RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

J. A. MAKOWSKY
A. MARCJA

Problemi di decidibilità in logica topologica

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 56 (1976), p. 67-78
<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1976__56__67_0>

REND. SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol. 56 (1977)

Problemi di decidibilità in logica topologica.

J. A. MAKOWSKY - A. MARCJA (*)

SUMMARY - In this paper we study decidability for theories in the language $L(I)$, which is an extension of Sgro's topological first order logic for topological structures. We prove a theorem of elimination of quantifiers and of the operator I.

Introduzione.

Nella sua tesi Sgro [14] ha introdotto un tipo di logica del I ordine per strutture topologiche. L'idea era quella di introdurre un quantificatore generalizzato Q e di interpretare $Qx\varphi(x)$ come «l'insieme definito da $\varphi(x)$ è aperto».

In [6] è stato introdotto, invece del quantificatore Q, un operatore I, interpretando $Ix\varphi(x)$ come «x appartiene all'interno dell'insieme definito da φ». In [6] è stato anche mostrato che il linguaggio $L(I)$ gode della completezza, compattezza e che gode di una caratterizzazione della elementare equivalenza, mediante «back and forth».

In [7] è stato mostrato come il linguaggio $L(I)$ possa essere trattato come un caso particolare di un linguaggio $L(N)$, con N operatore modale, come è stato introdotto da Chang [2].

In questo articolo ci occupiamo di risolvere alcune questioni di decidibilità per $L(N)$; i risultati sono generali ma vengono messi in risalto soprattutto nei riguardi di $L(I)$.

(*) Indirizzo degli AA.: Istituto Matematico «Ulisse Dini», Firenze.
Lavoro eseguito nell'ambito dei gruppi di ricerca del C.N.R. (G.N.S.A.G.A.).

Viene inoltre dimostrato un teorema di eliminazione dell'operatore N. Questi risultati, riferiti al Congresso U.M.I. tenuto a Cagliari, vanno visti in un programma più ampio; in [8] per esempio viene dimostrata la decidibilità della logica topologica monadica e in [9] si dà uno studio dettagliato della teoria dei modelli nel caso in cui N è un operatore monotono.

Nel paragrafo 1 si illustra il sistema formale $L(N)$; nel paragrafo 2 si danno alcuni risultati immediati di decidibilità nel caso che il linguaggio L abbia un simbolo relazionale di ordine e, riadattando il metodo di interpretabilità di Tarski a $L(I)$, si dimostra che alcune teorie topologiche (come gruppi topologici, campi topologici ecc.) sono indecidibili.

Nel paragrafo 3, infine, si dimostra un criterio di eliminazione dei quantificatori e dell'operatore N, mostrando, come esempio, che la teoria degli spazi T_1, privi di punti isolati, e la teoria del campo complesso con la topologia metrica sono decidibili.

1. Il sistema formale.

1.1 *Il linguaggio* $L(N^i)$.

Sia L un insieme di simboli consistente di simboli predicativi finitari $P_1, P_2, \ldots,$ di simboli funzionali finitari $F_1, F_2, \ldots,$ (con arietà $p(i), f(i)$ rispettivamente), di costanti individuali $c_1, c_2, \ldots,$ del simbolo di identità $=$ e di variabili individuali $x_1, x_2, \ldots$.

Sia inoltre N^i, $i \in I$, una famiglia di *operatori non booleani*, ciascuno con arietà $n(i)$ (cfr. Makowsky-Marcja [7] e Chang [2]).

Costruiamo il linguaggio $L(N^i\colon i \in I)$ usando i connettivi $-$, &, $\vee$ e i due quantificatori $\forall x_i$, $\exists x_i$.

Le formule sono, oltre quelle ottenute mediante le regole classiche, anche quelle ottenute dalla seguente regola:

(N^i) Se N^i è un operatore non booleano, x una variabile e $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n(i)}$ sono formule ben formate, allora $N^i x(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n(i)})$ è una formula, dove x occorre libera anche se x non occorre in alcuna delle φ_j, $j \leqslant n(i)$.

