2\,, e_3\,, e_4\,e_6\,, e_5\,, e_7\,, e_8\rangle\,T_0$. Also ist C normal in S vom Index 2. Man berechnet $Z(C) = \langle z, e_3e_5\rangle$ und $C' = \langle t, \tau_1\,, \tau_2\,, e_1\,, e_2\,, e_3e_5\,, e_4e_6\,, e_7\,, e_8\rangle$.

Wegen $S \leq N_G(C)$ sind e_3e_5 und e_3e_5z unter $N_G(C)$ konjugiert. Also besitzen die beiden Gleichungen $x^2 = e_3e_5z^k$, $k = 0, 1$, gleich viele Lösungen in C'. Es sei

$$x = t^{x_1}\,\tau_1^{x_2}\,\tau_2^{x_3}\,e_1^{x_4}\,e_2^{x_5}\,(e_3e_5)^{x_6}\,(e_4e_6)^{x_7}\,e_7^{x_8}\,e_8^{x_9}\,z^{x_{10}}$$

ein beliebiges Element aus C'. Man erhält mit den bekannten Relationen $x^2 = z^a(e_3e_5)^b\,(e_4e_6)^c$, wobei $b = x_2(x_4 + x_8) + x_3(x_5 + x_9)$ und $c = x_2(x_5+x_9) + x_3(x_4+x_8+x_5+x_9)$. Die Lösungen der Gleichungen $x^2 = e_3e_5z^k$, $k = 0, 1$, erfordern also $b = 1$, und $c = 0$. Das führt zu genau je 3.2^5 Lösungen in C'. Andererseits ist $\tau_i^2 = z$ für $i = 1, 2$, und es ist $\langle t, z, e_1e_7\,, e_2e_8\,, e_3e_5\,, e_4e_6\rangle$ eine Untergruppe von $C_{C'}(\langle\tau_1\,, \tau_2\rangle)$ isomorph zu E_{64}. Also besitzt die Gleichung $x^2 = z$ in C' mindestens 2^7 Lösungen. Somit kann z unter $N_G(C)$ nicht zu e_3e_5 oder e_3e_5z konjugiert sein. Mit $\langle z, e_3e_5\rangle = Z(C) \lhd N_G(C)$ folgt $\langle z\rangle \lhd N_G(C)$. Somit ist C eine Sylow 2-Untergruppe von $C_G(e_3e_5)$, also ist z nicht konjugiert zu e_3e_5. Das ist aber ein Widerspruch zu Satz 1.3.

Damit ist der Satz dieser Arbeit bewiesen. Ich danke Herrn Prof. G. Stroth und Herrn Prof. U. Dempwolff für ihre Unterstützung bei dieser Arbeit.

LITERATUR

[1] B. Beisiegel, *Über einfache endliche Gruppen mit Sylow* 2-Untergruppen, deren Ordnung höchstens 2^{10} teilt, Dissertation, Mainz, 1975.

[2] N. BLACKBURN, *The extension theory of the alternating and symmetric groups*, Math. Z. 117, 1970, S. 191-206.

[3] U. DEMPWOLFF, *Zentralisatoren zentraler Involutionen in $L_n(2)$*, Ill. J. Math. 17, 1973, S. 465-497.

[4] U. DEMPWOLFF, *On extensions of an elementary abelian group of order 2^5 by $GL(5,2)$*, Rend. Sem. Math. Univ. Padova 48, 1973, S. 359-363.

[5] W. GASCHÜTZ, *Zur Erweiterungstheorie der endlichen Gruppen*, J. Reine Angew. Math. 190, 1952, S. 93-107.

[6] G. GLAUBERMAN, *Central elements of core-free groups*, J. Alg. 4, 1966, S. 403-420.

[7] D. GORENSTEIN & K. HARADA, *On finite groups with Sylow 2 - subgroups of type A_n, $n = 8, 9, 10, 11$*, Math. Z. 117, 1970, S. 207-238.

[8] GORENSTEIN D., « Finite Groups », Harper & Row, New York, 1968.

[9] D. GORENSTEIN & K. HARADA, *A characterization of Janko's two new simple groups*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo 16, 1970, 331-406.

[10] R. L. J. GRIESS, *Schur multipliers of finite simple groups*, Bull. Amer. Math. Soc. 78, 1972, S. 68-71.

[11] M. J. HALL, *Simple groups of order less than* 1000000, J. Alg. 20, 1972, S. 98-102.

[12] C. HAMILL, *A collineation group of order* $2^{13}. 3^5. 5^2.7$, Proc. London Math. Soc. 3, 1953, S. 54-79.

[13] B. HUPPERT, *Geometric Algebra*, Lecture-Notes, Chicago 1968.

[14] B. HUPPERT, « Endliche Gruppen », Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1967.

[15] Z. JANKO, *The simple group PSp* (4, 3), Can. J. 19, 1969, S. 872-894.

[16] J. KOVAČ STRIKO, *Eine Kennzeichnung der endlichen einfachen Gruppen M_{24}*, He und $L_5(2)$, J. Alg. 43, 1976, S. 375-397.

[17] N. J. PATTERSON, *On Conway's group* .0 and some subgroups, (to appear).

[18] A. REIFART, *A characterization of Thompson's sporadic simple group*, J. Alg. 38, 1976, S. 192-200.

[19] F. SMITH, *On the centralizers of involutions in finite fusion - simple groups*, J. Alg. 38, 1976, S. 268-274.

[20] F. SMITH, *A characterization of the* .2 Conway simple group, J. Alg. 31, 1974, S. 91-116.

[21] F. SMITH, *On finite groups with large extraspecial* 2 - subgroups, (to appear).

Manoscritto pervenuto in redazione il 25 febbraio 1977.