Le dimostrazioni per $L(N^i\colon i \in I)$ sono ottenute nel modo usuale usando gli assiomi e le regole del calcolo dei predicati, insieme ai seguenti nuovi schemi di assiomi:

Se N^i è un operatore non booleano $n(i)$-ario, allora:

$$\text{(i)} \quad \Big(\bigwedge_{j\leqslant n(i)} (\varphi_j \Leftrightarrow \psi_j) \Rightarrow (\forall x N^i x(\varphi_1, \ldots, \varphi_{n(i)})) \Leftrightarrow \Leftrightarrow \forall x N^i x(\psi_1, \ldots, \psi_{n(i)})\Big).$$

$$\text{(ii)} \quad \forall x\Big(N^i x(\varphi_1, \ldots, \varphi_{n(i)}) \Rightarrow \bigwedge_{j\leqslant n(i)} \varphi_j(x)\Big).$$

Diciamo che φ è un teorema di $L(N^i)$ ($\vdash_{L(N^i)} \varphi$) se c'è una dimostrazione per φ.

Nel seguito considereremo in particolare $L(I)$ con il solo operatore non booleano unario Ix (per l'interno) con i seguenti assiomi (oltre (i) e (ii)) (cfr. Makowsky [6] e Makowsky-Marcja [7]):

$$\text{(iii)} \quad \forall x((Ix\varphi \mathbin{\&} Ix\psi) \Rightarrow Ix(\varphi \mathbin{\&} \psi))$$

$$\text{(iv)} \quad \forall x(Ix\varphi \Rightarrow IxIx\varphi)$$

$$\text{(v)} \quad \forall x(\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow \forall x(Ix\varphi \Rightarrow Ix\psi)$$

e la regola:

$$\frac{\varphi}{\forall x Ix\varphi}.$$

1.2. *$L(N)$-strutture.*

Vogliamo definire i modelli per $L(N^i)$, limitandoci, per semplicità, al caso di un solo operatore non booleano 1-ario. Il caso generale può essere fatto come in Chang [2].

Una struttura $\mathcal{A}$ per $L(N)$ è un oggetto della forma $\mathcal{A} = \langle \mathcal{A}_0, N_a \colon a \in A\rangle$, dove:

M_0) $\mathcal{A}_0$ è una struttura per L, come nella teoria dei modelli classica, di dominio A.

(M i) N_a è una famiglia di sottoinsiemi di A.

(M ii) Se $X \in N_a$, allora $a \in X$.

Una $L(I)$-struttura è detta una *struttura topologica* se esiste una topologia t su A, tale che:

(M top) $N_a = \{N \subseteq A \colon a \in \mathrm{Int}_t X\}$, dove con $\mathrm{Int}_t X$ abbiamo indicato l'interno di X rispetto alla topologia t.

Per altre interpretazioni dell'operatore N, per esempio modali, cfr. [7].

La soddisfazione per le $L(N)$-strutture è definita come nella teoria dei modelli classica, con in più la seguente condizione:

$$\langle \mathcal{A}, a\rangle \models Na\varphi \text{ se e solo se } \varphi^{\mathcal{A}} = \{a_1 \in A : \langle \mathcal{A}, a_1\rangle \models \varphi(a_1)\} \in N_a .$$

Con $Th_{L(N)}(\mathcal{A})$ denotiamo l'insieme degli enunciati di $L(N)$ veri in $\mathcal{A}$. Qualche volta, se non c'è confusione, scriviamo soltanto $Th(\mathcal{A})$.

1.3. *Sottostrutture.*

Ci sono molti modi di definire sottostrutture ed estensioni di $L(N)$-strutture (cfr. Brosterhuizen [1] e Makowsky-Tulipani [9]).

Siano $\mathcal{A} = \langle \mathcal{A}_0, N_a : a \in A\rangle$, $\mathcal{B} = \langle \mathcal{B}_0, N_b : b \in B\rangle$ due $L(N)$-strutture, diciamo che:

(SS_0) $\mathcal{A} \subseteq_0 \mathcal{B}$ se e solo se $\mathcal{A}_0 \subseteq \mathcal{B}_0$.

(SS_1) $\mathcal{A} \subseteq_1 \mathcal{B}$ se e solo se $\mathcal{A} \subseteq_0 \mathcal{B}$ e per ogni $a \in A$ e $X \in N_a$ di $\mathcal{A}$ esiste $Y \subseteq B$, $Y \in N_a$ in $\mathcal{B}$, tale che $Y \cap A = X$.

$\mathcal{A}$ è una i-sottostruttura elementare di $\mathcal{B}$ ($\mathcal{A} \prec_i \mathcal{B}$, $i = 0, 1$) se $\mathcal{A} \subseteq_i \mathcal{B}$ e per ogni sequenza finita $\underline{a}$ di elementi di A, abbiamo $\mathcal{A} \models \varphi(\underline{a})$ se e solo se $\mathcal{B} \models \varphi(\underline{a})$ per ogni φ in $L(N)$.

Nel seguito ci limiteremo a questi due tipi di sottostrutture, ma per uno studio più dettagliato di morfismi fra $L(N)$-strutture cfr. Makowsky-Tulipani [9].

1.4. *$L(N)$-strutture ridotte.*

Sia $\mathcal{A} = \langle \mathcal{A}_0, N_a : a \in A\rangle$ una $L(N)$-struttura; per ogni $a \in A$ poniamo $N_a^e = \{X \in N_a$: esiste φ di $L(N)$ e parimetri $\underline{a}$ in A tale che $X = \varphi(x, \underline{a})^{\mathcal{A}}\}$.

N_a^e è chiamata la *parte essenziale* di N_a. Un modello è detto *ridotto* se $N_a = N_a^e$ per ogni $a \in A$. Se $\mathcal{A}$ non è ridotto, denotiamo con $\mathcal{A}^e$ la struttura $\langle \mathcal{A}_0, N_a^e : a \in A\rangle$. È facile mostrare che $\mathcal{A}^e \prec_1 \mathcal{A}$.

Se $\mathcal{A}$ è una $L(I)$-struttura, possiamo dotare A di una topologia, prendendo la topologia generata dal sistema di intorni $\{N_a^e : a \in A\}$. Tale struttura topologica è detta struttura topologica minimale (cfr. Makowsky [6]).

1.5. *Concetti classici.*

Una teoria di $L(N)$ è un insieme di formule di $L(N)$, chiuso rispetto alla conseguenza.

Ricordiamo che una teoria Σ è detta ricorsivamente assiomatizzabile se esiste un insieme ricorsivo di assiomi per Σ. Una teoria Σ è detta decidibile se l'insieme delle sue conseguenze è ricorsivo, altrimenti è detta indecidibile. Una teoria completa e ricorsivamente assiomatizzabile è decidibile.

Un metodo diretto classico di decidibilità è il metodo della eliminazione dei quantificatori; nel paragrafo 3 daremo un criterio di eliminazione degli operatori non booleani, intendendo da qui in avanti, per operatore non booleano sia N, sia i quantificatori $\forall x_i, \exists x_i$.

Per ottenere invece risultati di indecidibilità, classicamente è usato il metodo di interpretabilità di Tarski (cfr; [11] e Ershov e altri [3]). Nel caso di teorie di $L(N)$ i teoremi di indecidibilità sono analoghi a quelli classici; l'unica differenza consiste nel considerare $L(N)$-strutture (o strutture topologiche come nel seguito) invece di modelli classici.

Nei prossimi paragrafi vogliamo dare alcune applicazioni semplici di questi metodi.

2. Esempi.

2.1. *Topologia dell'ordine.*

Vogliamo mostrare alcuni risultati immediati di decidibilità per il linguaggio $L(I)$.

Prima di tutto vogliamo mostrare che se L consta di un simbolo predicativo binario $\leqslant$ per l'ordine, allora l'operatore I è eliminabile.

Sia $\mathcal{A}$ una qualunque struttura (ordinata) topologica con topologia t, Sia t' la topologia su A indotta dall'ordine e indichiamo con $\mathcal{A}'$ la corrispondente struttura topologica.

DEFINIZIONE. Diciamo che la topologia t è compatibile con la topologia t' se $\mathcal{A}' \prec_0 \mathcal{A}$.

Sia TO la teoria, nel linguaggio $L(I)$, avente per assiomi i seguenti enunciati:

$$\forall x - (x < x)$$

$$\forall x \, \forall y \, \forall z (x < y \,\&\, y < z \Rightarrow x < z)$$

$$\forall x \, \forall y (x < y \vee y < x \vee x = y)$$

e lo schema:

$$Ix\varphi(x, \underline{a}) \Leftrightarrow \exists x_1 \exists x_2 (\varphi(x_1, \underline{a}) \,\&\, \varphi(x_2, \underline{a}) \,\&\, x_1 < x \,\&\, x < x_2 \,\&$$
$$\forall y((x_1 < y \,\&\, y < x_2) \Rightarrow \varphi(y, \underline{a}))\,.$$

OSSERVAZIONE. (i) Una struttura topologica modello di TO, ha una topologia compatibile con t'.

(ii) Ogni φ è equivalente, relativamente a TO, a una formula di L.

(iii) Usando le usuali definizioni, sono definibili in $L(I)$ i seguenti concetti:

1) spazio T_2,
2) spazio T_3,
3) topologia prodotto,
4) continuità per spazi T_2.

Notiamo, però, come già osservato in Makowsky [6], corollario 1.6, che questi concetti non sono in generale definibili in $L(I)$, con L qualunque.

Sia $\mathbf{R}$ lo spazio reale dotato della topologia t' dell'ordine e $\mathbf{C}$ lo spazio complesso, dotato della topologia t metrica.

PROPOSIZIONE 2.1. (Sgro)

(i) $\Sigma_0 = Th_{L(I)}(\mathbf{R})$ è decidibile

(ii) $\Sigma_1 = Th_{L(I)}(\mathbf{C})$ è decidibile.

DIMOSTRAZIONE. (i) $\Sigma_0 = Th_L(\mathbf{R}) \cup TO$.

(ii) Sia $\mathcal{A} \models \Sigma_1$; consideriamo l'espansione di $\mathcal{A}$ $\langle \mathcal{A}, \mathcal{B}, f, i \rangle$ tale che:

$\mathcal{B} \models \Sigma_0$ ed f è una biiezione tra $\mathcal{B}^2$ e $\mathcal{A}$ definita da $f(a, b) = a + ib$. Mediante l'ordine di $\mathcal{B}$ e la biiezione f, la topologia di $\mathcal{A}$ risulta definibile. Rimane però interessante la ricerca di assiomi «naturali» per Σ_1; nel paragrafo 3 ci occuperemo di ciò.

2.2. *Alcuni risultati di indecidibilità.*

Abbiamo notato nel paragrafo 1.5 che il concetto di interpretabilità può essere dato per teorie di $L(N)$ e quindi, in particolare per teorie di $L(I)$: nella maggior parte dei casi è sufficiente dotare un modello della topologia discreta. È questo il caso per dimostrare che:

1) la teoria dell'« aritmetica degli interi » con in più l'assioma di spazio topologico discreto

$$\forall x \, \forall y \big(Iy(x = y) \Leftrightarrow (x = y)\big)$$

è indecidibile.

Leggermente più laborioso è dimostrare il seguente risultato di indecidibilità:

2) Sia $\mathcal{G}_{\mathrm{Top}}$ la teoria consistente dei seguenti assiomi:

(i) assiomi di gruppo

(ii) $\big(Ix\varphi(x) \Leftrightarrow \varphi(x)\big) \Rightarrow \big(Ix\varphi(x^{-1}) \Leftrightarrow \varphi(x^{-1})\big)$

(iii) $\big(Ix\varphi(x) \Leftrightarrow \varphi(x)\big) \Rightarrow \big(Ix\varphi(x\cdot x) \Leftrightarrow \varphi(x\cdot x)\big)$

(iv) $\big(Ix\varphi(x) \Leftrightarrow \varphi(x)\big) \Rightarrow \big(Ix\varphi(x\cdot y) \Leftrightarrow \varphi(x\cdot y)\big)$

(v) $\big(Ix\varphi(x) \Leftrightarrow \varphi(x)\big) \Rightarrow \big(Ix\varphi(y\cdot x) \Leftrightarrow \varphi(y\cdot x)\big)$

(vi) $\big(Ix(x \neq y) \Leftrightarrow (x \neq y)$

(vii) $-\big(Ix(x = e) \Leftrightarrow (x = e)\big)$.

Come è annunciato in Sgro [14], $\mathcal{G}_{\mathrm{Top}}$ ha un modello il quale è un gruppo topologico (perchè soddisfa (i)-(v)), è non discreto ed è T_1 e quindi, per la nota proprietà dei gruppi topologici, T_2.

La dimostrazione che $\mathcal{G}_{\mathrm{Top}}$ è indecidibile è analoga alla dimostrazione di Tarski della indecidibilità della teoria dei gruppi; è necessario soltanto il seguente:

Lemma 2.2 (cfr. per esempio Giorgetta [4]).

Sia G il gruppo di tutte le permutazioni sull'insieme $\mathfrak{J}$ degli interi. È possibile trovare una topologia Γ non discreta, T_2 su G, tale che $\langle G, \Gamma\rangle$ sia un gruppo topologico.

Dimostrazione. Sia $A \subseteq \mathfrak{J}$ e $f \in G$; poniamo $U_A(f) = \{g \in G$: $f{\restriction}A = g{\restriction}A\}$. $\mathfrak{U} = \{U_A(f)$: $A \subseteq \mathfrak{J}$, A finito, $f \in G\}$ è una base di intorni per la topologia cercata.

3) La teoria $\mathcal{F}_{\mathrm{Top}}$ consistente degli assiomi di campo e di assiomi analoghi all'esempio 2) per le operazioni $+, \ldots, -, ^{-1}$, è indecidibile: si dimostra analogamente al teorema di J. Robinson di inde-

cidibilità dei campi, in quanto i razionali si possono dotare di una topologia T_1, non discreta.

Un altro risultato di indecidibilità, che non fa però riferimento al teorema di Tarski, è il seguente:

4) Come è noto, diciamo che un gruppo G è *lineare* se e solo se esiste un campo $\boldsymbol{K}$ e $n \in \omega$ tale che $G \simeq GL_n(\boldsymbol{K})$ (gruppo lineare generale). Se $\boldsymbol{K}$ ha una topologia, G ha una topologia indotta dall'inclusione in $\boldsymbol{K}^{n^2}$ e $GL_n(\boldsymbol{K})$ è un gruppo topologico. Per il corollario al teorema 4 di Mal'cev [10], si ha che se $Th_{L(I)}(\boldsymbol{K})$ è indecidibile, allora anche $Th_{L(I)}(G)$ è indecidibile.

3. Eliminazione degli operatori non booleani.

3.1. *Il teorema di eliminazione.*

In questo paragrafo vogliamo dimostrare un criterio generale di eliminazione degli operatori non booleani per un linguaggio $L(N^i: i \in I)$ *che goda della proprietà di compattezza.* Sempre per semplicità, ci limitiamo al caso $L(N)$.

Definizione 3.1. Diciamo che una teoria Σ del linguaggio $L(N)$ ammette *l'eliminazione degli operatori non booleani* se e solo se per ogni formula φ di $L(N)$ esiste una formula ψ tale che $\Sigma \models \varphi \Leftrightarrow \psi$ e ψ è combinazione booleana di formule atomiche.

Diciamo inoltre che una formula chiusa è *priva di operatori non booleani* se non contiene N, non contiene quantificatori e quindi non contiene variabili (nè libere, nè vincolate).

Definizione 3.2. Una formula φ di $L(N)$ è detta *semplice* se è della forma $Nx\psi$, oppure $\exists x\psi$ e ψ è combinazione booleana di formule atomiche.

Lemma 3.3. Se ogni formula semplice è equivalente (relativamente a Σ) a una combinazione booleana di formule atomiche, allora Σ ammette l'eliminazione degli operatori non booleani.

Dimostrazione. La dimostrazione di questo lemma è banale, considerando la proprietà (i) degli operatori non booleani:

$$(\varphi \Leftrightarrow \psi) \Rightarrow (\forall x N x\varphi \Leftrightarrow \forall x N x\psi)$$

LEMMA 3.4. Sia φ una formula chiusa di $L(N)$; supponiamo che per ogni coppia di $L(N)$-strutture $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}' \models \Sigma$, se $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}'$ soddisfano le stesse formule chiuse prive di operatori non booleani di $L(N)$, allora $\mathcal{A} \models \varphi$ se e solo se $\mathcal{A}' \models \varphi$. Allora φ è equivalente (relativamente a Σ) a una formula chiusa priva di operatori non booleani.

DIMOSTRAZIONE. La dimostrazione, per la compattezza di $L(N)$, è analoga a quella del lemma 4 (pag. 83) di Shoenfield [15].

DEFINIZIONE 3.5 (condizione di sottomodello $(CS)_i$). Diciamo che una teoria Σ di $L(N)$ soddisfa $(CS)_i$ $(i = 0, 1)$ se per ogni $\mathcal{A}$, $\mathcal{B} \models \Sigma$ tali che $\mathcal{A} \subseteq_i \mathcal{B}$ $(i = 0, 1)$ e φ una qualunque formula semplice chiusa di $L_A(N)$ (linguaggio esteso con i nomi di A) è $\mathcal{A} \models \varphi$ se e solo se $\mathcal{B} \models \varphi$.

DEFINIZIONE 3.6 (condizione di amalgamazione (CA_i). Diciamo che Σ di $L(N)$ soddisfa $(CA)_i$ $(i = 0, 1)$ se per ogni $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}' \models \Sigma$ soddisfacenti le stesse formule chiuse prive di operatori non booleani, esiste $\mathcal{C} \models \Sigma$ tale che il seguente diagramma commuti

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{B} \arrow[dr, "\subseteq_i"] & \\ \mathcal{A} \arrow[ur, "\subseteq_i"] \arrow[dr, "\subseteq_i"'] & & \mathcal{C} \\ & \mathcal{B}' \arrow[ur, "\subseteq_i"'] & \end{tikzcd} \qquad i = 0, 1 .$$

Tralasciamo la dimostrazione del semplice

LEMMA 3.7. Se Σ soddisfa $(CS)_i$ e $(CA)_i$ $(i = 0, 1)$ e Σ' è ottenuta da Σ aggiungendo una costante, allora Σ' soddisfa $(CS)_i$ e $(CA)_i$.

LEMMA 3.8. Se Σ soddisfa $(CS)_i$ e $(CA)_i$ $(i = 0, 1)$, contiene una costante e φ è una formula semplice chiusa, allora φ è equivalente (relativamente a Σ) a una formula chiusa priva di operatori non booleani.

DIMOSTRAZIONE. Sia φ una formula semplice chiusa; per il lemma 3.4 è sufficiente mostrare che se $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}' \models \Sigma$ soddisfano le stesse formule chiuse, prive di operatori non booleani di $L(N)$, allora $\mathcal{B} \models \varphi$ se e solo se $\mathcal{B}' \models \varphi$.

Poichè Σ soddisfa $(CA)_i$ esiste $\mathcal{C} \models \Sigma$ tale che

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{B} \arrow[dr, "\subseteq_i"] & \\ \mathcal{A} \arrow[ur, "\subseteq_i"] \arrow[dr, "\subseteq_i"'] & & \mathcal{C} \\ & \mathcal{B}' \arrow[ur, "\subseteq_i"'] & \end{tikzcd}$$

Supponiamo che $\mathfrak{B} \models \varphi$ e $\mathfrak{B}' \models -\varphi$; per $(CS)_i$ è $\mathfrak{C} \models \varphi$ e $\mathfrak{C} \models -\varphi$, assurdo.

TEOREMA 3.9 (di eliminazione degli operatori non booleani). Σ, teoria di $L(N)$, ammette l'eliminazione degli operatori non booleani se e solo se Σ soddisfa $(CA)_i$ e $(CS)_i$ $(i = 0, 1)$.

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo che Σ soddisfi $(CA)_i$ e $(CS)_i$; per il lemma 3.3 è sufficiente provare che ogni formula semplice φ di $L(N)$ è equivalente, relativamente a Σ, a una combinazione booleana di formule atomiche. Sia φ' la formula ottenuta da φ sostituendo ogni variabile libera in φ con una nuova costante; sia Σ' la teoria ottenuta da Σ aggiungendo ad L queste costanti. Per i lemmi 3.7 e 3.8, φ' è equivalente, relativamente a Σ', a una formula chiusa, priva di operatori non booleani. Così φ è equivalente, relativamente a Σ, a una combinazione booleana di formule atomiche.

Viceversa, supponiamo che Σ ammetta l'eliminazione degli operatori non booleani; siano $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B} \models \Sigma$ e $\mathfrak{A} \subseteq_i \mathfrak{B}$ e $\varphi(\underline{a})$ sia una formula semplice chiusa. $\varphi(\underline{a})$ è equivalente a una formula priva di operatori non booleani e quindi le condizioni $(CS)_i$ sono soddisfatte. Poichè Σ ammette l'eliminazione dei quantificatori, $(CA)_0$ vale (cfr. Sacks [15], teorema 13.1), cioè per ogni $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}'$ soddisfacenti le ipotesi di $(CA)_0$ esiste $\mathfrak{B} \models \Sigma$ tale che $\mathfrak{B} \subseteq_0 \mathfrak{C}$ e $\mathfrak{B}' \subseteq_0 \mathfrak{C}$, amalgamante gli elementi di A.

Vogliamo mostrare che $\mathfrak{B} \subseteq_1 \mathfrak{C}$; senza perdere in generalità possiamo considerare $\mathfrak{B}^e$ e $\mathfrak{C}^e$. Sia $\varphi^{\mathfrak{B}} \in N_a$ in $\mathfrak{B}$, allora, per l'ipotesi di eliminazione, $\varphi^{\mathfrak{C}} \in N_a$ in $\mathfrak{C}$ e $\varphi^{\mathfrak{C}} \cap B = \varphi^{\mathfrak{B}}$.

3.2. *Applicazioni agli spazi topologici.*

Vogliamo ora dare alcune applicazioni del teorema 3.9 al linguaggio $L(I)$, che, come mostrato in [6] gode della proprietà di compattezza.

Consideriamo la teoria Σ di $L(I)$ degli spazi topologici T_1, privi di punti isolati. Allora L consta soltanto del simbolo di identità e Σ consta di

1) $\forall x \forall y (Ix(x \neq y) \Leftrightarrow (x \neq y))$
2) $\forall x \forall y - (Ix(x = y) \Leftrightarrow (x = y))$.

LEMMA 3.10. Σ soddisfa $(CA)_0$ e $(CS)_0$.

DIMOSTRAZIONE. Verifichiamo prima $(CA)_0$. Siano $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}' \models \Sigma$, soddisfacenti le ipotesi; senza perdere in generalità, possiamo considerare $\mathfrak{B}^e$, $\mathfrak{B}'^e$ (cfr. paragrfo 1.4) e quindi spazi topologici con topologia minimale. Sia $\mathfrak{C}$ lo spazio somma degli spazi $\mathcal{B}^e$, $\mathcal{B}'^e$, dove abbiamo identificato gli elementi di A. $\mathfrak{C}$ è uno spazio T_1 e privo di punti isolati, ed è quindi la struttura cercata.

Verifichiamo adesso $(CS)_0$; siano $\mathcal{A}$, $\mathcal{B} \models \Sigma$, $\mathcal{A} \subseteq_0 \mathcal{B}$ e φ una formula semplice chiusa di $L_A(I)$. Se φ è della forma $\exists x \psi(x)$, allora $\mathcal{A} \models \varphi$ se e solo se $\mathcal{B} \models \varphi$. Rimane da verificare il caso in cui φ è della forma $Ia\psi(a)$, con ψ combinazione booleana di formule atomiche. Supponiamo ancora che $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ siano spazi topologici con topologia minimale; per quest'ultima ipotesi e per il fatto che sono spazi T_1, $\mathcal{A}$ è un sottospazio di $\mathcal{B}$. Evidentemente se $\mathcal{A} \models Ia\psi(a)$ è $\mathcal{B} \models Ia\psi(a)$. Viceversa supponiamo che $\mathcal{B} \models Ia\psi(a)$; questo significa che $a \in \operatorname{Int} \psi^{\mathcal{B}}$. Per la mancanza di punti isolati $\psi^{\mathcal{B}}$ è infinito e quindi $-\psi^{\mathcal{B}}$ è finito (questo deriva dal fatto che ogni insieme definibile $\psi^{\mathcal{B}}$ è finito o cofinito). Ma allora $-\psi^{\mathcal{B}}$ è chiuso, cioè $\psi^{\mathcal{B}}$ è aperto, cioè $\mathcal{A} \models Ia\psi(a)$.

Corollario 3.11. La teoria Σ è completa. (cfr. anche Makowsky [6]).

Corollario 3.12. La proprietà di essere uno spazio di Hausdorff non è esprimibile in $L(I)$.

Dimostrazione. Sia $\mathbf{Q}$ lo spazio razionale con la topologia ottenuta prendendo come sottobase di chiusi i singoletti e $\mathbf{Q}'$ lo spazio razionale con la topologia generata dagli intervalli chiusi: $\mathbf{Q} \underset{L(I)}{\equiv} \mathbf{Q}'$.

3.3. *Teoria del campo complesso con la topologia metrica.*

Sia Σ_1 la teoria consistente di:

1) assiomi di campo algebricamente chiuso,

2) $\forall x \forall y (Iy(x \neq y) \Leftrightarrow (x \neq y))$

3) $\forall x \forall y - (Ix(x = y) \Leftrightarrow (x = y))$.

Lemma 3.13. Σ_1 gode di $(CA)_0$ e $(CS)_0$.

Dimostrazione. Evidentemente la condizione $(CA)_0$ è soddisfatta; la condizione $(CS)_0$ si dimostra analogamente al caso precedente perchè ogni $\psi^{\mathcal{A}}$ (per ogni ψ) è finito o cofinito.

Teorema 3.14. Σ_1 è completa.

Quest'ultimo teorema dà la risposta alla questione sollevata nel paragrafo 2.1 sulla ricerca di assiomi «naturali» per la teoria del campo complesso con la topologia metrica.

BIBLIOGRAFIA

[1] G. A. Broesterhuizen, *Structures for a logic with additional generalized quantifiers*, Thesis, Nijmegen, 1974.

[2] C. C. Chang, *Modal model theory*, Proceedings of the Cambridge Summer School in Mathematical Logic. Springer Lecture Notes, **337**, pp. 599-617.

[3] Yu. L. Ersov - I. A. Lavrov - A. D. Taimanov - M. A. Taitslin, *Elementary Theories*, Russian Mathematical Surveys, **20** (1965), pp. 35-105.

[4] D. Giorgetta, *Notes on automorphism groups*, in preparazione.

[5] J. Keisler, *Logic with the quantifier « there exist uncountably many »*, Ann. Math. Logic, **1** (1969), pp. 1-93.

[6] J. A. Makowsk*, *A logic for topological structures with an interior operator*, Meeting of the ASL in Clermont Ferrand (1975).

[7] J. A. Makowsky - A. Marcja, *Completeness theorem for modal model theory with the Montague-Chang semantics*, Zeitschr. f. math. Logik und Grundlagen d. Math., **23** (1977), pp. 97-104.

[8] J. A. Makowsky - A. Marcja, *The decidability of monadic topological predicate calculus*, in pubblicazione.

[9] J. A. Makowski - S. Tulipani, *Some model theory for monotone quantifiers*, Arch. math. Logik, **18** (1977), pp. 115-134.

[10] A. I. Mal'cev, *Elementary properties of linear groups*, in The Mathematics of Algebraic Systems, Amsterdam (1971).

[11] A. Mostowski - R. M. Robinson - A. Tarski, *Undecidable theories*, Amsterdam (1953).

[12] J. Robinson, *Definability and decision problems in arithmetic*, J.S.L., **14** (1949), pp. 98-114.

[13] G. E. Sacks, *Saturated model theory*, Reading (1972).

[14] J. Sgro, *Completeness theorems for topological models*, in pubblicazione.

[15] J. R. Shoenfield, *Mathematical logic*, Reading (1967).

Manoscritto pervenuto in Redazione il 19 novembre 1975.